Lycée Louis Thuillier — Année 2025-2026
BCPST2B

Fiche de révision 1 : Fonctions usuelles, Continuité, Dérivabilité, Développements limités

1 Compétences et notions à maîtriser

- ▷ C1 : Déterminer un domaine de définition, de continuité, de dérivabilité d'une fonction
- ▷ C2 : Connaître les propriétés (domaines de définitions, de continuité, de dérivabilité, dérivées, propriétés algébriques...) des fonctions usuelles (ln, exp, fonctions exponentielles $x \longmapsto a^x$ (*en base* $a > 0$), fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ ou plus généralement $\alpha \in \mathbb{R}$), fonctions trigonométriques cos, sin et tan, fonction arctangente, fonction valeur absolue, fonction partie entière)
- ▷ C3 : Résoudre des équations et des inéquations (par équivalence, en fixant préalablement la variable et en justifiant chaque étape, surtout quand on compose par une fonction ... qui doit être strictement monotone)
- ▷ C4 : Calculer des limites de fonctions en utilisant les croissances comparées, les propriétés sur les limites, les équivalents ou les développements limités
- ▷ C5 : Démontrer des inégalités entre fonctions en considérant la fonction différence et en établissant son signe
- ▷ C6 : Démontrer qu'une fonction est prolongeable par continuité en un point
- ▷ C7 : Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème de la bijection, ou le théorème des fonctions continues sur un segment
- ▷ C8 : Dériver une fonction, opérations sur la dérivation (notamment la composition)
- ▷ C9 : Étudier la dérivabilité en un point, dérivabilité à droite, dérivabilité à gauche
- ▷ C10 : Déterminer l'existence d'une tangente à une courbe en un point, équation de la tangente
- ▷ C11 : Utiliser le théorème de dérivabilité d'une réciproque
- ▷ C12 : Utiliser le théorème de Rolle ou le théorème des accroissements finis
- ▷ C13 : Savoir utiliser les développements limités usuels (en 0, en $a \in \mathbb{R}^*$ en procédant par translation et en $\pm\infty$ en posant $h = 1/x$), calculs de développements limités
- ▷ C14 : Étudier les asymptotes horizontales, verticales, obliques et déterminer les positions relatives (locales) d'une asymptote par rapport à la courbe

2 Rappels de cours

2.1 Relations de négligeabilité et d'équivalence

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.

- $\boldsymbol{f}$ **est négligeable devant** $\boldsymbol{g}$ en x_0 si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$, ou encore
$$\boldsymbol{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}.$$
On le note $\boldsymbol{f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))}$.
- $\boldsymbol{f}$ **est équivalente à** $\boldsymbol{g}$ en x_0 si $f(x) - g(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$, ou encore
$$\boldsymbol{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}.$$
On le note $\boldsymbol{f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)}$.

On peut étendre ces notions à $x_0 = +\infty$ et à $x_0 = -\infty$ en effectuant les changements suivants :
- Pour $x_0 = +\infty$: on remplace « $\exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ » par « $\exists A > 0,\ \forall x \in]A, +\infty[$ ».
- Pour $x_0 = -\infty$: on remplace « $\exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ » par « $\exists A < 0,\ \forall x \in]-\infty, A[$ ».

2.2 Fonctions usuelles

$f(x)$	Domaine de définition et de continuité	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
x^n	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^\star$	$n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^\star$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^\star$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^\star$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$]0;+\infty[$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$	$1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

2.3 Continuité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.
On dit que **f est continue en x_0** si et seulement si $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$.

Soit f une fonction définie sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.
On dit que **f est continue à droite en x_0** si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
On dit que **f est continue à gauche en x_0** si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

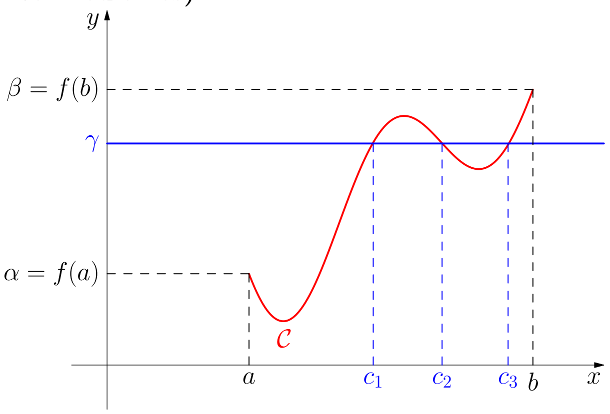
Théorème 2.3.1 Une fonction f définie sur un voisinage de x_0 est **continue** en ce point si et seulement si elle y est **continue à droite et à gauche**.

