

Fiche de révision 3 - Correction

Sommes et coefficients binomiaux

1 Compétences et notions à maîtriser

- ▷ C1 : Propriétés des factorielles et des coefficients binomiaux (symétrie, triangle de Pascal)
- ▷ C2 : Propriétés de la somme : linéarité, relation de Chasles, changement d'indice
- ▷ C3 : Sommes usuelles $\sum_{k=i}^j 1$, $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=i}^j q^k$, sommes télescopiques
- ▷ C4 : Formule du binôme de Newton (pour calculer une somme, pour linéariser $\cos(\theta)^p \sin(\theta)^q$)
- ▷ C5 : Sommes doubles *rectangulaires* $\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j}$ et *triangulaires* $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$
- ▷ C6 : Propriétés sur les produits $\prod_{k=1}^n a_k$
- ▷ C7 : Écriture d'une suite (de manière récursive ou non) ou d'une somme avec `python`
- ▷ C8 : Utiliser le théorème des sommes de Riemann

2 Corrections des exercices

Exercice 1 (C1-C3)  Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$. Simplifier :

1. $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

On trouve $(n+1)n(n-1)$.

2. $\frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{2}}$

On a :

$$\frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-1)!}{2(n-3)!} \times \frac{2(n-2)!}{n!} = \frac{n-2}{n}$$

3. $\frac{\binom{n+1}{n-2}}{\binom{n}{3}}$

On a :

$$\frac{\binom{n+1}{n-2}}{\binom{n}{3}} = \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} \times \frac{3!(n-3)!}{n!} = \frac{n+1}{n-2}$$

4. $\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}$

On trouve $(2n+3)(2n+2)$.

5. $\frac{2^{n+2}[(n+1)!]^2}{4[n!]^2 2^n}$

Il reste $(n+1)^2$.

Exercice 2 (C1-C2-C3-C7)  Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $A = \sum_{k=1}^n k(k+1)$

En utilisant la linéarité de la somme, on a :

$$A = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

2. $B = \sum_{k=2}^{n+2} k$

La relation de Chasles nous donne :

$$B = \sum_{k=1}^{n+2} k - 1 = \frac{(n+2)(n+3)}{2} - 1 = \frac{n^2 + 5n + 4}{2}$$

3. $C = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}$

D'après la relation de Chasles, on a :

$$C = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} - 1 = 2^n - 1$$

d'après la formule du binôme de Newton.

4. $D = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

On remarque d'abord que $D = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ (le premier sommant étant nul). De plus :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}$$

La linéarité de la somme nous donne :

$$D = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell}$$

en utilisant le changement d'indice $\ell = k - 1$. La formule du binôme de Newton permet de conclure que :

$$D = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

5. $E = \sum_{k=-n}^n (k+1)$

Par linéarité de la somme :

$$E = \sum_{k=-n}^n k + \sum_{k=-n}^n 1 = 0 + 2n + 1 = 2n + 1$$

En effet, tous les entiers se simplifient dans la première somme et il y a $n - (-n) + 1$ termes dans la seconde somme.

6. $F = \sum_{k=0}^n 3 \times 5^{k-1}$

Par linéarité de la somme, on a :

$$F = \frac{3}{5} \sum_{k=0}^n 5^k = \frac{3}{5} \times \frac{1-5^{n+1}}{1-5} = \frac{3(5^{n+1}-1)}{20}$$

puisque'il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $5 \neq 1$).

$$7. G = \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n}{\ell+1} 5^{-\ell} 2^{n-\ell}$$

Le changement d'indice $k = \ell + 1$ fournit :

$$G = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 5^{-k+1} 2^{n-k+1} = 10 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k 2^{n-k}$$

par linéarité de la somme. La relation de Chasles et la formule du binôme de Newton nous donnent :

$$G = 10 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k 2^{n-k} - 2^n \right) = 10 \left(\left(\frac{1}{5} + 2\right)^n - 2^n \right) = 10 \left(\left(\frac{11}{5}\right)^n - 2^n \right)$$

$$8. H = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$$

On a $H = \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k}$ car les deux premiers sommants (pour $k \in \{0, 1\}$) sont nuls. Pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} k(k-1) \binom{n}{k} &= k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))} \\ &= n(n-1) \binom{n-2}{k-2} \end{aligned}$$

