Lycée Louis Thuillier — Année 2025-2026
BCPST2B

Fiche de révision 5 - Correction
Équations différentielles

1 Compétences et notions à maîtriser

- ▷ C1 : Connaître le schéma de résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ou du second ordre (résoudre l'équation homogène associée puis trouver une solution particulière)
- ▷ C2 : Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants (la méthode de la variation de la constante permet de trouver une solution particulière)
- ▷ C3 : Résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre avec un second membre de la forme $\mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ ou $\cos(\alpha x)$ (ou $\sin(\alpha x)$)
- ▷ C4 : Utiliser le principe de superposition
- ▷ C5 : Savoir programmer la méthode d'Euler en langage `python` pour obtenir une approximation de la solution d'un problème de Cauchy

2 Correction des exercices

Exercice 1 (C1-C2) Résoudre les équations différentielles suivantes.

On note (E) chacune des équations différentielles et $\mathcal{S}_E$ l'ensemble de solutions associé.

Commentaire

La méthode de résolution d'une équation différentielle est toujours la même (pourvu qu'elle soit quand même linéaire du premier ou du second ordre bien sûr). Le point *délicat* est la recherche d'une solution particulière. On peut selon les cas :
- trouver une solution *évidente*
- pour le premier ordre, faire varier la constante ou utiliser l'indication de l'énoncé
- pour le second ordre, utiliser l'indication de l'énoncé

1. $y' + y = x + 1$ avec $y(0) = 1$ avec une solution particulière polynômiale de degré 1
   On note $(\mathcal{C})$ ce problème de Cauchy.
   L'équation différentielle (E) est linéaire du premier ordre. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + y = 0$ est $\left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-x} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$. On remarque qu'une solution particulière de (E) est $x \longmapsto x$.
   D'après le théorème fondamental, on peut conclure que :
   $$\mathcal{S}_E = \left\{ x \longmapsto x + C\,\mathrm{e}^{-x} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$$
   On sait que le problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ admet une unique solution. Soient $C \in \mathbb{R}$ et $y : x \longmapsto x + C\,\mathrm{e}^{-x}$. On résout :
   $$y(0) = 1 \iff C = 1$$
   Donc :
   $$\boxed{\text{la solution du problème de Cauchy } (\mathcal{C}) \text{ est la fonction } x \longmapsto x + \mathrm{e}^{-x}}$$

2. $y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}$ avec une solution particulière de la forme $x \mapsto axe^{2x}$, $a \in \mathbb{R}$
L'équation différentielle (E) est linéaire du premier ordre. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 2y = 0$ est :

$$\left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{2x} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y : x \longmapsto \alpha x\,\mathrm{e}^{2x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ (comme suggéré dans l'énoncé). La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) = \alpha(2x+1)\,\mathrm{e}^{2x}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) - 2y(x) = \mathrm{e}^{2x} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha(2x+1)\,\mathrm{e}^{2x} - 2\alpha x\,\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\,\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x} \\
&\iff \alpha = 1 \qquad\qquad (\text{car pour tout } x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{2x} \neq 0)
\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{2x}$. D'après le théorème fondamental, on peut conclure que :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{2x} + C\,\mathrm{e}^{2x} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}}$$

3. $y' + y = t^2 + t + 1$ avec une solution particulière polynômiale de degré 2
L'équation différentielle (E) est linéaire du premier ordre. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + y = 0$ est $\left\{ t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-t} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$.
On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y : t \longmapsto at^2 + bt + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y'(t) = 2at + b$$

Donc :

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) + y(t) = t^2 + t + 1 \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ 2at + b + at^2 + bt + c = t^2 + t + 1 \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ at^2 + (2a+b)t + (b+c) = t^2 + t + 1 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{c} a = 1 \\ 2a + b = 1 \\ b + c = 1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

par unicité des coordonnées du polynôme $X^2 + X + 1$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et donc :

$$y \text{ est solution de } (E) \iff \left\{ \begin{array}{c} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{array} \right.$$

Donc une solution particulière de (E) est $t \longmapsto t^2 - t + 2$. D'après le théorème fondamental, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{S_E = \left\{ t \longmapsto t^2 - t + 2 + C\,\mathrm{e}^{-t} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}}$$

4. $y' - \dfrac{t-1}{t} y = \mathrm{e}^{\,t}$ sur $]0, +\infty[$

L'équation différentielle (E) est linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée est :

$$y' - \frac{t-1}{t} y = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad y' - \left(1 - \frac{1}{t}\right) y = 0$$

Une primitive de la fonction $t \longmapsto -\left(1 - \dfrac{1}{t}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $t \longmapsto -(t - \ln(t))$. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\left\{ t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\,t-\ln(t)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \longmapsto C\,\frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

On cherche une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soit C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $y : t \longmapsto C(t)\dfrac{\mathrm{e}^{\,t}}{t}$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et quotient de fonctions qui le sont et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y'(t) = C'(t)\frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t} + C(t)\frac{t\,\mathrm{e}^{\,t} - \mathrm{e}^{\,t}}{t^2} = C'(t)\frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t} + C(t)\frac{(t-1)\,\mathrm{e}^{\,t}}{t^2}$$

donc :

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(t) - \frac{t-1}{t} y(t) = \mathrm{e}^{\,t} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(t)\frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t} + C(t)\frac{(t-1)\,\mathrm{e}^{\,t}}{t^2} - \frac{t-1}{t} \times C(t)\frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t} = \mathrm{e}^{\,t} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(t)\frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t} = \mathrm{e}^{\,t} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(t) = t \qquad\qquad (\text{car } \mathrm{e}^{\,t} \neq 0)
\end{aligned}$$

Par exemple $C : t \longmapsto \dfrac{t^2}{2}$ et donc une solution particulière de (E) est $t \longmapsto \dfrac{t\,\mathrm{e}^{\,t}}{2}$. D'après le théorème fondamental, on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ t \longmapsto \frac{t\,\mathrm{e}^{\,t}}{2} + C\,\frac{\mathrm{e}^{\,t}}{t} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}}$$

5. $y' + y = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{\,t}}$

L'équation différentielle (E) est linéaire du premier ordre. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + y = 0$ est $\left\{ t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\,-t} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$. Recherchons une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante. On considère une fonction de la forme $y : t \longmapsto C(t)\,\mathrm{e}^{\,-t}$ où C est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par produit, y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y'(t) = C'(t)\,\mathrm{e}^{\,-t} - C(t)\,\mathrm{e}^{\,-t}$$

donc :

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) + y(t) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\,t}} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ C'(t)\,\mathrm{e}^{\,-t} - C(t)\,\mathrm{e}^{\,-t} + C(t)\,\mathrm{e}^{\,-t} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\,t}} \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ C'(t) = \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{1 + \mathrm{e}^{\,t}} \qquad\qquad \text{car } \mathrm{e}^{\,-t} \neq 0
\end{aligned}$$

Par exemple $C : t \longmapsto \ln(1 + \mathrm{e}^{\,t})$. Une solution particulière de (E) est donc $t \longmapsto \ln(1 + \mathrm{e}^{\,t})\,\mathrm{e}^{\,-t}$. Finalement, d'après le théorème fondamental :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ t \longmapsto \ln(1 + \mathrm{e}^{\,t})\,\mathrm{e}^{\,-t} + C\,\mathrm{e}^{\,-t} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}}$$

6. $t\ln(t)y' - y = -\dfrac{1+\ln(t)}{t}$ sur $]1,+\infty[$

L'équation différentielle (E) est linéaire du premier ordre et est équivalente sur $]1,+\infty[$ à :

$$y' - \frac{1}{t\ln(t)}y = -\frac{1+\ln(t)}{t^2\ln(t)} \qquad \text{car } t\ln(t) \neq 0$$

Une primitive de la fonction $t \longmapsto -\dfrac{1}{t\ln(t)}$ sur $]1,+\infty[$ est $t \longmapsto -\ln(\ln(t))$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur $]1,+\infty[$ est :

$$\left\{t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{\ln(\ln(t))} \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t \longmapsto C\ln(t) \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}$$