2.4 Théorèmes liés à la continuité

Théorème 2.4.1 (Théorème des fonctions continues sur un segment)
Soit f une fonction **continue** sur $[a,b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 2.4.2 (Théorème des valeurs intermédiaires)

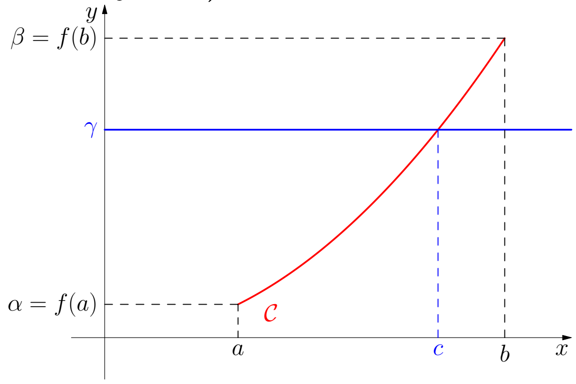
Soit f une fonction **continue** sur $[a,b]$, avec $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$, et un réel γ tel que $\boldsymbol{\alpha \leq \gamma \leq \beta}$ ou $\beta \leq \gamma \leq \alpha$.
Alors **il existe au moins un réel $c \in [a,b]$** tel que $\boldsymbol{f(c) = \gamma}$.



Théorème 2.4.3 (Théorème de la bijection)
Toute fonction $\boldsymbol{f}$ **continue et strictement monotone** sur un intervalle I **définit une bijection de** $\boldsymbol{I}$ **sur** l'intervalle $\boldsymbol{f(I)}$.
Sa bijection réciproque f^{-1} est elle-même continue et a le même sens de variation.

Corollaire 2.4.4 (Corollaire du théorème de la bijection)

Soit une fonction $\boldsymbol{f}$ **continue et strictement monotone** d'un intervalle $I = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ **dans** un intervalle $f(I) = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$.
Alors **pour tout un réel** $\gamma \in [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$, **il existe un unique réel** $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ tel que $\boldsymbol{f(c) = \gamma}$.

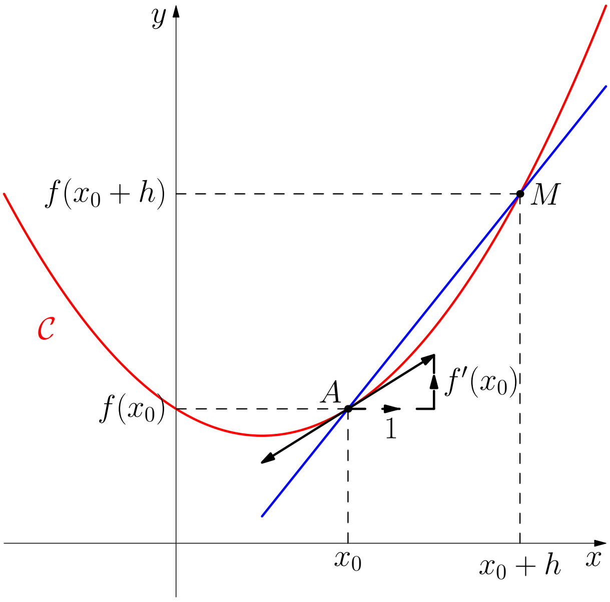


2.5 Dérivabilité d'une fonction

On dit que la fonction $\boldsymbol{f}$ est **dérivable en** $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}$ si et seulement si il existe $\eta > 0$ tel que f soit définie sur l'intervalle ouvert $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ et :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell \in \mathbb{R}$$

Le réel $\boldsymbol{\ell}$ **est le nombre dérivé de** $\boldsymbol{f}$ **en** $\boldsymbol{x_0}$ et il se note $\boldsymbol{f'(x_0)}$.



