
Fiche de révision 4

Nombres complexes, trigonométrie

1 Compétences et notions à maîtriser

- ▷ C1 : Utiliser les écritures algébrique et exponentielle d'un nombre complexe
- ▷ C2 : Déterminer le module et l'argument d'un nombre complexe, utiliser les propriétés associées
- ▷ C3 : Utiliser les formules d'Euler, la formule de Moivre, la caractérisation des nombres réels et des imaginaires purs à l'aide de la conjugaison
- ▷ C4 : Utiliser la technique de l'angle moitié
- ▷ C5 : Utiliser l'inégalité triangulaire
- ▷ C6 : Linéariser une fonction
- ▷ C7 : Résoudre des (in)équations trigonométriques, réduction de $a \cos(x) + b \sin(x)$ en $R \cos(x + \varphi)$

2 Rappels de cours

2.1 Formes algébriques et exponentielles

Le nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit sous **forme algébrique** : $z = a + i b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On définit

- la **partie réelle** de z par $\operatorname{Re}(z) = a$.
- la **partie imaginaire** de z par $\operatorname{Im}(z) = b$.
- le **conjugué** de z par $\bar{z} = a - ib$.
- le **module** de z par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$a + ib = a' + ib' \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Si $|z| \neq 0$, il existe **un unique réel** $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

θ est l'argument principal de z .

Un argument de z est un nombre congru à θ modulo 2π , c'est à dire :

$$\theta = \arg(z) \iff z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)).$$

On note z sous **forme exponentielle** : $z = r e^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et θ un argument de z .

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- **Pour passer d'une écriture algébrique à une écriture exponentielle**, on procède en deux étapes :

1. On calcule le module de $z = a + ib$:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2. On calcule

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

puis on identifie θ grâce aux valeurs remarquables du cercle trigonométrique.

- **Pour passer d'une écriture exponentielle à une écriture algébrique**, on développe l'expression :

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \underbrace{|z|\cos(\theta)}_a + i \underbrace{|z|\sin(\theta)}_b.$$

Proposition 2.1.1 On a les résultats suivants pour tous z et z' de $\mathbb{C}$:

- | | |
|--|---|
| 1. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ | 7. $ zz' = z z' $ |
| 2. $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$ | 8. Si $z \neq 0$, $ \frac{1}{z} = \frac{1}{ z }$ |
| 3. $z\bar{z} = z ^2$ | 9. $ \bar{z} = z $ |
| 4. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ | 10. $ \operatorname{Re}(z) \leq z $ |
| 5. $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$ | 11. $ \operatorname{Im}(z) \leq z $ |
| 6. Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{\bar{z}}$ | 12. Inégalité triangulaire : $ z + z' \leq z + z' $ |

2.2 Résolution de $z^2 = a$ avec $a \in \mathbb{C}$

Soit $a \in \mathbb{C}$, on veut résoudre l'équation $z^2 = a$.

- On écrit a sous forme exponentielle : $a = |a|e^{i\alpha}$ avec $|a| \geq 0$ et $\alpha \in [-\pi, \pi]$.
- On écrit z sous forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$.
- On obtient :

$$z^2 = a \iff r^2 e^{2i\theta} = |a| e^{i\alpha} \iff \begin{cases} r^2 = |a| \\ 2\theta = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{|a|} \text{ car } r \geq 0 \\ \theta = \frac{\alpha}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- Les deux solutions sont $z_1 = \sqrt{|a|}e^{i\alpha/2}$ et $z_2 = \sqrt{|a|}e^{i(\alpha/2+\pi)} = -z_1$.

2.3 Formules d'Euler, linéarisation et technique de l'angle moitié

Proposition 2.3.1 (Formules d'Euler) Pour tout réel θ :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Linéarisation

On utilise la linéarisation pour calculer des **primitives**.

Linéariser une expression trigonométrique, c'est l'exprimer comme une somme de termes de la forme $a \sin(k\theta)$ et $b \cos(k\theta)$. Pour ce faire, on utilise les **formules d'Euler**.

- On remplace les cos et sin par leur expression issue des formules d'Euler.
- On développe et on simplifie au maximum.
- On rassemble les termes en $e^{ik\theta}$ et en $e^{-ik\theta}$.
- On utilise les formules d'Euler pour faire apparaître des $\cos(k\theta)$ et des $\sin(k\theta)$.