On cherche une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soit $y : t \longmapsto C(t)\ln(t)$ où C est une fonction dérivable sur $]1,+\infty[$. La fonction y est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall t \in]1,+\infty[, \qquad y'(t) = C'(t)\ln(t) + \frac{C(t)}{t}$$

donc :

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in]1,+\infty[,\ t\ln(t)y'(t) - y(t) = -\frac{1+\ln(t)}{t} \\
&\iff \forall t \in]1,+\infty[,\ t\ln(t)^2C'(t) + \ln(t)C(t) - C(t)\ln(t) = -\frac{1+\ln(t)}{t} \\
&\iff \forall t \in]1,+\infty[,\ C'(t) = -\frac{1+\ln(t)}{(t\ln(t))^2}
\end{aligned}$$

Par exemple, $C : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ et donc $y : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$. D'après le théorème fondamental, l'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{t \longmapsto C\ln(t) + \frac{1}{t} \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}}$$

7. $xy' + (x-1)y = x^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$
L'équation différentielle (E) est linéaire du premier ordre et est équivalente sur $\mathbb{R}_+^*$ à :

$$y' + \left(1 - \frac{1}{x}\right) y = x^2 \qquad \text{(car } x \neq 0\text{)}$$

Une primitive de la fonction $x \longmapsto 1 - \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto x - \ln(x)$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) y = 0$ est donc :

$$\left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-x+\ln(x)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \longmapsto Cx\,\mathrm{e}^{-x} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

Cherchons une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soit $y : x \longmapsto C(x)x\,\mathrm{e}^{-x}$ où C est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y'(x) = C'(x)x\,\mathrm{e}^{-x} + C(x)(\mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x}) = C'(x)x\,\mathrm{e}^{-x} - C(x)(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$$

donc :

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xy'(x) + (x-1)y(x) = x^3 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x)x^2\,\mathrm{e}^{-x} - C(x)x(x-1)\,\mathrm{e}^{-x} + C(x)x(x-1)\,\mathrm{e}^{-x} = x^3 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ C'(x) = x\,\mathrm{e}^{x} \qquad \text{en divisant par } x^2\,\mathrm{e}^{-x} \neq 0
\end{aligned}$$

La primitive C de C' qui s'annule en 0 est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad C(x) = \int_0^x t\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et posons :

$$u(t) = t \qquad v'(t) = \mathrm{e}^{t}$$

et :

$$u'(t) = 1 \qquad v(t) = \mathrm{e}^{t}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, x]$ donc on peut intégrer par parties sur ce segment et on a :

$$C(x) = \Big[t\,\mathrm{e}^{t}\Big]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + 1$$

Ainsi, une solution particulière de (E) est $x \longmapsto x^2 - x + x\,\mathrm{e}^{-x}$. D'après le théorème fondamental, on peut conclure que :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ x \longmapsto x^2 - x + x\,\mathrm{e}^{-x} + Cx\,\mathrm{e}^{-x} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}}$$

8. $f' - f = \mathrm{e}^{-x} + \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}$. Pour traiter le second membre $\cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}$, on peut trouver une solution particulière de la forme $x \longmapsto (A\cos(x) + B\sin(x))\,\mathrm{e}^{-x}$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
L'équation différentielle (E) est linéaire du premier ordre. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ est $\left\{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{x} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$.
On remarque qu'une solution particulière de l'équation différentielle $y' - y = \mathrm{e}^{-x}$ est $x \longmapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$.
Recherchons maintenant une solution particulière de $y' - y = \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ (notée (E')) sous la forme :

$$y : x \longmapsto (A\cos(x) + B\sin(x))\,\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{où } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) &= (-A\sin(x) + B\cos(x))\,\mathrm{e}^{-x} - (A\cos(x) + B\sin(x))\,\mathrm{e}^{-x} \\
&= \big((B - A)\cos(x) + (-A - B)\sin(x)\big)\,\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

donc (on utilise le fait que $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E') &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) - y(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{-x} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (B - A)\cos(x) + (-A - B)\sin(x) - A\cos(x) - B\sin(x) = \cos(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (B - 2A - 1)\cos(x) + (-A - 2B)\sin(x) = 0 \qquad (1) \\
&\iff B - 2A - 1 = 0 \text{ et } -A - 2B = 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

En effet, l'implication $(21) \implies (20)$ est claire tandis que $(20) \implies (21)$ s'obtient en choisissant (par exemple) $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$. Ensuite :

$$\begin{cases} B - 2A = 1 \\ -A - 2B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} B = \frac{1}{5} \\ A = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Une solution particulière de (E') est donc $x \longmapsto \left(-\dfrac{2\cos(x)}{5} + \dfrac{\sin(x)}{5}\right)\mathrm{e}^{-x}$. D'après le principe de superposition, une solution de (E) est donc $x \longmapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2} + \left(-\dfrac{2\cos(x)}{5} + \dfrac{\sin(x)}{5}\right)\mathrm{e}^{-x}$. Finalement, d'après le théorème fondamental :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{x \longmapsto -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} + \left(-\frac{2\cos(x)}{5} + \frac{\sin(x)}{5}\right)\mathrm{e}^{-x} + C\,\mathrm{e}^{x} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$$

Exercice 2 (C1-C2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation différentielles suivantes.

On note (E) chacune des équations différentielles et $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions associé.

1. $y'' - 4y' + 3y = x^2 \,\mathrm{e}^x$. Solution particulière $y : x \longmapsto x(ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^x$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

   L'équation différentielle (E) est linéaire du second ordre. L'équation homogène $y'' - 4y' + 3y = 0$ admet pour équation caractéristique $x^2 - 4x + 3 = 0$ dont les racines sont 1 et 3. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\left\{ x \longmapsto A\,\mathrm{e}^x + B\,\mathrm{e}^{3x} \,\middle|\, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

   On cherche une solution particulière de (E) sous la forme :

$$y : x \longmapsto x(ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^x \qquad \text{où } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

   La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$y'(x) = (ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + c)x + c)\,\mathrm{e}^x$$

   et :

$$y''(x) = (ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b + c)x + 2b + 2c)\,\mathrm{e}^x$$

   et donc (puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \neq 0$ et par unicité des coordonnées du polynôme X^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ à la quatrième équivalence) :

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = x^2\,\mathrm{e}^x \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b + c)x + 2b + 2c - 4ax^3 - (12a + 4b)x^2 \\
&\qquad\qquad - (8b + 4c)x - 4c + 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx = x^2 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -6ax^2 + (6a - 4b)x + (2b - 2c) = x^2 \\
&\iff \begin{cases} -6a = 1 \\ 6a - 4b = 0 \\ 2b - 2c = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = -\frac{1}{4} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

   Donc une solution particulière de (E) est $x \longmapsto \left(\dfrac{-x^3}{6} - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{4} \right) \mathrm{e}^x$. D'après le théorème fondamental, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ x \longmapsto \left(\frac{-x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \right) \mathrm{e}^x + A\,\mathrm{e}^x + B\,\mathrm{e}^{3x} \,\middle|\, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

2. $y''+y'-6y=1+(2x+1)\,\mathrm{e}^{x}$. Solution particulière de $y''+y'-6y=(2x+1)\,\mathrm{e}^{x}$ sous la forme $y:x\longmapsto(ax+b)\,\mathrm{e}^{x}$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

L'équation différentielle (E) est linéaire du second ordre. L'équation homogène $y''+y'-6y=0$ admet pour équation caractéristique $x^2+x-6=0$ dont les racines sont 2 et -3. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc :

$$\left\{x\longmapsto A\,\mathrm{e}^{2x}+B\,\mathrm{e}^{-3x}\,\middle|\,(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Une solution particulière de $y''+y'-6y=1$ est $x\longmapsto\dfrac{-1}{6}$.

