

Chapitre 4

Polynômes

1 Résolution d'une équation de degré 2 à coefficients réels

Proposition 1.0.1. Pour résoudre l'équation de degré 2 à coefficients réels

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

on calcule son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double $x = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

2 Qu'est-ce qu'un polynôme ?

Définition 2.0.1. Un **polynôme** sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ d'indéterminée X est une expression de la forme :

$$P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$$

où $n \in \mathbb{N}$. Ses coefficients sont $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Si $a_n \neq 0$, le **degré de P** est n , ce qui se note $\deg(P) = n$. Le **coefficient dominant** de P est alors a_n .

Par convention, $\deg(O_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$.

Notation 2.0.2.

- On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition 2.0.1. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

1. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.
3. $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.

3 Qu'est-ce qu'une racine ?

Définition 3.0.1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ est une **racine de P** si $P(\alpha) = 0$.

Théorème 3.0.1. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

α est **racine de P** si et seulement si **P est factorisable par $(X - \alpha)$**
si et seulement si $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X - \alpha)Q$.

Proposition 3.0.2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P , alors $\bar{\alpha}$ aussi.

Proposition 3.0.3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si P est de degré impair alors P admet au moins une racine réelle.

Théorème 3.0.4 (Théorème de D'Alembert-Gauss ou théorème fondamental de l'algèbre).

Toute équation algébrique à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Ainsi, tout polynôme de degré n s'écrivant $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ peut s'écrire sous la forme

$$P = a_n (X - x_1) \times (X - x_2) \times \dots \times (X - x_n)$$

où $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.

Les x_i ne sont pas forcément tous distincts.

C'est ce qu'on appelle la **forme factorisée** d'un polynôme : on l'écrit comme produit de polynômes de degré 1.

Corollaire 3.0.5. Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

Corollaire 3.0.6. Un polynôme de degré inférieur ou égal à n ayant au moins $n + 1$ racines, comptées avec leur ordre de multiplicité, est nul.

Définition 3.0.2. Soit α une racine de P . On dit que son **ordre de multiplicité** est $k \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si :

$$P \text{ est factorisable par } (X - \alpha)^k \text{ et pas par } (X - \alpha)^{k+1}$$

ou encore :

$$P = (X - \alpha)^p \times Q \text{ avec } Q(\alpha) \neq 0$$

Proposition 3.0.7. Soit α une racine de P .

α est une racine multiple de P si et seulement si $P'(\alpha) = 0$.

Proposition 3.0.8. Soit α une racine de P . α est racine d'ordre k si et seulement si on a :

$$\begin{cases} \forall \ell < k, P^{(\ell)}(\alpha) = 0 \\ P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$