Théorème 2.5.1 Si $\boldsymbol{f}$ **est dérivable en** $\boldsymbol{x_0}$, la courbe représentative de f admet une **tangente** en $(x_0, f(x_0))$ d'équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Théorème 2.5.2 (Dérivée d'une composée de fonctions) Si $\boldsymbol{f}$ est **dérivable en** $\boldsymbol{x_0}$ et si $\boldsymbol{g}$ est **dérivable en** $\boldsymbol{f(x_0)}$, la fonction $\boldsymbol{g \circ f}$ est **dérivable en** $\boldsymbol{x_0}$ et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(f(x_0))$$

Théorème 2.5.3 (Dérivée de l'application réciproque) Soit $\boldsymbol{f}$ **dérivable en** $\boldsymbol{x_0}$ telle que $\boldsymbol{f'(x_0) \neq 0}$ et **bijective** de I dans J.
La **fonction réciproque** de f, f^{-1}, est **dérivable en** $\boldsymbol{y_0 = f(x_0)}$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

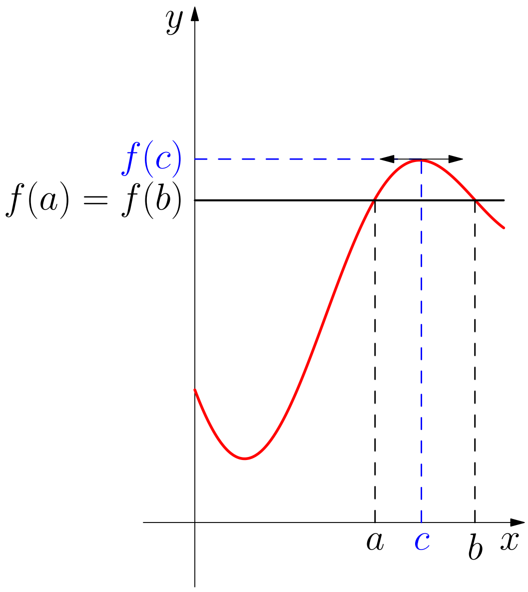
Théorème 2.5.4 (Dérivée et monotonie stricte) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose que la dérivée de f est strictement positive (respectivement négative) sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points. Alors f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I.

2.6 Théorèmes liés à la dérivabilité

Théorème 2.6.1 (Recherche d'extrema) Si $\boldsymbol{f}$ est **dérivable en** $\boldsymbol{x_0}$ et si f **admet un extremum local en** $\boldsymbol{x_0}$, alors $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$.
Pour déterminer les extrema d'une fonction, on détermine ses points critiques, c'est-à-dire les points d'annulation de la dérivée, puis on regarde si ce sont ou non des extrema locaux.

Théorème 2.6.2 (Théorème de Rolle)

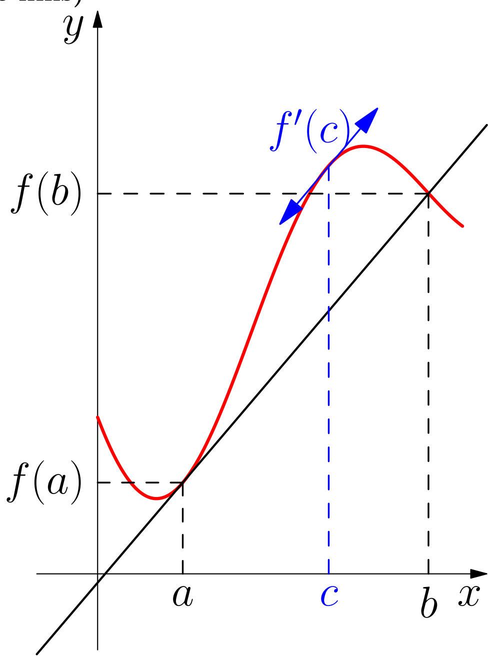
Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction **continue sur** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ et **dérivable sur** $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ telle que $\boldsymbol{f(a) = f(b)}$.
Alors **il existe** $\boldsymbol{c} \in]a, b[$ tel que $\boldsymbol{f'(c) = 0}$.



