

Fiche de révision 2
Suites usuelles et récurrences

1 Compétences et notions à maîtriser

- ▷ C1 : Effectuer un raisonnement par récurrence (simple, à deux pas et forte)
- ▷ C2 : Étudier des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre deux
- ▷ C3 : Déterminer le sens de variation d'une suite, suite majorée, minorée, bornée
- ▷ C4 : Notion de suite convergente (définition « avec les ε »)
- ▷ C5 : Effectuer des opérations sur les limites, limites usuelles (et notamment les croissances comparées)
- ▷ C6 : Utiliser le théorème de comparaison, théorème des gendarmes, théorème de la limite monotone
- ▷ C7 : Utiliser le théorème sur les suites extraites des termes pairs et impairs
- ▷ C8 : Notion de suites adjacentes (et conséquence : des suites adjacentes convergent vers une même limite)
- ▷ C9 : Notion de suites équivalentes (définitions, propriétés et équivalents usuels)
- ▷ C10 : Utiliser le théorème des sommes de Riemann
- ▷ C11 : Écrire une suite (de manière récursive ou non) ou une somme avec `python`

2 Rappels de cours

2.1 Les récurrences

Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ dépendant de l'entier n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on utilise un **raisonnement par récurrence** en trois étapes :

1. **Initialisation :** La propriété est vraie au rang initial n_0.
2. **Hérédité :** Soit $n \geq n_0$ fixé, on suppose que la propriété est vraie au rang n. On montre que la propriété est vraie au rang $n+1$.
3. **Conclusion :** La propriété est initialisée et elle est héréditaire, donc par principe de récurrence pour tout $n \geq n_0,\ P(n)$ est vraie.

Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ dépendant de l'entier n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on utilise un **raisonnement par récurrence double** en trois étapes :

1. **Initialisation :** La propriété est vraie au rang initial n_0 et au rang n_0+1.
2. **Hérédité :** Soit $n \geq n_0$, on suppose que la propriété est vraie au rangs n et $n+1$. On montre que la propriété est vraie au rang $n+2$.
3. **Conclusion :** La propriété est initialisée et elle est héréditaire, donc par principe de récurrence double pour tout $n \geq n_0,\ P(n)$ est vraie.

Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ dépendant de l'entier n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on utilise un **raisonnement par récurrence forte** en trois étapes :

1. **Initialisation :** La propriété est vraie au rang initial n_0.
2. **Hérédité :** Soit $n \geq n_0$, on suppose que la propriété est vraie **pour tout entier** $\boldsymbol{k \in [\![n_0, n]\!]}$. On montre que la propriété est vraie au rang $n+1$.
3. **Conclusion :** La propriété est initialisée et elle est héréditaire, donc par principe de récurrence forte pour tout $n \geq n_0,\ P(n)$ est vraie.

2.2 Les différents types de suites usuelles

La suite (u_n) est **arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$** à partir du rang n_0 si

$$\forall\ n \geq n_0,\ \boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}.$$

L'expression de la suite en fonction de n est la suivante :

$$\forall\ n \geq n_0,\ \boldsymbol{u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r}.$$

La somme des termes d'une suite arithmétique vaut :

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = (n - n_0 + 1)\frac{u_n + u_{n_0}}{2} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme+dernier terme}}{2}.$$

La suite (u_n) est **géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$** si et seulement si

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}.$$

L'expression de la suite en fonction de n est la suivante :

$$\forall\ n \geq n_0,\ \boldsymbol{u_n = u_{n_0}\ q^{n-n_0}}.$$

La somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ vaut :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n} u_k &= \frac{u_{n_0} - u_{n+1}}{1-q} = \frac{\text{premier terme présent - premier terme qui manque}}{1 - \text{raison}}\\ &= u_{n_0} \times \frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.\end{aligned}$$

La suite (u_n) est **arithmético-géométrique** s'il existe $a \neq 1$ et $b \neq 0$ tels que

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{u_{n+1} = a\ u_n + b}.$$

Pour déterminer l'expression d'une suite arithmético-géométrique en fonction de n, on procède comme suit :

1. On résout l'équation $x = ax + b$. On note α la solution.
2. On pose $v_n = u_n - \alpha$. On montre que (v_n) est une suite géométrique de raison a :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = a \times u_n + b \quad \text{(L1)} \\ \alpha & = a \times \alpha + b \quad \text{(L2)} \end{cases}$$

   donc en faisant L1-L2, on obtient :

$$\underbrace{u_{n+1} - \alpha}_{v_{n+1}} = a \times (\underbrace{u_n - \alpha}_{v_n}) \Leftrightarrow v_{n+1} = a \times v_n.$$

3. On en déduit l'expression de v_n en fonction de n.
4. On utilise la relation $u_n = v_n + \alpha$ pour obtenir l'expression de u_n en fonction de n.

La suite (u_n) est **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n}.$$

Pour déterminer l'expression d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 en fonction de n, on procède comme suit :

1. On écrit l'**équation caractéristique** correspondante :

$$\boldsymbol{x^2 - ax - b = 0}\ (*)$$

et on calcule le discriminant associé : $\Delta = a^2 + 4b$.