Recherchons une solution particulière de $y''+y'-6y=(2x+1)\,\mathrm{e}^{x}$ (notée (E')) sous la forme $y:x\longmapsto(ax+b)\,\mathrm{e}^{x}$ où $(A,B)\in\mathbb{R}^2$. La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad y'(x)=(ax+a+b)\,\mathrm{e}^{x}\qquad\text{et}\qquad y''(x)=(ax+2a+b)\,\mathrm{e}^{x}$$

donc (puisque $\mathrm{e}^{x}\neq0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et par unicité des coordonnées du polynôme $2X+1$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ à la quatrième équivalence) :

$$\begin{aligned}
y\text{ est solution de }(E')&\iff\forall x\in\mathbb{R},\ y''(x)+y'(x)-6y(x)=(2x+1)\,\mathrm{e}^{x}\\
&\iff\forall x\in\mathbb{R},\ ax+2a+b+ax+a+b-6ax-6b=2x+1\\
&\iff\forall x\in\mathbb{R},\ -4ax+(3a-4b)=2x+1\\
&\iff\left\{\begin{array}{r}-4a=2\\3a-4b=1\end{array}\right.\\
&\iff\left\{\begin{array}{l}a=-\frac{1}{2}\\b=-\frac{5}{8}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E') est donc $x\longmapsto\left(-\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{8}\right)\mathrm{e}^{x}$. D'après le principe de superposition, une solution particulière de (E) est donc $x\longmapsto-\dfrac{1}{6}+\left(-\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{8}\right)\mathrm{e}^{x}$.

Finalement, d'après le théorème fondamental, on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_E=\left\{x\longmapsto-\frac{1}{6}+\left(-\frac{x}{2}-\frac{5}{8}\right)\mathrm{e}^{x}+A\,\mathrm{e}^{2x}+B\,\mathrm{e}^{-3x}\,\middle|\,(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}}$$

3. $y''-4y'+4y=(x-1)\,\mathrm{e}^{2x}$. Solution particulière $y : x \longmapsto x^2(ax+b)\,\mathrm{e}^{2x}$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$
L'équation différentielle (E) est linéaire du second ordre. L'équation homogène $y''-4y'+4y=0$ admet pour équation caractéristique $x^2-4x+4=0$. Cette équation admet 2 pour racine réelle double. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\left\{x \longmapsto (Ax+B)\,\mathrm{e}^{2x} \,\middle|\, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme :

$$y : x \longmapsto \underbrace{x^2(ax+b)}_{=ax^3+bx^2}\,\mathrm{e}^{2x} \qquad \text{où } (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$y'(x)=(2ax^3+(3a+2b)x^2+2bx)\,\mathrm{e}^{2x} \qquad \text{et} \qquad y''(x)=(4ax^3+(12a+4b)x^2+(6a+8b)x+2b)\,\mathrm{e}^{2x}$$

Donc (en utilisant le fait que $\mathrm{e}^{2x}\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ à la deuxième équivalence) :

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ y''(x)-4y'(x)+4y(x)=(x-1)\,\mathrm{e}^{2x}\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 4ax^3+(12a+4b)x^2+(6a+8b)x+2b-8ax^3-(12a+8b)x^2\\
&\qquad\qquad -8bx+4ax^3+4bx^2=x-1\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R},\ 6ax+2b=x-1\\
&\iff 6aX+2b=X-1\\
&\iff \begin{cases} 6a=1\\ 2b=-1\end{cases} \qquad \text{car la famille } (1,X) \text{ est libre}\\
&\iff \begin{cases} a=\frac{1}{6}\\ b=-\frac{1}{2}\end{cases}
\end{aligned}$$

Une solution particulière de (E) est donc $x\longmapsto \left(\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$. Finalement, on a d'après le théorème fondamental :

$$\boxed{\mathcal{S}_E=\left\{x\longmapsto \left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}+(Ax+B)\,\mathrm{e}^{2x} \,\middle|\, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}}$$

4. $y''+6y'+9y=x^2+\mathrm{e}^{-3x}$. Solution particulière de l'équation différentielle $y''+6y'+9y=x^2$ sous la forme $y : x\longmapsto ax^2+bx+c$ où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Solution particulière de l'équation différentielle $y''+6y'+9y=\mathrm{e}^{-3x}$ sous la forme $y : x\longmapsto ax^2\,\mathrm{e}^{-3x}$ où $a\in\mathbb{R}$
L'équation différentielle (E) est linéaire du second ordre d'équation homogène $y''+6y'+9y=0$. L'équation caractéristique associée $x^2+6x+9=0$ admet pour racine double $x=-3$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\left\{x\longmapsto (Ax+B)\,\mathrm{e}^{-3x} \,\middle|\, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Il reste à trouver une solution particulière.

- **Solution particulière de l'équation différentielle $y''+6y'+9y=x^2$.**
On cherche une solution particulière sous la forme $y : x\longmapsto ax^2+bx+c$ où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On trouve (...) $a=\dfrac{1}{9}$, $b=-\dfrac{4}{27}$ et $c=\dfrac{2}{27}$.
- **Solution particulière de l'équation différentielle $y''+6y'+9y=\mathrm{e}^{-3x}$.**
On cherche une solution particulière sous la forme $y : x\longmapsto ax^2\,\mathrm{e}^{-3x}$ où $a\in\mathbb{R}$. On trouve (...) $a=\dfrac{1}{2}$.

D'après le principe de superposition, une solution particulière de (E) est donc la fonction :

$$x\longmapsto \frac{x^2}{9}-\frac{4x}{27}+\frac{2}{27}+\frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-3x}$$

D'après le théorème fondamental, l'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_E=\left\{x\longmapsto \frac{x^2}{9}-\frac{4x}{27}+\frac{2}{27}+\frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-3x}+(Ax+B)\,\mathrm{e}^{-3x} \,\middle|\, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}}$$

5. $\left\{\begin{array}{c} y'' + 4y = \sin(x) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{array}\right.$. Solution particulière $y : x \longmapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Notons $(\mathcal{C})$ ce problème de Cauchy.

L'équation différentielle (E) est linéaire du second ordre. L'équation homogène $y'' + 4y = 0$ admet pour équation caractéristique $x^2 + 4 = 0$ dont les racines (complexes conjuguées distinctes) sont $-2\,\mathrm{i}$ et $2\,\mathrm{i}$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc :

$$\left\{ x \longmapsto A\cos(2x) + B\sin(2x) \,\middle|\, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $y : x \longmapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x) \qquad \text{et} \qquad y''(x) = -A\cos(x) - B\sin(x)$$

donc :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + 4y(x) = \sin(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -A\cos(x) - B\sin(x) + 4A\cos(x) + 4B\sin(x) = \sin(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 3A\cos(x) + 3B\sin(x) = \sin(x) \qquad (3) \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} 3A = 0 \\ 3B = 1 \end{array}\right. \qquad (4) \end{aligned}$$

En effet, l'implication $(23) \implies (22)$ est claire tandis que $(22) \implies (23)$ s'obtient (par exemple) en choisissant $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, une solution particulière de (E) est $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{3}$. Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est, d'après le théorème fondamental,

$$\mathcal{S}_E = \left\{ x \longmapsto \frac{\sin(x)}{3} + A\cos(2x) + B\sin(2x) \,\middle|\, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Soient $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$y : x \longmapsto \frac{\sin(x)}{3} + A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) = \frac{\cos(x)}{3} - 2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$

et donc $y'(0) = \dfrac{1}{3} + 2B$. On résout :

$$\left\{\begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = -\frac{1}{6} \end{array}\right.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{la solution du problème de Cauchy } (\mathcal{C}) \text{ est } x \longmapsto \frac{\sin(x)}{3} + \cos(2x) - \frac{\sin(2x)}{6}}$$