Théorème 2.6.3 (Théorème des accroissements finis)

Soit $\boldsymbol{f}$ **continue sur** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ et **dérivable sur** $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$.
Il existe $\boldsymbol{c} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ tel que :

$$\boldsymbol{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)}.$$



2.7 Formules de Taylor et développement limités

Théorème 2.7.1 (Formule de Taylor-Young) Soit f une fonction n fois dérivable en x_0. On a :

$$\boldsymbol{f(x) \underset{(x \to x_0)}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n}.$$

Soit f définie sur I contenant x_0.
On dit que f admet un **développement limité (DL) d'ordre n** $\in \mathbb{N}$ **en 0** si et seulement si il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in I \backslash \{0\},\ f(x) = P(x) + o(x^n)$$

$$\boldsymbol{\forall x \in I \backslash \{0\},\ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + o(x^n).}$$

Le polynôme $P(x)$ est la partie régulière du développement limité.
Le reste du développement limité est $f(x) - P(x) = o(x^n)$.

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + o(x^n)$
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n)$

2.8 Recherche d'asymptotes

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Si $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet **une asymptote verticale** en x_0 (comme la fonction inverse en 0).
2. Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet **une asymptote horizontale** $y = \ell$ en $\pm\infty$ (comme la fonction exponentielle en $-\infty$ avec $y = 0$).
3. Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^\star$ alors on étudie $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$:
   (a) Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$, on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$ en $\pm\infty$.
   (b) Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote en $\pm\infty$.
4. Dans les autres cas, on ne peut rien conclure.

Pour étudier **la position relative d'une asymptote par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$** au voisinage du point d'asymptote ($\pm\infty$), on doit déterminer le signe de $f(x) - y$ où y est l'équation de l'asymptote. Pour ça, on est parfois amené à faire un développement limité à l'ordre 1 ou 2 de f en $\pm\infty$.

3 Exercices

Exercice 1 (C1-C2-C4-C6) Étudier le domaine de définition, la continuité sur ce domaine, et éventuellement le prolongement par continuité aux bornes du domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{1-\cos(x)}{\mathrm{e}^x-1}$
3. $h : x \longmapsto \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exercice 2 (C1-C2-C6) Soit f la fonction d'expression :

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \big(x - \lfloor x \rfloor\big)^2$$

Donner le domaine de définition de f et étudier la continuité de f sur ce domaine.

Exercice 3 (C4) Déterminer les limites suivantes :

1. $\ell_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \big(\mathrm{e}^{\cos(x)} - \ln(x)\big)$
2. $\ell_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$
3. $\ell_3 = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+3) - \ln(x))$
4. $\ell_4 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(3^x - 2^x)}{x}$
5. $\ell_5 = \lim\limits_{x\to+\infty} \big(\sqrt{x^2+x+1} - x\big)$
6. $\ell_6 = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$
7. $\ell_7 = \lim\limits_{x\to-\infty} \big(\sqrt{x^2+2x+3} + x\big)$
8. $\ell_8 = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln(1+x))$
9. $\ell_9 = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{3^x - 2^x}{x}$
10. $\ell_{10} = \lim\limits_{x\to+\infty} \big(3^x - \pi^x + \mathrm{e}^x\big)$
11. $\ell_{11} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^x$
12. $\ell_{12} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1+x^4)^{1/2}-1}{(1-2x^3)^{1/3}-1}$

Exercice 4 (C2-C5) Établir les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$
2. $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$
3. $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ \forall x \in [-1,0[\cup]0,+\infty[,\ (1+x)^n > 1 + nx$
4. $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

Exercice 5 (C6) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. En considérant la suite $(U_n)_{n\geqslant1}$ définie par $U_n = \dfrac{1}{n\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il n'est pas possible de prolonger la fonction f par continuité en 0.

Exercice 6 (C2-C8-C10-C14) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de chacune des fonctions f suivantes et étudier l'existence de tangentes et d'asymptotes.

1. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x + 3x$
2. $f : x \longmapsto x + 1 - \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$
3. $f : x \longmapsto \ln(x) + 4x$
4. $f : x \longmapsto 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$
5. $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^2}{x-1}}$

Exercice 7 (C1-C2-C7) Soit $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer que f établit une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'application réciproque.

Exercice 8 (C7) Soit f et g continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0,\ |f(x)| = |g(x)|$$

Montrer que $g = f$ ou $g = -f$.

