Lycée Louis Thuillier — Année 2025-2026
BCPST2 — 20/09/2025

Devoir surveillé 1 (3h - Calculatrice interdite)

Exercice 1.

Pour $x \in]0,+\infty[$ on pose : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

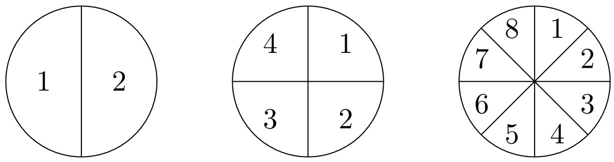
1. (a) Étudier les variations de la fonction $f: x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).
   (b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.
2. Informatique.
   (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1 (a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```python
from numpy import exp
def fonc_1(a):
    u=1
    n=0
    while ......:
        u=exp(-u)/u
        n=....
    return n
```

   (b) Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.
3. Pour $x \in [0,+\infty[$ on pose : $g(x)=\mathrm{e}^{-x}-x^2$.
   (a) Démontrer que la fonction $g: x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]-\infty,1]$.
   (b) En déduire que l'équation $f(x)=x$, d'inconnue x, possède une unique solution dans l'intervalle $]0,+\infty[$, que l'on notera α.
   (c) Justifier que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$. On rappelle que $\mathrm{e} \approx 2,7$.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} > \alpha$ et $u_{2n+1} < \alpha$.
   (e) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, les signes de $g(u_{2n})$ et de $g(u_{2n+1})$.
4. (a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.
   (b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. *(On pensera à faire apparaître la fonction g pour utiliser la question 3e.)*
   (c) En déduire les variations de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ puis justifier sa convergence.
5. Pour $x \in]0,+\infty[$ on pose : $h(x)=f\circ f(x)$. On pose également $h(0)=0$.
   (a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer l'expression de $h(x)$ en fonction de $g(x)$ et de x.
   (b) Démontrer que la fonction $h: x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
   (c) Démontrer que l'équation $h(x)=x$, d'inconnue x, admet exactement deux solutions sur $[0,+\infty[$ qui sont 0 et α, où α est le réel introduit à la question 3b.
   (d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
6. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ? Est-elle majorée ?

Exercice 2.

Un forain organise un jeu de fléchettes dans une fête foraine. Le jeu se présente sous la forme de trois cibles A, B et C. La cible A est séparée en deux secteurs, la cible B est séparée en quatre secteurs et la cible C est séparée en 8 secteurs.



A **B** **C**

Le jeu consiste à lancer des fléchettes sur les cibles successives selon le protocole suivant :

- On commence par la cible A. Il faut atteindre le secteur 1 de cette cible pour avoir le droit de passer à la cible B ; dans le cas contraire on continue à lancer la fléchette en direction de la cible A.
- De même, lorsqu'on lance une fléchette en direction de la cible B, il faut atteindre le secteur 1 pour avoir le droit de passer à la cible C ; dans le cas contraire, on continue les lancers vers la cible B.
- Enfin le joueur ne lance qu'une fois la fléchette en direction de la cible C. Le secteur qu'il atteint décide du lot qu'il gagne.

On suppose que le joueur atteint toujours la cible visée et que pour une cible donnée les secteurs atteints le sont de manière équiprobable. On suppose que le joueur continue de lancer des fléchettes autant de fois qu'il est nécessaire pour avoir le droit de passer à la cible C.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement : « lors du lancer de la n-ème fléchette le joueur tire vers la cible A », de probabilité a_n. On définit de même l'événement B_n et sa probabilité b_n.

Le joueur commençant par la cible A on a donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

1. (a) Calculer les probabilités a_2 et b_2.

   (b) Calculer b_3 et vérifier que $b_3 = \dfrac{5}{8}$.

2. En utilisant la formule des probabilités totales, justifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_n$$

3. (a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche les valeurs de a_n et de b_n, l'entier $n \geq 1$ étant donné par l'utilisateur.

```
1 n=int(input('n?'))
2 a=1
3 b=0
4 for i in range(2,n+1):
5         b=...
6         a=...
7 print(b,a)
```

   (b) Si on échange les lignes 5 et 6 le résultat affiché est-il le même ? Pourquoi ?

4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

5. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $v_n = 2^{n-1}b_n + 2$.

   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est géométrique et en déduire son expression en fonction de n pour tout entier naturel $n \geq 1$.

   (b) Établir que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $b_n = 2 \times \dfrac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \dfrac{2}{2^{n-1}}$.

(c) Déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$. Est-ce cohérent avec la situation pratique simulée ?

Exercice 3.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on définit le polynôme de $\mathbb{C}[X]$:

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left((X+i)^n - (X-i)^n\right)$$

1. Premières propriétés.
   (a) Déterminer P_1, P_2 et P_3.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire P_n sous forme développée et en déduire que P_n appartient à $\mathbb{R}[X]$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la parité du polynôme P_n ?
2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ et $|z-i| = |z+i|$ alors $z \in \mathbb{R}$.
   En déduire, sans les calculer explicitement, que toutes les racines de P_n sont réelles.
   (b) On admet que les racines de P_n sont les réels distincts $\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, avec $\operatorname{cotan} = \frac{\cos}{\sin}$. En déduire la factorisation de P_n en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
3. Étude d'une suite.
   On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

   (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On notera α sa limite.
   (c) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 0 \leq \alpha - u_n \leq \frac{1}{n}$.
   Indiquer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée à 10^{-5} près de α.
4. Calcul d'une somme. On fixe $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer qu'il existe un polynôme R_n dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$P_{2n+1}(X) = R_n\left(X^2\right)$$

   (b) Quel est le degré, noté d_n, du polynôme R_n ? Calculer les coefficients de X^{d_n} et de $X^{d_n - 1}$ de $R_n(X)$.
   (c) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) > 0$.
   (d) Montrer les seules racines de $R_n(X)$ sont les $\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ où $k \in [\![1, n]\!]$. En déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
   (e) En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$$

5. Calcul de α.

On pose désormais, pour tout $k \in \mathbb{N} : \theta_k = \dfrac{k\pi}{2n+1}$.

(a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction tan, montrer que, pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$: $\theta \leq \tan(\theta)$, puis à la fonction sin, montrer que, pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$: $0 < \sin(\theta) \leq \theta$.

(b) En déduire que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\operatorname{cotan}^2(\theta_k) \leq \frac{1}{\theta_k^2} \leq 1 + \operatorname{cotan}^2(\theta_k)$$

(c) En déduire un encadrement de u_n pour $n \geq 1$, puis la valeur exacte de α.