6. $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega x)$ ou $\omega > 0$. Solution particulière $y : x \longmapsto x\big(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\big)$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$
L'équation différentielle (E) est linéaire du second ordre d'équation homogène $y'' + \omega^2 y = 0$. L'équation caractéristique associée $x^2 + \omega^2 = 0$ admet deux racines complexes : $-\mathrm{i}\,\omega$ et $\mathrm{i}\,\omega$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc :

$$\left\{ x \longmapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme :

$$y : x \longmapsto x\big(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\big) \qquad \text{où } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$y'(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) + x\big(-A\omega\sin(\omega x) + B\omega\cos(\omega x)\big)$$

et

$$y''(x) = -2A\omega\sin(\omega x) + 2B\omega\cos(\omega x) + x\big(-A\omega^2\cos(\omega x) - B\omega^2\sin(\omega x)\big)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + \omega^2 y(x) = \cos(\omega x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -2A\omega\sin(\omega x) + 2B\omega\cos(\omega x) + x\big(-A\omega^2\cos(\omega x) - B\omega^2\sin(\omega x)\big) \\
&\qquad\qquad + x\big(A\omega^2\cos(\omega x) + B\omega^2\sin(\omega x)\big) = \cos(\omega x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ -2A\omega\sin(\omega x) + 2B\omega\cos(\omega x) = \cos(\omega x) \\
&\iff \begin{cases} -2A\omega = 0 \\ 2B\omega = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

L'équivalence s'obtient en choisissant par exemple $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.
Une solution particulière de (E) est donc $x \longmapsto \dfrac{x\sin(\omega x)}{2\omega}$. Finalement, d'après le théorème fondamental, on peut conclure que :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ x \longmapsto \frac{x\sin(\omega x)}{2\omega} + A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

7. $\dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}^2 t} - 3\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 2x(t) = 3$
L'équation différentielle (E) est linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation homogène est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}^2 t} - 3\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 2x(t) = 0$$

d'équation caractéristique associée $x^2 - 3x + 2 = 0$ dont les racines sont 1 et 2. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\left\{ t \longmapsto A\,\mathrm{e}^{t} + B\,\mathrm{e}^{2t} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Une solution particulière de (E) est $t \longmapsto \dfrac{3}{2}$ donc, d'après le théorème fondamental, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ t \longmapsto \frac{3}{2} + A\,\mathrm{e}^{t} + B\,\mathrm{e}^{2t} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Exercice 3 (C1) On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$t^2\,\mathrm{P}''(t)+3t\mathrm{P}'(t)+\mathrm{P}(t)=\frac{1}{t} \tag{E}$$

où P est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soit P une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on pose $\mathrm{Q}(t)=\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\,t})$. Montrer que P est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si Q est solution d'une équation différentielle à coefficients constants (E') sur $\mathbb{R}$ à déterminer.
La fonction P est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction Q est donc deux fois dérivable en tout $t\in\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{\,t}\in\mathbb{R}_+^*$, ce qui est toujours vrai. La fonction Q est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad \mathrm{Q}'(t)=\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{P}'(\mathrm{e}^{\,t})\qquad \text{et}\qquad \mathrm{Q}''(t)=\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{P}'(\mathrm{e}^{\,t})+\mathrm{e}^{\,2t}\,\mathrm{P}''(\mathrm{e}^{\,t})$$

Comme la fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a (en posant $x=\mathrm{e}^{\,t}$) :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ x^2\,\mathrm{P}'(x)+3x\mathrm{P}''(x)+\mathrm{P}(x)=\frac{1}{x} &\iff \forall t\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\,2t}\,\mathrm{P}''(\mathrm{e}^{\,t})+3\,\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{P}''(\mathrm{e}^{\,t})+\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\,t})=\mathrm{e}^{\,-t}\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R},\ \underbrace{\mathrm{e}^{\,2t}\,\mathrm{P}''(\mathrm{e}^{\,t})+\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{P}'(\mathrm{e}^{\,t})}_{=\mathrm{Q}''(t)}+\underbrace{2\,\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{P}'(\mathrm{e}^{\,t})}_{=2\,\mathrm{Q}'(t)}+\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\,t})}_{=\mathrm{Q}(t)}=\mathrm{e}^{\,-t}\\ &\iff \forall t\in\mathbb{R},\ \mathrm{Q}''(t)+2\,\mathrm{Q}'(t)+\mathrm{Q}(t)=\mathrm{e}^{\,-t}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{P est solution de } (E') \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ si et seulement si } \mathrm{Q}''+2\,\mathrm{Q}'+\mathrm{Q}=\mathrm{e}^{\,-t}\ (\text{pour } t\in\mathbb{R})}$$

2. Résoudre l'équation différentielle (E') en cherchant une solution particulière sous la forme $t\mapsto\lambda t^2e^{-t}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
Résolvons l'équation différentielle $y''+2y'+y=\mathrm{e}^{\,-t}$ sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée $y''+2y'+y=0$ a pour équation caractéristique $x^2+2x+1=0$. Celle-ci admet pour racine double -1. Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\left\{t\longmapsto(At+B)\,\mathrm{e}^{\,-t}\,\middle|\,(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Cherchons maintenant une solution particulière sous la forme $y:t\longmapsto\lambda t^2\,\mathrm{e}^{\,-t}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$. La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad y'(t)=\lambda(-t^2+2t)\,\mathrm{e}^{\,-t}\qquad\text{et}\qquad y''(t)=\lambda(t^2-4t+2)\,\mathrm{e}^{\,-t}$$

et donc (comme $\mathrm{e}^{\,-t}\neq 0$), on a :

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R},\ y''(t)+2y'(t)+y(t)=\mathrm{e}^{\,-t} &\iff \lambda(t^2-4t+2)+2\lambda(-t^2+2t)+\lambda t^2=1\\ &\iff 2\lambda=1\\ &\iff \lambda=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, $y:t\longmapsto\dfrac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{\,-t}$ est solution particulière (E'). L'ensemble des solutions de (E') est donc (d'après le théorème fondamental) :

$$\left\{t\longmapsto\frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{\,-t}+(At+B)\,\mathrm{e}^{\,-t}\,\middle|\,(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Or, avec les notations de la question 1., on sait que P est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si Q est solution de (E') sur $\mathbb{R}$. De plus, $\mathrm{P}=\mathrm{Q}\circ\ln$ donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est } \left\{t\longmapsto\frac{\ln(t)^2}{2t}+\frac{A\ln(t)+B}{t}\,\middle|\,(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}}$$

car pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\mathrm{e}^{\,-\ln(t)}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,\ln(t)}}=\dfrac{1}{t}$.

3. Montrer qu'il n'existe qu'une unique solution de (E) vérifiant $\mathrm{P}(1) = \mathrm{P}'(1) = 0$.
Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{P} : t \longmapsto \dfrac{\ln(t)^2}{2t} + \dfrac{A\ln(t) + B}{t}$. On a $\mathrm{P}(1) = B$. La fonction P est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \mathrm{P}'(t) = \frac{2\ln(t) - \ln(t)^2}{2t^2} + \frac{A - A\ln(t) - B}{t^2}$$

et donc $\mathrm{P}'(1) = A - B$. Ainsi $\mathrm{P}(1) = \mathrm{P}'(1) = 0$ si et seulement si $A = B = 0$. Finalement :

$$\boxed{\text{il n'existe donc bien qu'une seule solution au problème de Cauchy : la fonction } \mathrm{P} : t \longmapsto \frac{\ln(t)^2}{2t}}$$

Exercice 4 (C1) On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ suivante :

$$x^2y'' + xy' - y = 0 \qquad (E)$$

1. Montrer que (E) admet l'identité comme solution particulière.
Notons $f : x \longmapsto x$ la fonction identité sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad f''(x) = 0$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2f''(x) + xf'(x) - f(x) = x - x = 0$$

Donc :

$$\boxed{\text{la fonction identité est une solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

2. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = xz(x)$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ à déterminer.
La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par quotient, la fonction z est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) = z(x) + xz'(x) \qquad \text{et} \qquad y''(x) = 2z'(x) + xz''(x)$$

donc :