Par linéarité de la somme, il vient :

$$\begin{aligned} H &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} = n(n-1) \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} \quad (\text{changement d'indice } \ell = k-2) \\ &= n(n-1) 2^{n-2} \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

$$9. I = \sum_{k=2}^{n+1} 3$$

Par linéarité de la somme, on a :

$$I = 3 \sum_{k=2}^{n+1} 1 = 3(n+1-2+1) = 3n$$

$$10. J = \sum_{\ell=1}^n 3^{\ell+1}$$

Par linéarité de la somme, on a :

$$J = 3 \sum_{\ell=1}^n 3^{\ell} = 3 \times 3 \times \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{9(3^n-1)}{2}$$

car il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $3 \neq 1$.

$$11. K = \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} (-1)^k$$

On ajoute les termes d'indices 0 et $n+1$ (on utilise la relation de Chasles) :

$$K = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k - 1 - (-1)^{n+1} = (1 + (-1))^{n+1} - 1 - (-1)^{n+1} = -1 - (-1)^{n+1}$$

en utilisant la formule du binôme de Newton.

$$12. L = \sum_{\ell=0}^n \ell^2 \binom{n}{\ell}$$

Par linéarité de la somme, on a :

$$L = \sum_{\ell=0}^n (\ell + \ell(\ell-1)) \binom{n}{\ell} = \sum_{\ell=0}^n \ell \binom{n}{\ell} + \sum_{\ell=0}^n \ell(\ell-1) \binom{n}{\ell} = D + H = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$$

$$13. M = \sum_{i=2}^n i^2$$

La relation de Chasles nous donne :

$$M = \sum_{i=1}^n i^2 - 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n - 6}{6}$$

$$14. N = \sum_{t=0}^n \frac{(-1)^t}{4^{t-2}}$$

D'après la linéarité de la somme, on a :

$$N = \frac{1}{4^{-2}} \sum_{t=0}^n \frac{(-1)^t}{4^t} = 16 \sum_{t=0}^n \left(\frac{-1}{4} \right)^t$$

On obtient la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4} \neq 1$ donc :

$$N = 16 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{64}{5} \left(1 - \left(\frac{-1}{4} \right)^{n+1} \right)$$

$$15. O = \sum_{p=0}^n (p^2 + 2p + 1)$$

Le plus rapide est de remarquer que $p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$ puis de changer d'indice. On obtient :

$$O = \sum_{q=1}^{n+1} q^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$16. P = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2}$$

Le changement d'indice $\ell = k + 2$ nous donne :

$$P = \sum_{\ell=2}^n \binom{n}{\ell} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} - 1 - n$$

d'après la relation de Chasles. On obtient $P = 2^n - 1 - n$ en utilisant la formule du binôme de Newton.

17. Écrire en langage python une fonction **sommeM** qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de la somme M (sans utiliser le résultat obtenu à la question 13.).

Le plus simple est d'utiliser une boucle **for**. La structure permettant de calculer une somme informatiquement est toujours la même.

```
def sommeM(n) :
    S = 0
    for i in range(2,n+1) :
        S = S+i**2
    return S
```

18. (a) Écrire une fonction **factorielle** qui génère la suite $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$ (sans utiliser la fonction **factorial** disponible dans le module **math** de **python**).

On utilise une fonction récursive.

```
def factorielle(n) :
    if (n == 0) :
        return 1
    else :
        return n*factorielle(n-1)
```

- (b) En déduire une fonction `sommeD` qui calcule la somme D (sans utiliser le résultat obtenu à la question 4).

On utilise la fonction `factorielle` précédente.

```
def sommeD(n) :
    S = 0
    for k in range(n+1) :
        S = S+k*factorielle(n)/(factorielle(k)*factorielle(n-k))
```

Exercice 3 (C1-C5)  Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Calculer les sommes suivantes :

1. $A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 2 \leq j \leq n}} 2i$

En séparant les deux sommes, on obtient $A = (n-1)m(m+1)$.

2. $B = \sum_{0 \leq p \leq q \leq n} \binom{q}{p} 3^p$

En sommant d'abord sur q (somme extérieure), en appliquant la formule du binôme de Newton puis celle donnant la somme des termes d'une suite géométrique (de raison 4), il vient $B = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$.

