Lycée Louis Thuillier
2-BCPST-B

Du 22 au 26 septembre 2025

Programme de colle S2

1 Remarques au colleurs

- Pour démontrer la convergence d'une série, les étudiants ne savent pour l'instant que calculer une somme partielle et étudier sa limite OU se ramener à une série usuelle.
- Le programme de colle est très long cette semaine, vous devez évidemment faire des choix, mais j'aimerais que tous les étudiants aient un calcul de série type géométrique ou exponentielle un peu modifiée pour laquelle il faut manipuler les sommes partielles.
- Les séries de Riemann ne sont pas au programme de BCPST.

2 Fiche de révision 1 : Fonctions usuelles, continuité, dérivabilité, développements limités

- fonctions usuelles : logarithmes, exponentielle (en base $a > 0$), puissances (d'exposants entiers naturels, relatifs et réels), fonctions trigonométriques, fonctions partie entière, valeur absolue, fonction arctangente)
- résolution d'(in)équations (par équivalence, en fixant préalablement la variable et en justifiant chaque étape, surtout quand on compose par une fonction ... qui doit être strictement monotone)
- calculs de limites (croissances comparées, propriétés sur les limites, utilisation éventuelle d'équivalents), équivalents usuels, propriétés sur les équivalents (en particulier : addition/soustraction et composition interdites)
- démontrer des inégalités en considérant une fonction différence
- étude de la continuité d'une fonction, notamment pour la composition
- prolongement par continuité d'une fonction en un point
- théorème des valeurs intermédiaires ((pour justifier qu'une certaine équation admet au moins une solution), théorème de la bijection (pour justifier qu'une certaine équation admet une unique solution ou pour garantir la continuité d'une application réciproque et sa stricte monotonie)
- théorème de dérivabilité des fonctions composées
- théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque
- théorème de Rolle
- théorème des accroissements finis
- fonction de classe $\mathcal{C}^n$, où $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
- développements limités usuels (en zéro), théorème de Taylor-Young
- détermination d'asymptotes horizontales, verticales ou obliques

3 Fiche de révision 2 : Suites usuelles et récurrence

- récurrences : simple, double et forte
- suites usuelles (arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques et récurrentes linéaires d'ordre deux)
- suite majorée, minorée, bornée, (strictement) croissante/décroissante, (strictement) monotone, constante, stationnaire
- théorème de convergence monotone et théorème de la limite monotone
- définition d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
- limites des suites usuelles, opérations sur les limites, croissances comparées
- théorème de composition des limites : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ et si f admet une limite L en ℓ, alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite L
- théorèmes de passage à la limite dans une inégalité, théorème d'encadrement, théorème de comparaison
- suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: utilisation pour prouver la convergence ou la divergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- suites adjacentes, propriété : deux suites adjacentes sont convergentes de limite commune

— notions de suites équivalentes, équivalents usuels pour les suites polynomiales, de $\sin(u_n)$, $1-\cos(u_n)$, $\tan(u_n)$, $\ln(1+u_n)$, $\mathrm{e}^{u_n}-1$ et $(1+u_n)^\alpha - 1$ (lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite 0)
— étude guidée de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$
— théorème sur les sommes de Riemann

4 Chapitre 4 : Polynômes

— racine d'un polynôme, racine multiple, caractérisation des racines multiples avec les dérivées successives
— factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, nombre de racines d'un polynôme
— propriétés sur le degré

5 Fiche de révision 3 : Sommes et coefficients binomiaux

— propriétés des sommes (notamment : linéarité de la somme, relation de Chasles, changement d'indices), sommes classiques à connaître :

$$\sum_{k=m}^{n} 1, \qquad \sum_{k=m}^{n} a, \qquad \sum_{k=1}^{n} k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2, \qquad \sum_{k=m}^{n} q^k \ (q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}), \qquad \text{sommes télescopiques}$$

— sommes doubles *rectangulaires* $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j}$ ou *triangulaires* $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}$
— factorielle d'un entier, coefficients binômiaux $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}$ (pour $k \in [\![0,n]\!]$), valeurs remarquables de $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n-1}$, symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
— formule du triangle de Pascal, formule du binôme de Newton

6 Chapitre 1 : Séries numériques

— notion de série numérique : somme partielle $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ d'ordre n, notations $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ pour une série, somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ pour une série convergente
— reste R_n d'ordre n d'une série convergente : $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$; la suite $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite 0
— si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente de limite 0 (la réciproque est fausse et il faut savoir donner un contre-exemple), utilisation de la forme contraposée pour régler les cas de divergence *grossière*
— l'ensemble des séries convergentes a une structure d'espace vectoriel : si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont deux séries convergentes, alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

— la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes
— les séries usuelles :
  1. la série *harmonique* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente
  2. la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (la somme n'est pas à connaître)

3. pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle (de paramètre x) $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente de somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,!} = \mathrm{e}^{\,x}$

4. pour tout $q \in \mathbb{R}$, les séries géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 0} q^n$, géométrique dérivée première $\sum\limits_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ et géométrique dérivée seconde $\sum\limits_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ convergent chacune si et seulement si $q \in]-1,1[$ et :

$$\forall q \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

5. les séries télescopiques : $\sum\limits_{k \geqslant 0} (a_{k+1} - a_k)$ (pas de résultat général : on effectue le calcul des sommes partielles directement pour conclure quant à la nature et à la somme éventuelle de la série)

7 Python

— Travail sur les listes et les tableaux (TP1)
— Méthode du balayage et méthode de dichotomie (pour la dichotomie, rappeler le principe dans l'énoncé)

8 La question de cours

Voici quelques exemples (liste non exhaustive) :

1. Donner la définition des suites adjacentes et la propriété associée.
2. Pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donner la définition de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.
3. Énoncer le théorème d'encadrement.
4. Énoncer le théorème sur les sommes de Riemann.
5. Donner le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Rappeler la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$ pour $(n,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$.
7. Énoncer le théorème des accroissements finis.
8. Énoncer les croissances comparées entre les suites puissance $(n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ (avec $\alpha > 0$), géométrique $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (avec $a > 1$) et $(n\,!)_{n \in \mathbb{N}}$.
9. Allure de la représentation graphique de la fonction arctan en précisant les asymptotes horizontales en $\pm\infty$.
10. Énoncer le théorème de la bijection.
11. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
12. Donner la définition de la partie entière d'un nombre réel.
13. Énoncer le théorème de Rolle.
14. Énoncer le théorème des accroissements finis.
15. Énoncer le théorème de Taylor-Young.
16. Développement limité de telle fonction à l'ordre ... au voisinage de 0.
17. Définir une racine d'un polynôme
18. Définir la multiplicité d'une racine d'un polynôme.
19. Énoncer les propriétés sur le degré des polynômes.
20. Énoncer la formule du binôme de Newton.
21. Rappeler la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$ pour $(n,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$.

22. Étant donnée une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, écrire le lien entre les propriétés « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ » et « la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge ».
23. Donner la condition de convergence des trois types de séries géométriques ainsi que les sommes de ces séries lorsqu'elles sont convergentes.
24. Définir la série exponentielle
25. ...