

Programme de colle S3

1 Remarques au colleurs

- J'aimerais que tous les étudiants aient un calcul de série type géométrique ou exponentielle un peu modifiée pour laquelle il faut manipuler les sommes partielles pour montrer la convergence et calculer la somme.
- Les séries de Riemann ne sont pas au programme de BCPST.

2 Fiche de révision 3 : Sommes et coefficients binomiaux

- propriétés des sommes (notamment : linéarité de la somme, relation de Chasles, changement d'indices), sommes classiques à connaître :

$$\sum_{k=m}^n 1, \quad \sum_{k=m}^n a, \quad \sum_{k=1}^n k, \quad \sum_{k=1}^n k^2, \quad \sum_{k=m}^n q^k \quad (q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}), \quad \text{sommes télescopiques}$$

- sommes doubles *rectangulaires* $\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j}$ ou *triangulaires* $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$
- factorielle d'un entier, coefficients binomiaux $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$), valeurs remarquables de $\binom{n}{0}, \binom{n}{n}, \binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n-1}$, symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- formule du triangle de Pascal, formule du binôme de Newton
- théorème des sommes de Riemann sur $[a, b]$

3 Chapitre 1 : Séries numériques

- notion de série numérique : somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, notations $\sum u_n$ pour une série, somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ pour la valeur de la limite d'une série convergente
- reste R_n d'ordre n d'une série convergente : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$; la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge de limite 0
- si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente de limite 0 (la réciproque est fausse et il faut savoir donner un contre-exemple), utilisation de la forme contraposée pour régler les cas de divergence *grossière*
- l'ensemble des séries convergentes a une structure d'espace vectoriel : si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

- la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes
- les séries usuelles :

1. la série *harmonique* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente
2. la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (la somme n'est pas à connaître)
3. pour tout $q \in \mathbb{R}$, les séries géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$, géométrique dérivée première $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et géométrique dérivée seconde $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ convergent chacune si et seulement si $q \in]-1, 1[$ et :
$$\forall q \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$
4. pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle (de paramètre x) est convergente de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
5. les séries télescopiques : $\sum (a_{k+1} - a_k)$ (pas de résultat général : on effectue le calcul des sommes partielles directement pour conclure quant à la nature et à la somme éventuelle de la série)

— **théorème de comparaison des séries à termes positifs**

On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n$$

1. si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$
2. si la série $\sum u_n$ est divergente, alors la série $\sum v_n$ diverge

— **théorème des équivalents des séries à termes positifs**

Si deux suites positives (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

— convergence absolue d'une série : définition, lien avec la convergence

4 Fiche de révision 4 : Nombres complexes, trigonométrie

- forme exponentielle d'un nombre complexe, notamment avec la technique de l'angle moitié pour $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$, résolution d'équation du type $z^n = \alpha$ en écrivant z sous forme exponentielle et en identifiant les formes exponentielles
- module d'un nombre complexe, propriétés
- utilisation de la conjugaison pour caractériser les nombres réels et les imaginaires purs
- formule d'Euler, formule de Moivre, inégalité(s) triangulaire(s), linéarité de la partie réelle et de la partie imaginaire
- formule de trigonométrie ($\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\cos(2x)$, $\sin(2x)$), procédé de linéarisation, de réduction de $a \cos(x) + b \sin(x)$ en $R \cos(x + \varphi)$, méthode de l'angle moitié, résolution d'équation et d'inéquation trigonométrique

5 Python

- Travail sur les listes et les tableaux (TP1)
- Méthode du balayage et méthode de dichotomie (pour la dichotomie, rappeler le principe dans l'énoncé)
- Tris de listes (tri par insertion, tri par sélection, tri fusion, tri rapide)

6 La question de cours

Voici quelques exemples (liste non exhaustive) :

1. Énoncer la formule du binôme de Newton.
2. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^n q^k$ pour $(n, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$.
3. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^n k$.
4. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^n k^2$.
5. Étant donnée une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, écrire le lien entre les propriétés « $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ » et « la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ».
6. Donner la condition de convergence des trois types de séries géométriques ainsi que les sommes de ces séries lorsqu'elles sont convergentes.
7. Définir la série exponentielle.
8. Énoncer le théorème de comparaison des séries à termes positifs.
9. Énoncer le théorème des équivalents des séries à termes positifs.
10. Définir la convergence absolue d'une série et donner son lien avec la convergence de la série.
11. Définition du module d'un nombre complexe.
12. Si α est un nombre réel quelconque, rappeler les solutions de l'équation $\cos(x) = \cos(\alpha)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
13. Énoncer les formules d'Euler.
14. Énoncer la formule de Moivre.
15. Appliquer la méthode de l'angle moitié à $1 + e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
16. Donner les différentes formes d'un nombre complexe et les liens entre elles.
17. ...