3. $C = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} \binom{k}{j} a^k b^{k-j}$

On permute les deux sommes :

$$\begin{aligned} C &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n \binom{n}{k} \binom{k}{j} a^k b^{k-j} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{j} a^k b^{k-j} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} b^{k-j} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k (1+b)^k \text{ par formule du binôme de Newton} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a(1+b))^k \\ &= (1 + a(1+b))^n \end{aligned}$$

4. $D = \sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} \frac{k}{\ell}$

En sommant d'abord sur ℓ (somme extérieure), on trouve $D = \frac{n(n+3)}{4}$

5. $E = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2$

En développant et en utilisant la linéarité de la somme, on obtient :

$$E = \frac{n^2(7n^2 + 12n + 5)}{6}$$

6. $F = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$

On a :

$$E = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \min(i, j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \min(i, j) = \underbrace{\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i}_{\text{notée } F} + \underbrace{\sum_{1 \leq j < i \leq n} j}_{\text{notée } G}$$

D'une part :

$$F = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i = \dots = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

et d'autre part :

$$G = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} j = \dots = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

$$\text{et finalement } E = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

Exercice 4 (C4)  Les deux questions sont indépendantes.

1. Expliciter les nombres complexes $(1-i)^4$, $(1-2i)^5$ et $(3+i)^3$.

En utilisant (par exemple) la formule du binôme de Newton, on obtient $(1-i)^4 = -4$ et $(1-2i)^5 = 41+38i$ et $(3+i)^3 = 18+26i$.

2. Calculer l'intégrale $I = \int_0^\pi \cos(x)^4 dx$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On linéarise $\cos(x)^4$ en utilisant successivement la formule d'Euler pour le cosinus, la formule de Moivre puis encore la formule d'Euler. On obtient :

$$\cos(x)^4 = \frac{4\cos(2x) + \cos(4x) + 3}{8}$$

En utilisant le fait qu'une primitive de $x \mapsto \cos(ax)$ ($a \in \mathbb{R}^*$) est $x \mapsto \frac{\sin(ax)}{a}$, on trouve que $I = \frac{3\pi}{8}$.

Exercice 5 (C2-C3)  Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On pose $S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$.

(a) Démontrer que :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}, \quad \frac{1}{x(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2}$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On résout :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}, \quad \frac{1}{x(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} &\iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}, \quad \frac{1}{x(x+2)} = \frac{(a+b)x + 2a}{x(x+2)} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}, \quad (a+b)x + 2a = 1 \\ &\iff a+b = 1 \text{ et } 2a = 1 \end{aligned}$$

par unicité des coefficients d'un polynôme. On obtient $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$. Donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}, \quad \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right)}$$

(b) En déduire la valeur de S .

On trouve $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+2)}$ (somme télescopique).

2. En faisant apparaître une somme télescopique, calculer la somme :

$$T = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

et donc, par linéarité de la somme (puis changement d'indice) :

$$T = \sum_{k=0}^n \sqrt{k+1} - \sum_{k=0}^n \sqrt{k} = \dots = \sqrt{n+1}$$

Exercice 6 (C2-C3-C6)

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On utilise un raisonnement par récurrence simple. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

- *Initialisation* : d'une part $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1$ et d'autre part $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ donc la proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad (\text{car la proposition } \mathcal{P}_n \text{ est vraie}) \\ &= (n+1) \frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} \\ &= (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \end{aligned}$$

Or $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$ donc on a bien :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

- *Conclusion* : pour tout entier naturel n non nul, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple.

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

On démontre les inégalités proposées en étudiant le signe des fonctions :

$$f : x \mapsto x - \ln(1+x) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

sur $\mathbb{R}_+$.

- **Signe de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée et différence de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$$

comme quotient de nombres positifs. La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \geq \underbrace{f(0)}_{=0} \quad \text{c'est-à-dire} \quad x - \ln(1+x) \geq 0$$

ce qui démontre l'inégalité de droite.

- **Signe de la fonction g sur $\mathbb{R}_+$** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée et différence de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - (1+x) + x(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$$

comme quotient de nombres positifs. La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $g(0) = 0$, on obtient de la même manière :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$$

ce qui démontre l'inégalité de gauche.