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2x^2z'(x) + x^3z''(x) + xz(x) + x^2z'(x) - xz(x) = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xz''(x) + 3z'(x) = 0 \quad \text{car } x^2 \neq 0
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{y \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement si } xz'' + 3z' = 0}$$

3. Résoudre (E') puis en déduire l'ensemble des solutions de (E).
Résolvons l'équation différentielle $xz'' + 3z' = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ notée (E'). Résolvons d'abord l'équation différentielle $xf' + 3f = 0$ (notée (E'')) qui est équivalente à $f' + \dfrac{3}{x} f = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $x \neq 0$). Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{3}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto 3\ln(x)$ donc l'ensemble des solutions de (E'') est :

$$\left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-3\ln(x)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \longmapsto \frac{C}{x^3} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}$$

Ainsi, si z est une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de } (E') &\iff z' \text{ est solution de } (E'') \\ &\iff \exists\, C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z'(x) = \frac{C}{x^3} \\ &\iff \exists\, (C, D) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z(x) = -\frac{C}{2x^2} + D \end{aligned}$$

En posant $y : x \longmapsto xz(x)$ comme dans la question 2., on a donc :

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de } (E) &\iff \exists\, (C, D) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z(x) = -\frac{C}{2x^2} + D \\ &\iff \exists\, (C, D) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = -\frac{C}{2x} + Dx \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \left\{ x \longmapsto -\frac{C}{2x} + Dx \,\middle|\, (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Exercice 5 (C1-C2) On note E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^{x}$$

1. Soit $f \in E$. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par f.
Soit $f \in E$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \mathrm{e}^{x} - f(-x)$. Les fonctions f et $x \longmapsto -x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction $x \longmapsto f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par différence, la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a (en utilisant l'hypothèse) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) - f'(-x) = \mathrm{e}^{x} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$$

puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(-x) = \mathrm{e}^{-x} - f(x)$.

2. En déduire l'ensemble E.
On résout l'équation différentielle $y''+y=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y''+y=0$ est :

$$\left\{x \longmapsto A\cos(x)+B\sin(x) \,\middle|\, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

car l'équation caractéristique $x^2+1=0$ a pour racines $\pm$ i.
On remarque qu'une solution particulière de $y''+y=\mathrm{e}^{x}$ est $x\longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2}$ tandis qu'une solution particulière de $y''+y=\mathrm{e}^{-x}$ est $x\longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$. D'après le principe de superposition, une solution particulière de l'équation différentielle de départ est $x\longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$. D'après le théorème fondamental, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$\left\{x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}+A\cos(x)+B\sin(x) \,\middle|\, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

On sait maintenant d'après la question 1. que tout élément de E est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+y=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$. On a donc l'inclusion :

$$E\subset\left\{x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}+A\cos(x)+B\sin(x) \,\middle|\, (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Étudions l'inclusion réciproque. Soient $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ et $f: x\longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}+A\cos(x)+B\sin(x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f'(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}-A\sin(x)+B\cos(x)$$

donc :

$$\begin{aligned}
f\in E &\iff \forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)+f(-x)=\mathrm{e}^{x}\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R},\ \frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}-A\sin(x)+B\cos(x)+\frac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}{2}+A\cos(x)-B\sin(x)=\mathrm{e}^{x}\\
&\iff \forall x\in\mathbb{R},\ (A+B)\cos(x)+(-A-B)\sin(x)=0\\
&\iff A+B=0
\end{aligned}$$

En effet, la proposition de l'avant-dernière équivalence implique, en choisissant $x=0$ que $A+B=0$. Réciproquement, si $A+B=0$, alors cette proposition est vraie. On peut donc conclure que :

$$\boxed{E=\left\{x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}+A(\cos(x)-\sin(x)) \,\middle|\, A\in\mathbb{R}\right\}}$$

Exercice 6 (C1, oral Agro-Véto 2012) Pour tout entier naturel n, on considère l'équation différentielle :

$$(n+1)y'' + (2n+1)y' + ny = 0 \tag{E_n}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'unique solution de (E_n) telle que $f_n(0) = 1$ et $f_n'(0) = 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. L'équation différentielle (E_n) est linéaire du second ordre (car $n+1 \neq 0$), à coefficients constants et homogène. L'équation caractéristique associée est $(n+1)x^2 + (2n+1)x + n = 0$ et son discriminant vaut :

$$\Delta = (2n+1)^2 - 4n(n+1) = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 4n = 1 > 0$$

   On a donc deux racines réelles distinctes qui sont -1 et $-\dfrac{n}{n+1}$. L'ensemble des solutions de (E_n) est donc :

$$\left\{ x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{-\frac{n}{n+1}x} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

   On sait que le problème de Cauchy proposé admet une unique solution f_n. Il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_n : x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{-x} + B\,\mathrm{e}^{-\frac{n}{n+1}x}$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n'(x) = -A\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{Bn}{n+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{n}{n+1}x}$$

   donc en particulier $f_n'(0) = -A - \dfrac{Bn}{n+1}$. On résout :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A + B = 1 & & \mathrm{L}_1 \\ -A - \frac{Bn}{n+1} = 0 & & \mathrm{L}_2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} A + B = 1 & \mathrm{L}_1 \\ \frac{B}{n+1} = 1 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} A = -n \\ B = n+1 \end{array} \right.$$

   Finalement :

$$\boxed{\text{la solution cherchée est la fonction } f_n : x \longmapsto -n\,\mathrm{e}^{-x} + (n+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{n}{n+1}x}}$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists!\, x_n \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x_n) = 0$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   - La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
   - Étudions les variations de f_n sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n'(x) = n\,\mathrm{e}^{-x} - n\,\mathrm{e}^{-\frac{n}{n+1}x} = n\,\mathrm{e}^{-x}\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{x}{n+1}}\right)$$

     Or on sait que :

$$\forall y \in]-\infty, 0[, \qquad 1 - \mathrm{e}^{y} > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall y \in]0, +\infty[, \qquad 1 - \mathrm{e}^{y} < 0 \qquad (\text{et } 1 - \mathrm{e}^{0} = 0)$$

     Comme $\dfrac{1}{n+1} > 0$ et $n\,\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in]-\infty, 0[, \qquad f_n'(x) > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]0, +\infty[, \qquad f_n'(x) < 0 \qquad (\text{et } f_n'(0) = 0)$$

     Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Comme $\dfrac{n}{n+1} > 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{n+1}} = 0$. De plus :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(-n\,\mathrm{e}^{-x} + (n+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{n}{n+1}x}\right) &= \lim_{x\to+\infty} (n+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{n}{n+1}x}\left(1 - \frac{n}{n+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{n+1}}\right)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} n(n+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{n}{n+1}x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{n}{n+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{n+1}}\right) = -\infty$.

- On a $0 \in f_n(]-\infty,0]) =]-\infty,1]$ donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty,0]$ d'après le théorème de la bijection. Par ailleurs, la fonction f_n est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ et a pour limite 0 en $+\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a donc $f_n(x) > 0$ ce qui implique que $f_n(x) \neq 0$.

Finalement :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe un unique nombre réel } x_n \text{ tel que } f_n(x_n) = 0}$$

3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $f_n(x_n) = 0$ donc $-n\,\mathrm{e}^{-x_n} + (n+1)\,\mathrm{e}^{-\frac{n}{n+1}x_n} = 0$ et donc $\dfrac{n}{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{x_n}{n+1}}$ puis $\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{x_n}{n+1}$ et enfin $x_n = (n+1)\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n = (n+1)\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n+1} = 0$, on a $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n+1}$ puis, par produit, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$. On en déduit donc que :

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente de limite } -1}$$

Commentaire

Comme on arrive à trouver l'expression de x_n en fonction de n, cela implique que l'on pouvait répondre à la question 2. en résolvant directement l'équation $f_n(x) = 0$...