Exemple 2.3.2

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cos^2(x) \sin(2x) \\
 &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \times \left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} \right) \\
 &= \frac{1}{8i} (e^{2ix} + e^{-2ix} + 2) (e^{2ix} - e^{-2ix}) \\
 &= \frac{1}{8i} (e^{4ix} - 1 + 1 - e^{-4ix} + 2e^{2ix} - 2e^{-2ix}) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{4ix} - e^{-4ix}}{2i} + 2 \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \sin(4x) + \frac{1}{2} \sin(2x)
 \end{aligned}$$

Technique de l'angle moitié

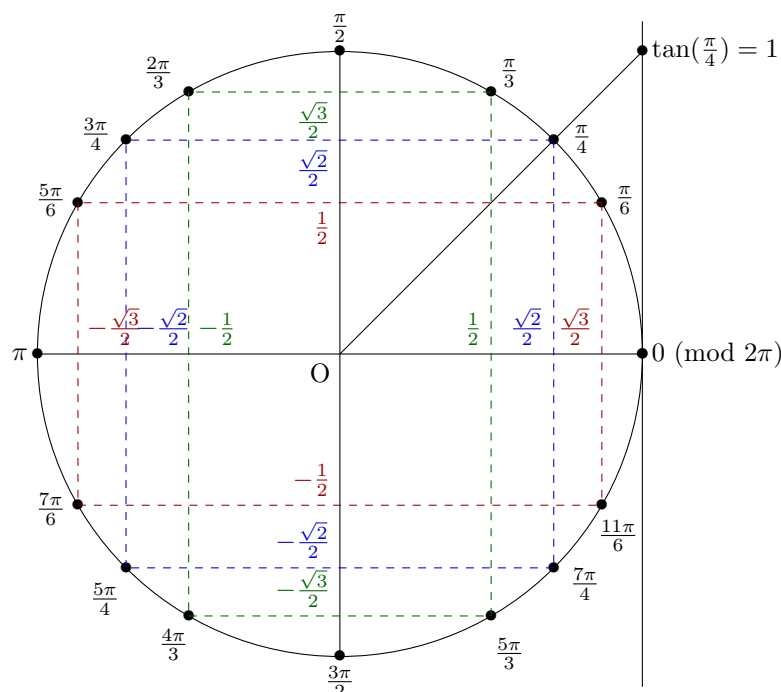
Pour simplifier une somme d'exponentielles complexes $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$, on peut factoriser l'expression par l'angle moitié $e^{i \frac{(\theta+\theta')}{2}}$.

Exemple 2.3.3

$$\begin{aligned}
 1 + e^{i\theta} &= e^{i\frac{0+\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) \\
 &= e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned}$$

2.4 Cercle trigonométrique et fonctions trigonométriques

Tout point M du cercle trigonométrique (c'est-à-dire du cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 1) peut être repéré par un unique couple de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, où $\cos$ et $\sin$ désignent respectivement le cosinus et le sinus de l'angle θ (défini de manière unique à un multiple de 2π près).



Angle θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini

Une simple lecture du cercle trigonométrique permet de retrouver facilement les relations suivantes valables pour tout nombre réel θ , sauf mention contraire.

Formule fondamentale :	$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$	
Périodicité :	$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$	$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$
	$\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$	(pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$)
Relation entre cosinus et sinus :	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$
	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$
Cosinus :	$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$	$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$
	$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$	
Sinus :	$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$
	$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$	
Tangente :	$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$	(pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$)
	$1 + \tan(\theta)^2 = \frac{1}{\cos(\theta)^2}$	(pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$)
	$\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$	(pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$)
	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$	(pour $\theta \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$)

2.5 Formules trigonométriques

Formules d'addition du cosinus et du sinus

Pour tous nombres réels a et b ,

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

Formules de duplication du cosinus et du sinus

Pour tout nombre réel θ ,

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & \sin(2\theta) &= 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ &= 1 - 2\sin^2(\theta) \\ &= 2\cos^2(\theta) - 1\end{aligned}$$

2.6 Fonctions trigonométriques réciproques

On rappelle les notations suivantes.

- Si $c \in [-1, 1]$, alors $\arccos(c)$ est l'unique nombre réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = c$.
- Si $s \in [-1, 1]$, alors $\arcsin(s)$ est l'unique nombre réel $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\theta) = s$.
- Si $t \in \mathbb{R}$, alors $\arctan(t)$ est l'unique nombre réel $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\theta) = t$.

Proposition 2.6.1 (Équations trigonométriques) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **Égalité de deux cosinus :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \cos(\alpha) \iff (x = \alpha \pmod{2\pi} \text{ ou } (x = -\alpha \pmod{2\pi}))$$

- **Égalité de deux sinus :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sin(\alpha) \iff (x = \alpha \pmod{2\pi} \text{ ou } (x = \pi - \alpha \pmod{2\pi}))$$

- **Égalité de deux tangentes :** si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \quad \tan(x) = \tan(\alpha) \iff x = \alpha \pmod{\pi}$$

2.7 Transformation de $a \cos(\theta) + b \sin(\theta)$ en $r \cos(\theta + \varphi)$

Pour obtenir cette **réduction**, on procède comme suit :

1. On commence par factoriser $a \cos(x) + b \sin(x)$ par $\sqrt{a^2 + b^2}$.
2. Cela a pour effet de faire apparaître les nombres $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ qui correspondent souvent à des valeurs remarquables de cosinus et de sinus.
3. On utilise les formules de sommes des cosinus et sinus pour conclure.