2. On distingue trois cas selon le signe du discriminant :

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions de $(*)$	r_1 et r_2	r_0	$z_1 = re^{i\theta}$ et $\overline{z_1} = re^{-i\theta}$
Expression (u_n)	$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},$ $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$	$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},$ $u_n = r_0^n(An + B)$	$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},$ $u_n = r^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$

3. Pour déterminer A et B, on écrit les équations correspondant à $n = 0$ et $n = 1$. Elles forment un système que l'on résout.

2.3 Les théorèmes de convergence

Théorème 2.3.1 (Encadrement) Si $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n \leq v_n \leq w_n}$ et que les suites (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, alors la suite **(v_n) est convergente** et

$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell}.$$

Théorème 2.3.2 (Comparaison) Soient (u_n) et (v_n) deux suites avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n \leq v_n}$:

1. $\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty}$
2. $\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$

Théorème 2.3.3 (Théorème de la limite monotone)

- Soit (u_n) est une suite croissante :
  — si (u_n) est majorée, alors elle converge,
  — si (u_n) n'est pas majorée, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Soit (u_n) est une suite décroissante :
  — si (u_n) est minorée, alors elle converge,
  — si (u_n) n'est pas minorée, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Proposition 2.3.4 (Suites extraites) Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite si et seulement si la suite (u_n) converge vers cette limite.

On dit que les deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si et seulement si :

1. la suite (u_n) est croissante
2. la suite (v_n) est décroissante
3. $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème 2.3.5 Si deux suites sont adjacentes, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

De plus, les deux suites convergent et ont même limite.

2.4 Les calculs de limites

Lorsqu'on est confronté à une forme indéterminée lors d'un calcul de limite de suite, on utilise l'une des techniques suivantes.

Théorème 2.4.1 (Équivalents usuels) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors :

1. $\sin(u_n) \sim u_n$
2. $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
3. $\tan(u_n) \sim u_n$
4. $\ln(1+u_n) \sim u_n$
5. $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
6. $1-\cos(u_n) \sim u_n^2/2$

Théorème 2.4.2 (Croissances comparées) Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, on a :

$$\ln(n)^\alpha \ll n^\beta \ll e^{\gamma n} \ll n\,! \ll n^n$$

où la notation $u_n \ll v_n$ signifie $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ (ou $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = +\infty$).

2.5 Sommes de Riemann

Théorème 2.5.1 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $\boldsymbol{f}$ **continue** sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. On a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

3 Exercices

Exercice 1 (C1) Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n}$$

Montrer par récurrence que la suite est bien définie et que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

Exercice 2 (C1) Soit $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{F}_{n+1} = \mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n-1}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{F}_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

Exercice 3 (C1) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 3n$.

Exercice 4 (C1) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Démontrer par récurrence forte que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 5 (C2-C4-C11) Déterminer le terme général de chacune des suites définies par :

1. $L_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} = -2L_n - 3$
2. $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = u_n + 3$
3. $v_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = -v_{n-1}$
4. $w_1 = 3$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $w_{k+1} = 5w_k + 1$
5. $a_0 = -5$, $a_1 = 5$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_{k+1} = 3a_{k-1}$
6. $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = -\sqrt{2}b_{n+1} - b_n$
7. $c_0 = 1$, $c_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+2} = -c_{n+1} - c_n$
8. $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = 2$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, $x_{\ell+2} = 2\sqrt{3}x_{\ell+1} - 4x_\ell$
9. $T(0) = 1$, $T(1) = 3\sqrt{2}$ et pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, $T(t+1) = 3\sqrt{2}\,T(t) + 9T(t-1)$
10. $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 16$ et pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\theta_{n+1} = 4\theta_n - 4\theta_{n-1}$
11. (a) Écrire une fonction `python` prenant en entrée un entier naturel n et renvoyant la valeur de x_n.
    (b) Écrire un script qui demande à l'utilisateur un nombre positif M et qui renvoie la plus petite valeur de n pour laquelle $x_n > M$.

Exercice 6 (C3) Étudier les variations de la suite :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{n^2}{n\,!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
2. $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(t)^n \,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
3. $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $a_k = k - 2^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$;
4. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en montrant préalablement que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.

Exercice 7 (C5) Déterminer la limite des suites de termes généraux suivants :

1. $s_n = n^2 - n\cos(n) + 12$
2. $t_n = \dfrac{n + \mathrm{e}^{-n} + \ln(n)}{\sqrt{n} + 2}$
3. $u_n = n \ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$
4. $v_n = \dfrac{\ln\left(\cos\left(\frac{3}{n}\right)\right)}{\sin(\mathrm{e}^{-n})}$
5. $w_n = 3^n - \mathrm{e}^{n}$
6. $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + 2k\ln(n)}$
7. $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{n}}\right)^{n^2}$
8. $z_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$

Indication : pour la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$, procéder par encadrements.