Exercice 7 (C1, oral Agro-Véto 2013) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'''(x) - af''(x) - f'(x) + af(x) = 0$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel.
Montrons que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Comme l'équation différentielle est homogène, la fonction nulle appartient à $\mathcal{S}$. En effet :

$$0'_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} = 0''_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} = 0'''_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

et donc :

$$0'''_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} - a0''_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} - 0'_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} + a0_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in \mathcal{S}^2$. Montrons que $\lambda f + g \in \mathcal{S}$. Par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned}(\lambda f+g)''' - a(\lambda f+g)'' - (\lambda f+g)' + a(\lambda f+g) &= \lambda f''' + g''' - \lambda af'' - ag'' + \lambda af + ag\\ &= \lambda(f''' - af'' - f' + af) + (g''' - ag'' - g' + ag)\\ &= \lambda \times 0_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} + 0_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} \quad \text{car } (f,g) \in \mathcal{S}^2\\ &= 0_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ce qui implique que :

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ est un espace vectoriel}}$$

2. Montrer que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$ appartient à $\mathcal{S}$.
Notons f_a la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_a^{(n)}(x) = a^n\,\mathrm{e}^{ax}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_a'''(x) - af_a''(x) - f_a'(x) + af_a(x) = a^3\,\mathrm{e}^{ax} - a^3\,\mathrm{e}^{ax} - a\,\mathrm{e}^{ax} + a\,\mathrm{e}^{ax} = 0$$

Donc $\boxed{\text{la fonction } f_a \text{ appartient à } \mathcal{S}}$.

3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{-ax} f(x)$. Montrer que $f \in \mathcal{S}$ si et seulement si g' est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à déterminer.
Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{-ax} f(x)$. Par produit, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \mathrm{e}^{ax} g(x)$ puis :

$$f'(x) = a\,\mathrm{e}^{ax} g(x) + \mathrm{e}^{ax} g'(x), \qquad f''(x) = a^2\,\mathrm{e}^{ax} g(x) + 2a\,\mathrm{e}^{ax} g'(x) + \mathrm{e}^{ax} g''(x)$$

et :

$$f'''(x) = a^3\,\mathrm{e}^{ax} g(x) + 3a^2\,\mathrm{e}^{ax} g'(x) + 3a\,\mathrm{e}^{ax} g''(x) + \mathrm{e}^{ax} g'''(x)$$

Donc :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{S} &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f'''(x) - af''(x) - f'(x) + af(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ a^3\,\mathrm{e}^{ax} g(x) + 3a^2\,\mathrm{e}^{ax} g'(x) + 3a\,\mathrm{e}^{ax} g''(x) + \mathrm{e}^{ax} g'''(x) - a^3\,\mathrm{e}^{ax} g(x) - 2a^2\,\mathrm{e}^{ax} g'(x) \\ &\qquad\qquad - a\,\mathrm{e}^{ax} g''(x) - a\,\mathrm{e}^{ax} g(x) - \mathrm{e}^{ax} g'(x) + a\,\mathrm{e}^{ax} g(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{ax} g'''(x) + 2a\,\mathrm{e}^{ax} g''(x) + (a^2-1)\,\mathrm{e}^{ax} g'(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ g'''(x) + 2ag''(x) + (a^2-1)g'(x) = 0 \end{aligned}$$

car $\mathrm{e}^{ax} \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Finalement :

$$\boxed{f \in \mathcal{S} \text{ si et seulement si } g' \text{ est solution de l'équation différentielle } y'' + 2ay' + (a^2-1)y = 0}$$

4. En déduire une base de $\mathcal{S}$.
Notons (E) l'équation différentielle $y''+2ay'+(a^2-1)y = 0$. Elle est linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$ a pour discriminant 4 donc celle-ci admet deux racines réelles distinctes qui sont $-a-1$ et $-a+1$. L'ensemble $\mathcal{T}$ des solutions de (E) est donc :

$$\mathcal{T} = \left\{ x \longmapsto A\,\mathrm{e}^{(-a-1)x} + B\,\mathrm{e}^{(-a+1)x} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Déduisons-en l'ensemble $\mathcal{S}$. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{-ax} f(x)$. En utilisant la question 3., on a :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{S} &\iff g' \in \mathcal{T} \\ &\iff \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = A\,\mathrm{e}^{(-a-1)x} + B\,\mathrm{e}^{(-a+1)x} \\ &\iff \exists\,(A,B,C) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -A\frac{\mathrm{e}^{(-a-1)x}}{a+1} + B\frac{\mathrm{e}^{(-a+1)x}}{1-a} + C \qquad \text{car } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \\ &\iff \exists\,(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{-x} + \beta\,\mathrm{e}^{x} + \gamma\,\mathrm{e}^{ax} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \left\{ x \longmapsto \alpha\,\mathrm{e}^{-x} + \beta\,\mathrm{e}^{x} + \gamma\,\mathrm{e}^{ax} \,\middle|\, (A,B,C) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Notons $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$, $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ et $h : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$. Alors on a $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(f,g,h)$. La famille (f,g,h) engendre donc l'espace vectoriel $\mathcal{S}$. Étudions sa liberté. Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que :

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = 0_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} \tag{5}$$

Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On évalue (1) en 0, on dérive ensuite (1) une fois, puis deux fois, et pour les deux équations obtenues on évalue en 0. On obtient le système formée des trois équations :

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \qquad -\alpha + \beta + a\gamma = 0, \qquad \alpha + \beta + a^2\gamma = 0$$

qui conduit à $(\alpha,\beta,\gamma) = (0,0,0)$ en utilisant de manière essentielle le fait que $a^2 \neq 1$. Bref :

$$\boxed{\text{une base de } \mathcal{S} \text{ est } (f,g,h) \text{ où } f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x},\ g : x \longmapsto \mathrm{e}^{x} \text{ et } h : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}}$$

Exercice 8 (C1) On considère l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 2y = 2x^2 \tag{E}$$

1. Résoudre (E) et déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.
L'équation différentielle (E) est linéaire du second ordre. L'équation homogène associée est $y'' - 2y' + 2y = 0$. Son équation caractéristique $x^2 - 2x + 2 = 0$ admet deux racines complexes conjuguées distinctes qui sont $1 - \mathrm{i}$ et $1 + \mathrm{i}$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\left\{ x \longmapsto (A\cos(x) + B\sin(x))\,\mathrm{e}^{x} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Déterminons une solution particulière y de (E) sous la forme $y : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) = 2ax + b \qquad \text{et} \qquad y''(x) = 2a$$

Donc (on utilise l'unicité des coordonnées du polynôme $2X^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ à la quatrième équivalence) :

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 2x^2 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2a - 2(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^2 + (2b - 4a) + 2(a - b + c) = 2x^2 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{c} a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ a - b + c = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc une solution particulière de (E) est $x \longmapsto x^2 + 2x + 1$. D'après le théorème fondamental, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ x \longmapsto x^2 + 2x + 1 + (A\cos(x) + B\sin(x))\,\mathrm{e}^{x} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On sait que le problème de Cauchy proposé admet une unique solution. Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$y : x \longmapsto x^2 + 2x + 1 + (A\cos(x) + B\sin(x))\,\mathrm{e}^{x}$$

On a $y(0) = 1 + A$. De plus, y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) = 2x + 2 + \big((A+B)\cos(x) + (B-A)\sin(x)\big)\,\mathrm{e}^{x} \qquad \text{donc} \qquad y'(0) = 2 + A + B$$

donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} A + 1 = 1 \\ A + B + 2 = 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 1 \end{array} \right.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{la solution du problème de Cauchy proposé est } f : x \longmapsto x^2 + 2x + 1 + \sin(x)\,\mathrm{e}^{x}}$$

2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = f^{(n)}(0)$$

est bien définie puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}, \qquad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions qui le sont. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$ admet donc une dérivée $n^{\text{ème}}$ sur $\mathbb{R}$ ce qui implique que $f^{(n)}(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $f^{(n)}(0) = u_n$ est bien défini. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie.
On sait de plus que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 2x^2 \tag{6}$$