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x}$$

- Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme u_n est un produit de nombres strictement positifs, $\ln(u_n)$ est bien défini et on a :

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\frac{k}{n^2} \geq 0$ donc on peut appliquer les inégalités obtenues à la question 2. au point $x = \frac{k}{n^2}$:

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

En sommant ces inégalités sur les entiers $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il vient (en utilisant également la linéarité de la somme) :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^n k^2 \leq \ln(u_n) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

soit encore, puisque $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et d'après la question 1. :

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq \ln(u_n) \leq \frac{n+1}{2n}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = \dots = 0$$

D'après le théorème des gendarmes, la suite $(\ln(u_n))_{n \geq 1}$ converge donc de limite $\frac{1}{2}$. La fonction exponentielle est continue au point $\frac{1}{2}$ donc, par composition des limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(u_n)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} e^x = \sqrt{e}$$

Finalement :

la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge de limite $\sqrt{e}$

Exercice 7 (formule du triangle de Pascal généralisée, C1-C5)  1. Montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$, on a :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Il s'agit ici de démontrer la formule du triangle de Pascal. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$. Alors :

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \frac{n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)!} + \frac{n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!} \\ &= \frac{n!(p+1+n-p)}{(p+1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n+1-(p+1))!} \\ &= \binom{n+1}{p+1} \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$ tel que $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$, on a :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

On utilise un raisonnement par récurrence (simple). Fixons $p \in \mathbb{N}$ (quelconque). Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p , on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ ».

(a) *Initialisation* : la proposition $\mathcal{P}_p$ est vraie car :

$$\sum_{k=p}^p \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$$

(b) *Hérédité* : soit n un entier naturel supérieur ou égal à p tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p}$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. On applique ensuite la formule du triangle de Pascal (question 1.) avec les entiers p et $n+1$ (on a bien $p \leq n+1$) et on obtient :

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

(c) *Conclusion* : pour tout entier naturel $n \geq p$, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } (n, p) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n \geq p, \text{ on a } \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}}.$

3. En déduire la valeur de $S = \sum_{k=1}^n k(k-1)(k-2)$ puis celle que $T = \sum_{k=1}^n k^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n \in \{1, 2\}$, alors $S = 0$ (car les sommants sont nuls). Supposons maintenant que $n \geq 3$ et choisissons $p = 3$ dans la question 2. Pour tout $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$, on a :

$$\binom{k}{3} = \frac{k!}{3!(k-3)!} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

D'après la question 2., on a donc :

$$\sum_{k=3}^n \frac{k(k-1)(k-2)}{6} = \binom{n+1}{4} = \dots = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}$$

En multipliant par 6, il vient $\sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$. Cette formule est aussi valable si $n \in \{1, 2\}$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}}$$

Calculons maintenant la somme T . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$k(k-1)(k-2) = k(k^2 - 3k + 2) = k^3 - 3k^2 + 2k \quad \text{et donc} \quad k^3 = k(k-1)(k-2) + 3k^2 - 2k$$

Par linéarité de la somme, on obtient donc :

$$T = S + 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k$$

ce qui fournit $\boxed{T = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2}.$

Exercice 8 (C1-C5)  En manipulant les coefficients binomiaux, montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$, on a :

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$$

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$ et $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$. Alors :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{p!}{k!(p-k)!} \\ &= \binom{n}{p} \binom{p}{k} \end{aligned}$$

Par linéarité de la somme, il vient :

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} 1^k 1^{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

Exercice 9 (C10)  En appliquant le théorème des sommes de Riemman sur l'intervalle $[0, 1]$, étudier la convergence des suites de termes généraux suivants :

1. $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n+k}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \frac{x}{1+x}$. Donc $(a_n)_{n \geq 1}$ est la suite des sommes de Riemann de la fonction f . Comme f est continue sur $[0, 1]$, la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge de limite :

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = \left[x - \ln(1+x)\right]_0^1 = 1 - \ln(2)$$

méthode du +1-1

Finalement :

$$\text{la suite } (a_n)_{n \geq 1} \text{ est convergente de limite } 1 - \ln(2)$$

COMMENTAIRE

Quand on utilise le théorème sur les sommes de Riemann, il ne faut pas oublier de mentionner que la fonction f mise en jeu est continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

2. $b_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2 x^2}$ (où $x \in \mathbb{R}^*$)