Exercice 9 (C3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x^2+3x+3|>1$
2. $\ln(x^2-6x+9)=2\ln(x-3)$
3. $|x+2|+2+2x=x^2$
4. $x-\dfrac{6}{x+4}\geqslant 1$
5. $\sqrt{2x^2-x-1}>2x+1$
6. $x=\sqrt{2-x^2}$
7. $\mathrm{e}^{x}-1-2\,\mathrm{e}^{-x}=0$
8. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}<\sqrt{x}$
9. $5^{x^3}=3^{\sqrt{x}}$

Exercice 10 (C7) Soit $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier qu'il existe deux nombres réels m et M tels que :

$$\forall x\in[0,1],\qquad m\leqslant f(x)\leqslant M$$

2. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, un encadrement de u_n.
3. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11 (C7) *Les quatre questions sont indépendantes.*

1. (a) Montrer que l'équation $x^2\cos(x)+x\sin(x)+1=0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
   (b) Proposer un programme informatique qui fournisse un encadrement d'une solution de cette équation par une méthode de balayage, la précision étant choisie par l'utilisateur.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $x^n+2x^2+x=1$ a une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ et que cette solution appartient à l'intervalle $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.
3. Montrer que le polynôme $P=5X^6+X^4+X^3+2X^2-1$ admet au moins deux racines réelles.
4. (a) Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$. Montrer que l'équation $x^n\,\mathrm{e}^{-x}=1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}_+$, l'une dans l'intervalle $[0,n]$ et l'autre dans l'intervalle $[n,+\infty[$.
   (b) On rappelle le principe de dichotomie. Si une fonction f s'annule une unique fois sur un intervalle $[a,b]$, alors on construit la suite de segments $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0=a$ et $b_0=b$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n & \text{si } f(a_n)f(c_n)<0\\ c_n & \text{sinon}\end{cases}\qquad\text{et}\qquad b_{n+1}=\begin{cases}c_n & \text{si } f(a_n)f(c_n)<0\\ b_n & \text{sinon}\end{cases}$$

   où c_n est le milieu du segment $[a,b]$. Écrire une fonction `dichotomie` prenant un nombre strictement positif `eps` et renvoyant un encadrement de la solution appartenant à l'intervalle $[0,n]$ à `eps` près à l'aide de ce procédé.

Exercice 12 (C4) Déterminer un équivalent *simple* des expressions suivants aux points indiqués :

1. $\sqrt{x^2+x}-x$ en $+\infty$
2. $x+\ln(x)$ en $+\infty$
3. $\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{1-\mathrm{e}^{2x}}$ en 0^+
4. $\ln(\cos(x))$ en 0
5. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\ln(x)}$ en $+\infty$
6. $2x\ln(x)-x\ln(x^2+1)$ en $+\infty$

Exercice 13 (C1-C2-C7) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose :

$$\mathrm{ch}(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\qquad\text{et}\qquad \mathrm{sh}(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(x)^2-\mathrm{sh}(x)^2=1$.
2. (a) Démontrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
   (b) Que peut-on dire de la fonction réciproque de sh (notée argsh) ? Déterminer notamment son tableau de variation.
3. Déterminer l'expression de argsh.

Exercice 14 (C1-C8) Après avoir déterminé le domaine de définition et le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes, calculer leur dérivée.

1. $a : x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2-x+1}$
2. $b : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$
3. $c : x \longmapsto \ln(\ln(x))$
4. $d : x \longmapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$
5. $e : x \longmapsto \cos(\sqrt{x})$
6. $f : x \longmapsto \tan\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$
7. $g : x \longmapsto \sqrt{\ln(x)}$
8. $h : x \longmapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$
9. $i : x \longmapsto \ln\left(\sqrt{1-x}\right)$

Indication : pour la fonction f, montrer préalablement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$$

Exercice 15 (C9) Soient a un nombre réel et f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0. On considère la fonction g définie par $g(0) = a$ et par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2x}$$

Étudier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 (C13) Déterminer les développements limités suivants :

1. $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\sin(x)^2$
2. $\mathrm{DL}_4(\pi/4)$ de $\cos(x)$
3. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\mathrm{e}^{\frac{\sin(x)}{x}}$
4. $\mathrm{DL}_2(3)$ de $\dfrac{1}{x}$
5. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$
6. $\mathrm{DL}_2(1)$ de $\sqrt{x+\sqrt{x}}$

Exercice 17 (C12) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer les inégalités suivantes :

1. pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan(x) \leqslant x$
2. pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $|\tan(x)| \geqslant |x|$
3. pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_-)^2$, $|\mathrm{e}^{a} - \mathrm{e}^{b}| \leqslant |a - b|$