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut dériver (autant de fois qu'on veut) cette égalité et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n+2)}(x) - 2f^{(n+1)}(x) + 2f^{(n)}(x) = 0$$

car les dérivées d'un polynôme de degré deux sont nulles à partir de la dérivée troisième. En évaluant en 0, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}, \qquad f^{(n+2)}(0) - 2f^{(n+1)}(0) + 2f^{(n)}(0) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}, \qquad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n}$$

3. Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n.
La suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est récurrente linéaire d'ordre deux et les racines de l'équation caractéristique sont $1 \pm \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\pm\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$. Il existe donc $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}, \qquad u_n = \left(A\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + B\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\sqrt{2}\right)^n$$

En évaluant (1) en 0, on obtient $u_2 = 2u_1 - 2u_0 = 4$. Déterminons maintenant u_3 et u_4. En dérivant deux fois (1) et en évaluant en 0, on a :

$$u_3 - 2u_2 + 2u_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_4 - 2u_3 + 2u_2 = 4$$

c'est-à-dire :

$$u_3 = 2u_2 - 2u_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad u_4 = 2u_3 - 2u_2 + 4 = 0$$

On résout :

$$\left\{\begin{array}{l} u_3 = 2 \\ u_4 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \left(-A\frac{\sqrt{2}}{2} + B\frac{\sqrt{2}}{2}\right)2\sqrt{2} = 2 \\ -4A = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} B = 1 \\ A = 0 \end{array}\right.$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}, \qquad f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{2}\right)^n}$$

Commentaire

On ne peut pas considérer les valeurs de u_0 et u_1 (valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$ fournies dans la question 1.) pour trouver les valeurs de A et B... D'ailleurs, l'égalité finale n'est pas valide pour $n = 0$ par exemple. Cela provient du fait que la relation de récurrence obtenue à la question 2. n'est pas valable pour les premiers termes (quand on dérive deux fois « $2x^2$ » et qu'on évalue en 0, on obtient 4 et pas 0).

Exercice 9 (C1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre et à coefficients constants suivante :

$$\frac{1}{n^2}y''(t) + y(t) = \sin(t) \tag{E_n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{n^2}{n^2-1}\sin(t)$ est solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{n^2}{n^2-1}\sin(t)$ est bien définie (puisque $n^2-1 \neq 0$) et est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) = \frac{n^2}{n^2-1}\cos(t) \qquad \text{et} \qquad f''(t) = -\frac{n^2}{n^2-1}\sin(t)$$

   donc :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{n^2}f''(t) + f(t) = -\frac{1}{n^2-1}\sin(t) + \frac{n^2}{n^2-1}\sin(t) = \sin(t)$$

   Ainsi :

   $$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \text{ la fonction } f \text{ est solution de } (\mathrm{E}_n)}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Montrer qu'une solution f_n de l'équation différentielle (E_n) vérifiant $f_n(0) = f_n'(0) = 0$ peut se mettre sous la forme :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_n(t) = \frac{n^2}{n^2-1}\sin(t) + b_n\sin(nt)$$

   où b_n est un constante à déterminer.
   Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et f_n un solution de (E_n). On a alors :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{n^2}f_n''(t) + f_n(t) = \sin(t)$$

   et :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{n^2}f''(t) + f(t) = \sin(t)$$

   où f est la fonction de la question 1. En soustrayant la deuxième équation à la première et en utilisant la linéarité de la dérivation, on obtient :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{n^2}(f_n - f)''(t) + (f_n - f)(t) = 0$$

   En posant $g = f_n - f$, on obtient :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g''(t) - n^2 g(t) = 0$$

   L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants homogène est $x^2 + n^2 = 0$. Les racines sont $\pm\,\mathrm{i}\,n$. Il existe donc $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g(t) = A\cos(nt) + B\sin(nt)$$

   c'est-à-dire tel que :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_n(t) = \frac{n^2}{n^2-1}\sin(t) + A\cos(nt) + B\sin(nt)$$

   Déterminons les valeurs de A et B en utilisant les conditions $f_n(0) = 0$ et $f_n'(0) = 0$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_n'(t) = \frac{n^2}{n^2-1}\cos(t) - An\sin(nt) + Bn\cos(nt)$$

   Donc :

   $$\left\{\begin{array}{l} f_n(0) = 0 \\ f_n'(0) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} A = 0 \\ \dfrac{n^2}{n^2-1} + Bn = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} A = 0 \\ B = -\dfrac{n}{n^2-1} \end{array}\right.$$

   et finalement :

   $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_n(t) = \frac{n^2}{n^2-1}\sin(t) - \frac{n}{n^2-1}\sin(nt)}$$

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la suite $(f_n(t))_{n \geqslant 2}$ est convergente et déterminer la fonction limite de la suite $(f_n)_{n \geqslant 2}$.

Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On a $-1 \leqslant \sin(nt) \leqslant 1$. Comme $\dfrac{n}{n^2 - 1} > 0$, on obtient :

$$-\frac{n}{n^2-1} \leqslant \frac{n}{n^2-1}\sin(nt) \leqslant \frac{n}{n^2-1}$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} \pm \frac{n}{n^2-1} = \lim_{n \to +\infty} \pm \frac{1}{n - \frac{1}{n}} = 0$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2-1}\sin(nt) = 0$. Par ailleurs :

$$\lim_{n \to +\infty} \pm \frac{n^2}{n^2-1} = \lim_{n \to +\infty} \pm \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}} = 1$$

et donc, par linéarité de la limite, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2-1}\sin(t) = \sin(t)$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(t) = \sin(t)$. Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction limite de la fonction } (f_n)_{n \geqslant 2} \text{ est la fonction } t \longmapsto \sin(t)}$$

Exercice 10 (C1) 1. Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\forall x > 0, \qquad x f'(x) + 2f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Notons (E_1) cette équation différentielle. On a :

$$(E_1) \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) + \frac{2}{x} f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre d'équation homogène $f' + \dfrac{2}{x} f = 0$. Une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto 2\ln(x)$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc :

$$\left\{ x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-2\ln(x)} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \longmapsto \frac{C}{x^2} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}$$

On cherche une solution particulière de (E_1) en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{C(x)}{x^2}$ où C est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par quotient, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a (en dérivant la fonction comme un produit) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{C'(x)}{x^2} + C(x) \times \frac{-2}{x^3} = \frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E_1) &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\; \frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3} + \frac{2C(x)}{x^3} = \frac{1}{1+x^2} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\; C'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient par exemple $C : x \longmapsto x - \arctan(x)$. Une solution particulière de (E_1) est donc la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x - \arctan(x)}{x^2}$. Finalement :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est : } \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{x - \arctan(x) + C}{x^2} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}}$$

2. Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_-^*$ telles que :

$$\forall x < 0, \qquad x f'(x) + 2f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Notons (E_2) cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_-^*$. On raisonne de la même manière en commençant par *normaliser* l'équation différentielle. Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est $x \longmapsto 2\ln(-x)$ mais comme $(-x)^2 = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on retrouve le même ensemble de solutions pour l'équation homogène. La recherche de solution particulière est identique à la précédente. On trouve donc que :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est : } \left\{ x \in \mathbb{R}_-^* \longmapsto \frac{x - \arctan(x) + C}{x^2} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}}$$

3. Montrer que $\arctan(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$.

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Or on sait que $\dfrac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + \mathrm{o}(u)$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, on a alors :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} 1 - x^2 + \mathrm{o}(x^2)$$

En intégrant le développement limité, on obtient donc :

$$\arctan(x) \underset{0}{=} \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$$

et donc, comme $\arctan(0) = 0$, on a bien :

$$\boxed{\arctan(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)}$$

4. En déduire qu'il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle précédente sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

Supposons que f soit une solution de l'équation différentielle (notée E) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x f'(x) + 2f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Alors :

- f est aussi solution de (E_1) (sur $\mathbb{R}_+^*$ donc) ;
- f est aussi solution de (E_2) (sur $\mathbb{R}_-^*$ donc) ;
- et, en remplaçant x par 0 dans l'équation différentielle (E), on obtient que $f(0) = 0$.