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$b_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}x\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : t \mapsto \frac{1}{1+(xt)^2}$. Donc $(b_n(x))_{n \geq 1}$ est la suite des sommes de Riemann de la fonction f . Comme f est continue sur $[0, 1]$, la suite $(b_n(x))_{n \geq 1}$ converge de limite :

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{x} \times \frac{x}{1+(xt)^2} dt = \left[\frac{\arctan(xt)}{x}\right]_0^1 = \frac{\arctan(x)}{x}$$

Finalement :

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la suite $(b_n(x))_{n \geq 1}$ est convergente de limite $\frac{\arctan(x)}{x}$

3. $c_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $c_n > 0$, le nombre $d_n = \ln(c_n)$ est bien défini et vaut :

$$d_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Donc $(d_n)_{n \geq 1}$ est la suite des sommes de Riemann de la fonction f qui est continue sur $[0, 1]$. D'après le théorème sur les sommes de Riemann, la suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $\int_0^1 f(x) dx$. Cette intégrale vaut $2 \ln(2) - 2$ (il suffit de faire une intégration par parties). Par composition des limites, on trouve donc que :

la suite $(c_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $e^{2 \ln(2) - 2} = \frac{4}{e^2}$

4. $d_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+n}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$d_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}$$

où $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Donc $(d_n)_{n \geq 1}$ est la suite des sommes de Riemann associée à la fonction f qui est continue sur $[0, 1]$. Par conséquent :

la suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $\int_0^1 f(x) dx = \left[\sqrt{1+x} \right]_0^1 = \sqrt{2}$

Exercice 10 (C3-C5)  Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} 2^k$.

1. Montrer que pour tout $(i, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i \leq n$ et pour tout $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a :

$$\sum_{k=i}^n q^k = \frac{q^{n+1} - q^i}{q - 1}$$

Indication : on pourra considérer $(q-1) \sum_{k=i}^n q^k$.

Soient $(i, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i \leq n$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On utilise la linéarité de la somme et le changement d'indice $\ell = k+1$ dans la première somme et on obtient :

$$(q-1) \sum_{k=i}^n q^k = \sum_{k=i}^n q^{k+1} - \sum_{k=i}^n q^k = \sum_{\ell=i+1}^{n+1} q^\ell - \sum_{k=i}^n q^k$$

d'où le résultat en télescopant les deux dernières sommes et en divisant par $q-1 \neq 0$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = n2^{n+1} + 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la question 1. avec $q = 2 \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n 2^k = \sum_{i=0}^n (2^{n+1} - 2^i) = 2^{n+1} \sum_{i=0}^n 1 - \sum_{i=0}^n 2^i \\ &= 2^{n+1}(n+1) - (2^{n+1} - 2^0) \\ &= n2^{n+1} + 1 \end{aligned}$$

ce qui était annoncé.

3. Écrire en langage `python` une fonction `suite` qui prend en paramètre un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n .

Le plus simple est d'utiliser directement le résultat obtenu à la question 2.

```
def suite(n) :
    return n*2**(n+1)+1
```

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer l'égalité $u_n = \sum_{k=0}^n (k+1)2^k$.

On a aussi :

$$u_n = \sum_{k=0}^n 2^k \sum_{i=0}^k 1 = \sum_{k=0}^n (k+1)2^k$$

5. Conclure que pour tout entier naturel n , on a $\sum_{k=0}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

D'après les question 2. et 4., on sait que $\sum_{k=0}^n (k+1)2^k = n2^{n+1} + 1$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^n k2^n = n2^{n+1} + 1 - \sum_{k=0}^n 2^n = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 = (n-1)2^{n+1} + 2$$

On obtient le résultat annoncé en divisant par 2.

Exercice 11 (formule de Vandermonde, C1-C4-C5)  Soient $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $n \in \llbracket 0, a+b \rrbracket$.