Exemple 2.7.1 On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = \sqrt{3}$.

Pour tout nombre réel x , on a :

$$\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(x) \right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = \sqrt{3} &\iff \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &\iff \left(\frac{\pi}{6} - x = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}\right) \text{ ou } \left(\frac{\pi}{6} - x = -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}\right) \\ &\iff (x = 0 \pmod{2\pi}) \text{ ou } \left(x = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}\right) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $2\pi\mathbb{Z} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3 Exercices

Exercice 1 (C1-C2-C3-C4)  Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes z suivants. On discutera suivant les valeurs des nombres réels α et β dans les questions 10. et 12.

1. $z = 7$
2. $z = -3$
3. $z = 3i$
4. $z = -1 + i\sqrt{3}$
5. $z = 2 - 2i$
6. $z = -4i$
7. $z = 1 - e^{i\frac{\pi}{4}}$
8. $z = e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}}$
9. $z = e^{i\alpha} + 1$
10. $z = e^{i\alpha} - e^{i\beta}$
11. $z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ en élevant préalablement le nombre complexe au carré
12. $z = \frac{e^{i\alpha} - 1}{ie^{i\beta} + 1}$ où ici $(\alpha, \beta) \in]0, 2\pi[\times]0, \frac{\pi}{2}[$ en justifiant d'abord que ce nombre complexe est bien défini

Exercice 2 (C2)  1. Pour tout entier naturel n , déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = (1 - i\sqrt{3})^n$.

2. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles z est un nombre réel.

Exercice 3 (C3-C7)  Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (d'inconnue z) :

1. $z^2 = 1 - \sqrt{3}i$
2. $z^2 = 1 + i$

Exercice 4 (C3)  1. Soit z un nombre complexe de module 1. Exprimer $\bar{z}$ en fonction de z .

2. Soient a, b et c trois nombres complexes de module 1 tels que $ac \neq -1$. Montrer que le nombre complexe $z = \frac{(c-b)(1+ab)}{b(1+ac)}$ est un imaginaire pur.

Exercice 5 (C1-C2-C3-C7)  On note j le nombre complexe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de j .
2. Calculer j^3 et $j^2 + j + 1$.
3. Vérifier que pour tout nombre complexe z , on a l'égalité :

$$(z+1)(z+j)(z+j^2) = (1+z)(1+jz)(1+j^2z)$$

4. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} j & j^2 \\ j & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 6 (C1-C3)  Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On veut montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(n\theta)$ est convergente et

calculer sa somme. Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \cos(k\theta)$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = \operatorname{Re}(T_n)$ où $T_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^k$.

2. (a) Démontrer que :

$$\frac{1}{2 - e^{i\theta}} = \frac{2 - e^{-i\theta}}{5 - 4\cos(\theta)}$$

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire la valeur de T_n puis établir que :

$$S_n = \frac{1}{5 - 4\cos(\theta)} \left(4 - 2\cos(\theta) - \frac{\cos((n+1)\theta)}{2^{n-1}} + \frac{\cos(n\theta)}{2^n} \right)$$

3. Conclure quant à la convergence de la série et à la valeur de sa somme.

Exercice 7 (C3-C7) 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que :

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2 \operatorname{Re}(a\bar{b})$$

2. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. Démontrer l'équivalence :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{\bar{a}} \right\}, \quad \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| < 1 \iff |z| < 1$$

Exercice 8 (C3-C8) 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(5x) = 0$.3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que :

$$\operatorname{Im}(e^{i5x}) = 5 \cos(x)^4 \sin(x) - 10 \cos(x)^2 \sin(x)^3 + \sin(x)^5$$

(b) Exprimer $\sin(5x)$ comme combinaison linéaire de puissances de $\sin(x)$.4. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.**Exercice 9 (C7)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

4. $-\cos(3t) + \sqrt{3}\sin(3t) = 1$

5. $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$

6. $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

7. $\sin(2t) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. $\cos(2\theta) + \sin(2\theta) > \sqrt{\frac{3}{2}}$

9. $\tan(x) \leq 1$

10. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -1$

11. $\cos(x) + \sin(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

12. $\cos(x)^2 - \frac{\sin(2x)}{2} = 0$

Exercice 10 (C6)

Les trois questions sont indépendantes.

1. Linéariser les expressions suivantes :

(a) $\sin(t)^4$

(b) $\cos(2t)\sin(3t)$

(c) $\cos(2t)\cos(t)^2$

(d) $\cos(t)^5$

2. Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos(x)^6$.3. Calculer l'intégrale $I = \int_0^\pi \sin(t) \cos(3t) dt$.