Les deux premiers points impliquent l'existence de $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = \frac{x - \arctan(x) + C_1}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad f(x) = \frac{x - \arctan(x) + C_2}{x^2}$$

La fonction f doit de plus être continue en 0 (puisqu'elle doit être dérivable sur $\mathbb{R}$) avec $f(0) = 0$. D'après la question 3., on a :

$$f(x) \underset{0^+}{=} \frac{\frac{x^3}{3} + C_1}{x^2} \underset{0^+}{=} \frac{x}{3} + \frac{C_1}{x^2}$$

Si C_1 est non nul, alors f tend vers l'infini quand x tend vers 0^+. On a donc $C_1 = 0$ et on obtient bien que :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$$

Pour la même raison, on a $C_2 = 0$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \arctan(x)}{x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Il reste à vérifier que f est dérivable en 0. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - \arctan(x)}{x^3} \underset{0}{=} \frac{1}{3} + \mathrm{o}(1)$$

et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{3}$. Ainsi, la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{3}$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, la fonction f ainsi définie est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$ (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifie (E_1) et (E_2) et (E) pour $x = 0$).

Finalement :

$$\boxed{(E) \text{ a pour unique solution la fonction } f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x - \arctan(x)}{x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ ; elle est telle que } f'(0) = \dfrac{1}{3}}$$

Exercice 11 (C1) Le modèle de Gompertz permet de modéliser la croissance en masse corporelle (m en gramme) du rat musqué en fonction de son âge (t en jours). Ainsi, la croissance du rat musqué peut être modélisée par l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0,036m \ln\left(\frac{760}{m}\right)$$

Sachant qu'à la naissance, un rat musqué pèse environ 16 grammes, déterminer sa masse corporelle au bout de 30 jours. *On considèrera la fonction* $z = \ln(m)$.

On pose $z = \ln(m)$ et on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{1}{m(t)} \iff & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0,036 \ln\left(\frac{760}{m}\right) \\
\iff & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0,036 \ln(760) - 0,036 \ln(m) \\
\iff & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0,036 \ln(760) - 0,036z \\
\iff & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + 0,036z = 0,036 \ln(760)
\end{aligned}$$

On résout l'équation homogène associée :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + 0,036z = 0.$$

On obtient l'ensemble de solutions $\{t \mapsto Ce^{-0.036t},\ C \in \mathbb{R}\}$.
Une solution particulière est $z_0(t) = \ln(760)$.
Ainsi, on a

$$z(t) = Ce^{-0.036t} + \ln(760)$$

avec une constante C telle que $z(0) = \ln(16)$, donc $C = \ln(16) - \ln(760) = \ln\left(\frac{16}{760}\right)$. Ainsi, on a obtenu :

$$z(t) = \ln\left(\frac{16}{760}\right) e^{-0.036t} + \ln(760).$$

Maintenant, on utilise le fait que $m(t) = e^{z(t)}$, d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad m(t) = 760\, \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{16}{760}\right) \mathrm{e}^{-0,036t}}$$

Pour $t = 30$ jours, on a $\boxed{m(30) \approx 205 \text{ grammes}}$.

Exercice 12 (C1-C3) On veut tracer, en utilisant l'outil informatique, une approximation du problème de Cauchy :

$$(\mathcal{C}) : \left\{ \begin{array}{l} y' = \dfrac{1}{\ln(t)} y + \dfrac{1}{t} \\ y(\mathrm{e}) = 1 \end{array} \right.$$

sur un intervalle $[a, b]$ quelconque inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. La méthode consiste à considérer une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et de construire des approximations des images des points de cette subdivision par la fonction y. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad t_k = a + \delta k \qquad \text{où} \qquad \delta = \frac{b-a}{n}$$

1. Écrire une fonction `f` modélisant la fonction d'expression $f(t, y) = \dfrac{1}{\ln(t)} y + \dfrac{1}{t}$.

   On importe le module `math` pour la fonction ln (`log` dans `python`).

```
from math import *
def f(t,y) :
    return (1/log(t))*y+1/t
```

On définit ensuite la suite $(y_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ définie par $y_0 = y(a)$ et :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad y_{k+1} = y_k + \delta f(t_k, y_k)$$

2. Rappeler pourquoi, pour n suffisamment grand, l'approximation $y_1 \approx y(t_1)$ est licite.
   La fonction y étant solution du problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $[a, b]$, elle est en particulier dérivable sur cet intervalle. On a donc, pour tout $x \in [a, b]$, l'égalité :

$$y'(x) = \lim_{t \to x} \frac{y(t) - y(x)}{t - x}$$

   et donc :

$$\text{pour } t \in [a, b] \textit{ très proche de } x, \text{ on a l'approximation } y'(x) \approx \frac{y(t) - y(x)}{t - x}$$

   En particulier, si n est suffisamment grand, alors t_1 est proche de t_0 (car $t_1 - t_0 = \delta$) donc on a l'approximation $\dfrac{y(t_1) - y(t_0)}{t_1 - t_0} \approx f'(t_0)$ c'est-à-dire $\dfrac{y(t_1) - y(t_0)}{\delta} \approx f(t_0, y_0)$ puis $y(t_1) \approx y(a) + \delta f(a, y(a))$ car $y_0 = y(a)$ et $t_0 = a$. Or $f(a, y(a)) = y'(a)$ donc :

$$y(t_1) \approx y(a) + \delta y'(a) \tag{7}$$

   Or, par définition de la suite $(y_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, on a aussi $y_1 = y_0 + \delta f(t_0, y_0)$ et donc

$$y_1 = y(a) + \delta f(a, y(a)) = y(a) + \delta f'(a) \tag{8}$$

   En comparant (1) et (2), on obtient donc que :

$$\boxed{\text{pour } n \text{ suffisamment grand, on a l'approximation } y_1 \approx y(t_1)}$$

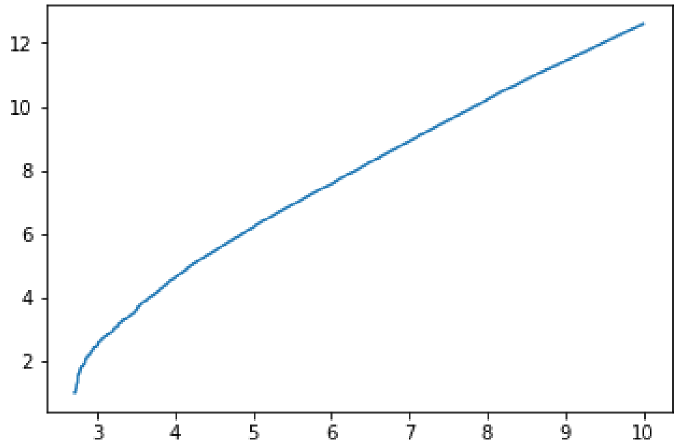
3. Écrire une fonction `euler` qui prend en entrée un entier n non nul assez grand, les bornes a et b de l'intervalle, le premier terme y_0 de la suite et qui renvoie :
   — la liste `X` des abscisses `[t0,...,tn]` ;
   — la liste `Y` des ordonnées *approximatives* `[y0,...,yn]`
   On utilise une boucle `for` pour créer les deux listes.

```
def euler(n,a,b,y0) :
    x, y = a, y0
    delta = (b-a)/n
    X = [x]
    Y = [y]
    for k in range(n+1) :
        x, y = x+delta, y+delta*f(x,y)
        X.append(x)
        Y.append(y)
    return X, Y
```

4. À l'aide du module `matplotlib.pyplot`, créer la représentation graphique de la solution du problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $[\mathrm{e}, 10]$.
   On utilise le module `matplotlib.pyplot` pour tracer la courbe.

```
import matplotlib.pyplot as plt
X,Y=euler(10000,e,10,1)
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

et on obtient :



Commentaire

Il faut importer le module `math` pour avoir accès à `e`. Ici, nous l'avons déjà fait pour la première fonction, donc il est inutile de le réimporter.