Exercice 18 (C2-C6-C8-C9-C10) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Par la suite, on notera encore f ce prolongement.
2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? La courbe représentative de f admet-elle une tangente au point d'abscisse 0 ? Si oui, en donner une équation.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 19 (C2-C8) On considère la fonction :

$$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin(x)$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = 2^n \,\mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$$

Exercice 20 (C2-C8) On considère la fonction $G : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n de degré n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n(x)G(x)$$

Exercice 21 (C7-C11) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Que peut-on dire de f^{-1} ? Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.
3. Justifier que :
$$\forall x \in J, \qquad \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$
4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et que :
$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Exercice 22 (C2-C8) *Les questions* 1. *et* 2. *sont indépendantes.*

1. Soit f la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \arctan(x) + 2\arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$$
   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
   (b) En déduire une expression plus simple de f.
2. On veut montrer que :
$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad 2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$
   (a) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, on a $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan(x)^2}$.
   (b) En déduire l'égalité annoncée.

Exercice 23 (C1-C2-C7-C8-C11) On considère la fonction *cosinus hyperbolique*, notée ch, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1. (a) La fonction ch est-elle bijective si on choisit $\mathbb{R}$ comme domaine de définition ? Montrer que ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à préciser. Sa fonction réciproque est notée dans la suite argch.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathrm{ch}'(x)^2 = \mathrm{ch}(x)^2 - 1$.
2. Déterminer le tableau de variations de argch et proposer une représentation graphique de cette fonction.
3. Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}$ de argch et montrer que :
$$\forall x \in \mathcal{D}, \qquad \mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
4. Montrer enfin que :
$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad \mathrm{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

Exercice 24 (C7-C11-C13) Soit f l'application définie sur $]-1, +\infty[$ d'expression $f(x) = x^2 + \ln(x+1)$.

1. Montrer que f est une application bijective de $]-1, +\infty[$ sur un intervalle à préciser. On note φ l'application réciproque. Déterminer le tableau de variation de φ.
2. Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f puis en déduire celui de φ.
4. Montrer que $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{t}$.

Exercice 25 (C14) 1. Soit la fonction :

$$f : x \longmapsto \sqrt{x^2+3x+2}$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f puis le $\mathrm{DL}_1(+\infty)$ de f. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ et préciser les positions relatives.

(b) La courbe $\mathcal{C}_f$ présente-t-elle une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$? Si oui, préciser les positions relatives.

2. Reprendre la question 1. avec la fonction $g : x \longmapsto x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 26 (C4-C6-C8) 1. Justifier que la fonction $g : t \longmapsto \dfrac{t^2}{t^2+\sin(t)^2}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ puis montrer qu'elle est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note encore g la fonction ainsi prolongée.

2. On considère la fonction $G : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} g(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \qquad g(t) \geqslant \frac{t^2}{t^2+1}$$

(c) En déduire que G admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

Exercice 27 (C2-C4-C7-C8-C12) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \mathrm{e}$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n) \qquad \text{où} \qquad f : x \longmapsto \frac{x}{\ln(x)+1}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [1, \mathrm{e}]$.
2. Déterminer le maximum de la fonction $|f'|$ sur l'intervalle $[1, \mathrm{e}]$.
3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1}-1| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-1|$$

4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 28 (C1-C7-C11) Soit t un nombre réel positif ou nul. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathrm{P}_t(x) = x^3 + tx - 1$$

1. Montrer que le polynôme P_t admet une unique racine réelle $u(t)$.
2. On note u l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ qui, à tout nombre réel positif ou nul t, associe $u(t)$.

(a) Montrer que $u(\mathbb{R}_+) \subset]0,1]$.

(b) Démontrer que la fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)$.
Indication : utiliser l'expression de $\mathrm{P}_t(u(t))$.

(d) Montrer que l'application u est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $]0,1]$, de réciproque la fonction :

$$v : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & \dfrac{1-y^3}{y} \end{array} \right.$$

(e) Représenter graphiquement grâce au langage `python` la fonction v sur $]0,1]$.
En déduire la représentation graphique de la fonction u.

(f) Justifier que la fonction u est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(g) Démontrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis déterminer une expression de $u'(t)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}_+$ et $u(t)$.