Exercice 8 (C9) Donner un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$ dans les cas suivants :

1. $u_n = n + \ln(n)$
2. $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{\ln(n)}$
3. $u_n = \dfrac{n^2 + n\sqrt{n}}{n + (-1)^n}$
4. $u_n = \dfrac{n^2 + 2^{-n} + 3^n}{n\,! + n^{12} + 1}$
5. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^3}\right)$
6. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$

Indication : le plus simple est d'utiliser les développements limités pour les deux dernières suites.

Exercice 9 (C3-C10) On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$$

1. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
2. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln(k)$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \geqslant \ln(2)$. Conclure quant à la convergence de la suite.
3. En reconnaissant une somme de Riemann, donner la limite de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 10 (C10) Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants :

1. $a_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k}$
2. $b_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2x^2}$ (où $x \in \mathbb{R}^*$)
3. $c_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/n}$
4. $d_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n}}$

Exercice 11 (C6-C9) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\},\ \forall k \in [\![2, n-2]\!], \qquad \binom{n}{k} \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$$
2. En déduire un encadrement de u_n pour tout entier n supérieur ou égal à 4.
3. Conclure quant à la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que $u_n - 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.

Exercice 12 (C3-C6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. (a) Étudier le sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$
   En déduire la limite de la suite.
4. (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$.

   (c) En déduire un équivalent simple de $1 - u_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 13 (oral Agro-Véto 2017, C7-C8-C11) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Démontrer que les suites $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite.
2. En déduire que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
3. (a) Écrire en langage `python` une fonction `somme` prenant en paramètre un entier naturel n non nul et renvoyant la somme s_n.
   (b) À l'aide du module `matplotlib.pyplot`, tracer une représentation de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$$
   (b) En déduire alors que :
   $$\ln(2) = -s_n + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
   (c) Démontrer les inégalités :
   $$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$$
5. Déterminer la limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Commentaire

Les exercices suivants sont des études de suites définies par récurrence par une expression du type $u_{n+1} = f(u_n)$. La méthode générale d'étude n'est pas au programme, mais elle repose sur les étapes suivantes :

1. Recherche des points fixes : On résout l'équation $x = f(x)$ pour connaître les limites finies éventuelles de la suite.
2. On étudie les variations de la fonction f.
3. On étudie le signe de la fonction $g(x) = f(x) - x$ ($g \leq 0$ indique une suite décroissante et $g \geq 0$ indique une suite croissante car $g(u_n) = f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n$).
4. On met toutes ces informations ensemble pour conclure, en tenant compte de la valeur de u_0.

Exercice 14 (C3-C6) Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n^2 + \frac{2}{3}$$

1. Démontrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On définit la fonction f par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$$
   (a) Étudier les variations de f.
   (b) Étudier le signe de $g(x) = f(x) - x$ en fonction de x.
3. On suppose que $u_1 > 2$.
   (a) Montrer que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire que (u_n) est croissante à partir du rang 1.
   (c) Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4. On suppose que $1 < u_1 < 2$.
   (a) Montrer que (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
   (b) Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
5. On suppose que $0 < u_1 < 1$.
   (a) Montrer que (u_n) est croissante à partir du rang 1.
   (b) Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
6. Que se passe-t-il si $u_1 = 1$ et si $u_1 = 2$?

Exercice 15 (C1-C3-C6) On considère la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sin(u_n)$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in]0,1]$.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \sin(x) \leqslant x$$
En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis établir que sa limite est nulle.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{3}$ en utilisant un développement limité.

Exercice 16 (C6) On considère les fonctions :

$$f : x \longmapsto 1 + \frac{1}{2}\arctan(x) - x \qquad \text{et} \qquad g : x \longmapsto 1 + \frac{1}{2}\arctan(x)$$

1. Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution que l'on notera a, et que $a \in \left[0, \sqrt{3}\right]$.
2. On définit maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (le premier terme u_0 est un nombre réel quelconque).
   (a) Déterminer les limites finies éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - a|$$
   (c) En déduire que $|u_n - a| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - a|$ pour tout entier naturel n. Que peut-on dire de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 17 (C1-C3-C6-C9) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère l'équation :

$$x^n + x^2 + 2x - 1 = 0 \tag{E_n}$$

1. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution u_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $u_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
3. (a) Écrire une fonction `balayage` qui prend en entrée un entier $n \geqslant 3$ et un nombre `eps` strictement positif et qui renvoie un encadrement de u_n à `eps` près à l'aide d'un procédé de balayage.
   (b) On rappelle le principe de dichotomie. Si une fonction f s'annule une unique fois sur un intervalle $[a,b]$, alors on construit la suite de segments $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :
   $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n)f(c_n) < 0 \\ c_n & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{si } f(a_n)f(c_n) < 0 \\ b_n & \text{sinon} \end{cases}$$
   où c_n est le milieu du segment $[a,b]$. Écrire une fonction `dichotomie` prenant un nombre strictement positif `eps` et renvoyant un encadrement de u_n à `eps` près à l'aide de ce procédé.
4. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
5. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente et calculer sa limite.
6. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on pose $v_n = u_n - \sqrt{2} + 1$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}, \qquad v_n = \frac{-u_n^n}{u_n + \sqrt{2} + 1}$$
   En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n v_n = 0$.
   (b) Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{(\sqrt{2}-1)^n}{2\sqrt{2}}$.