1. En calculant de deux manières différentes le coefficient du monôme X^n du polynôme $(X+1)^{a+b}$, montrer la *formule de Vandermonde* :

$$\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

Indication : $(X+1)^{a+b} = (X+1)^a (X+1)^b$. D'après la formule du binôme de Newton, on a d'une part :

$$(1+X)^{a+b} = \sum_{n=0}^{a+b} \binom{a+b}{n} X^n \quad (2.1)$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} (1+X)^{a+b} &= (1+X)^a (1+X)^b = \left(\sum_{k=0}^a \binom{a}{k} X^k \right) \left(\sum_{k=0}^b \binom{b}{k} X^k \right) \\ &= \sum_{n=0}^{a+b} \left(\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} \right) X^n \end{aligned} \quad (2.2)$$

d'après la formule. Par unicité des coefficients d'une polynôme, il découle donc de (1) et (2) que :

$$\forall k \in \llbracket 0, a+b \rrbracket, \quad \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

2. Soient $(N, n, p) \in \mathbb{N}^2 \times]0, 1[$ avec $n \leq N$ et X une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$. En utilisant la formule de Vandermonde, démontrer que $E(X) = np$.

Par définition de l'espérance (on a en posant $q = 1 - p$) :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k P(X=k) = \sum_{k=0}^n k \frac{\binom{pN}{k} \binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\ &= \sum_{k=1}^n k \frac{\binom{pN}{k} \binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}} \end{aligned}$$

puisque le premier terme de la somme est nul. Par linéarité de la somme et en utilisant la formule sans nom :

$$E(X) = \frac{pN}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^n \binom{pN-1}{k-1} \binom{qN}{n-k} = \frac{pN}{\binom{N}{n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{pN-1}{\ell} \binom{qN}{n-1-\ell}$$

en utilisant le changement d'indice $\ell = k - 1$. Or d'après la formule de Vandermonde, on sait que :

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{pN-1}{\ell} \binom{qN}{n-1-\ell} = \binom{pN-1+qN}{n-1} = \binom{N-1}{n-1}$$

car $p + q = 1$. Or $\binom{N}{n} = \frac{N}{n} \binom{N-1}{n-1}$ (pas de nom) donc :

$$E(X) = \frac{pN}{\frac{N}{n} \binom{N-1}{n-1}} \binom{N-1}{n-1} = np$$

3. Calculer les sommes suivantes (où $n \in \mathbb{N}$) :

$$S = \sum_{k=0}^n \binom{15}{k} \binom{11}{n-k} \quad T = \sum_{k=4}^9 \binom{9}{k} \binom{7}{11-k} \quad U = \sum_{k=0}^{10} \binom{11}{k} \binom{13}{11-k}$$

et $V = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

D'après la formule de Vandermonde pour $a = 15$ et $b = 11$, on obtient $S = \binom{26}{n}$.

Ensuite, on a $T = \sum_{k=0}^{11} \binom{9}{k} \binom{7}{11-k}$ car l'un des deux coefficients est nul lorsque $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket \cup \{10, 11\}$.

En effet, on sait que si $p > q$, alors $\binom{q}{p} = 0$. Toujours à l'aide de la formule de Vandermonde, on obtient

$$T = \binom{16}{11}.$$

Par ailleurs :

$$U = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} \binom{13}{11-k} - 1 = \binom{24}{11} - 1$$

et enfin, par symétrie des coefficients binomiaux et en choisissant $a = b = n$ dans la formule de Vandermonde :

$$V = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

Exercice 12 (sommutation d'Abel, C2-C5)  Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On définit les suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{et} \quad b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $A_{-1} = 0$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $a_k = A_k - A_{k-1}$. Par linéarité de la somme, on a :

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k = \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{k=0}^n A_{k-1} B_k$$

En utilisant le fait que $A_{-1} = 0$ et en utilisant le changement d'indice $\ell = k - 1$ dans la deuxième somme, il vient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n a_k B_k &= \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} B_k = \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{\ell=0}^{n-1} A_\ell B_{\ell+1} \\
 &= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} \\
 &= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \underbrace{(B_k - B_{k+1})}_{=-b_k}
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k}$$

2. En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n k2^k$ pour tout entier naturel n .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, posons $a_k = 2^k$ et $B_k = k$. D'après la formule de sommation d'Abel, on sait que :

$$\sum_{k=0}^n k2^k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$$

Or $A_n = \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $2 \neq 1$) et :

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} (2^{k+1} - 1) \times 1 = 2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k - \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 2^{n+1} - 2 - n$$

Finalement :

$$\sum_{k=0}^n k2^k = n(2^{n+1} - 1) - 2^{n+1} + 2 + n = (n - 1)2^{n+1} + 2$$