

Correction du devoir surveillé 1 (3h - Calculatrice interdite)

Exercice 1.

Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).

La fonction f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles qui le sont, avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

Soit $x > 0$, on calcule :

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x} \times 1}{x^2} = -e^{-x} \frac{x+1}{x^2} < 0.$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0

- (b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$ » est vraie.

— *Initialisation* :

Pour $n = 0$, on a u_0 qui existe par définition et $u_0 = 1 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— *Hérédité* :

Soit $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Comme $u_n > 0$ et que f est définie sur $]0, +\infty[$, $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. De plus, d'après la question 1a, $f(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$, donc $u_{n+1} > 0$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— *Conclusion* :

Par principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n > 0}$.

2. Informatique.

- (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
1 from numpy import exp
2 def fonc_1(a):
```

```

3     u=1
4     n=0
5     while .....:
6         u=exp(-u)/u
7         n=....
8     return n

```

On veut renvoyer le plus petit entier n tel que $u_n > a$ donc on continue le `while` tant que $u_n \leq a$, et n augmente de 1 à chaque tour de boucle.

```

1  from numpy import exp
2  def fonc_1(a):
3      u=1
4      n=0
5      while u<=a:
6          u=exp(-u)/u
7          n=n+1
8      return n

```

- (b) Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n .

On propose la fonction suivante :

```

1  def Suite(n):
2      u=1
3      for k in range(n):
4          u=exp(-u)/u
5      return u

```

3. Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose : $g(x) = e^{-x} - x^2$.

- (a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $] -\infty, 1]$.

La fonction g est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$ comme somme de fonctions usuelles qui le sont.

On calcule pour $x \geq 0$:

$$g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0.$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	1	$-\infty$



Ainsi, g est une fonction continue et strictement décroissante de $[0, +\infty[$ dans $] -\infty, 1]$.

D'après le théorème de la bijection, on déduit que

g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $] -\infty, 1]$.

- (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$, que l'on notera α .

Soit $x > 0$, on a :

$$f(x) = x \iff \frac{e^{-x}}{x} = x \iff e^{-x} = x^2 \iff g(x) = 0.$$

D'après la question 3a, g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $] -\infty, 1]$, or $0 \in] -\infty, 1]$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0, +\infty[$.

Comme $g(0) = 1 \neq 0$, on a $\alpha \neq 0$, donc

L'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$.

- (c) Justifier que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. On rappelle que $e \approx 2,7$.

On calcule $g(1) = e^{-1} - 1 < 0$ car $\frac{1}{e} < 1$. De plus,

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1/e} - \left(\frac{1}{e}\right)^2 = \left(\frac{1}{e}\right)^{\left(\frac{1}{e}\right)} - \left(\frac{1}{e}\right)^2.$$

Or $0 < \frac{1}{e} < 1$, et pour $a \in]0, 1[$, si $b < c$ alors $a^b > a^c$, donc comme $\frac{1}{e} < 2$, on a $a^{1/e} - a^2 > 0$, et donc $g\left(\frac{1}{e}\right) > 0$.

Puisque g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $] -\infty, 1]$, sa restriction à $\left] \frac{1}{e}, 1 \right[$ réalise une bijection dans $\left] g(1), g\left(\frac{1}{e}\right) \right[$. Or $0 \in \left] g(1), g\left(\frac{1}{e}\right) \right[$ donc $\alpha \in \left] \frac{1}{e}, 1 \right[$.

- (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} > \alpha$ et $u_{2n+1} < \alpha$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) : « u_{2n} > \alpha »$ est vraie.

— *Initialisation* :

Pour $n = 0$, on sait d'après l'énoncé que $u_0 = 1$ et d'après la question précédente $1 > \alpha$ donc $u_0 > \alpha$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— *Hérédité* :

Soit $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} u_{2n} > \alpha &\iff f(u_{2n}) < f(\alpha) \text{ par stricte décroissance de } f \\ &\iff u_{2n+1} < \alpha \\ &\iff f(u_{2n+1}) > f(\alpha) \text{ par stricte décroissance de } f \\ &\iff u_{2n+2} > \alpha \\ &\iff u_{2(n+1)} > \alpha \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{2(n+1)} > \alpha$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— *Conclusion* : Par principe de récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} > \alpha$.

Montrons la seconde inégalité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a d'après la récurrence précédente

$$\begin{aligned} u_{2n} > \alpha &\iff f(u_{2n}) < f(\alpha) \text{ par stricte décroissance de } f \\ &\iff u_{2n+1} < \alpha \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} < \alpha}$.

- (e) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, les signes de $g(u_{2n})$ et de $g(u_{2n+1})$.

D'après le tableau de variations de g , g est positive sur $[0, \alpha]$ et négative sur $[\alpha, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$, par la question 3d, on a :

$$u_{2n+1} < \alpha \Rightarrow \boxed{g(u_{2n+1}) > 0} \text{ et } u_{2(n+1)} > \alpha \Rightarrow \boxed{g(u_{2n}) < 0}.$$

4. (a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

On a $u_0 = 1$ d'après l'énoncé. Ainsi, $u_1 = e^{-1}$ et $u_2 = \frac{e^{-e^{-1}}}{e^{-1}} = e^{-e^{-1}+1}$. Or $-e^{-1} + 1 > 0$, donc par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e^{-e^{-1}+1} > 1$, donc $\boxed{u_2 > u_0}$.

- (b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. (On pensera à faire apparaître la fonction g pour utiliser la question 3e.)

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On calcule :

$$\begin{aligned} u_{2(n+1)} - u_{2n} &= u_{2n+2} - u_{2n} \\ &= f(u_{2n+1}) - u_{2n} \\ &= f\left(\frac{e^{-u_{2n}}}{u_{2n}}\right) - u_{2n} \\ &= \frac{e^{-\frac{e^{-u_{2n}}}{u_{2n}}}}{\frac{e^{-u_{2n}}}{u_{2n}}} - u_{2n} \\ &= u_{2n} e^{-\frac{e^{-u_{2n}}}{u_{2n}} + u_{2n}} - u_{2n} \\ &= u_{2n} \left(e^{-\frac{e^{-u_{2n}}}{u_{2n}} + u_{2n}} - 1 \right) \\ &= u_{2n} \left(e^{\frac{-e^{-u_{2n}} + (u_{2n})^2}{u_{2n}}} - 1 \right) \\ &= u_{2n} \left(e^{\frac{-g(u_{2n})}{u_{2n}}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Or par question 1b, on a $u_{2n} > 0$. De plus, par question 3e on a :

$$g(u_{2n}) < 0.$$

Ainsi, $\frac{-g(u_{2n})}{u_{2n}} > 0$ donc par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on obtient $e^{\frac{-g(u_{2n})}{u_{2n}}} > 1$.

Ainsi, $u_{2(n+1)} - u_{2n} > 0$

On a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)} > u_{2n}}$, donc $\boxed{\text{la suite } (u_{2n}) \text{ est croissante}}$.

- (c) En déduire les variations de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ puis justifier sa convergence.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a montré que $u_{2n+1} > u_{2n}$. Par stricte décroissance de la fonction f (question 1a), on obtient donc :

$$f(u_{2n+1}) < f(u_{2n}) \iff u_{2n+3} < u_{2n+1} \iff u_{2(n+1)+1} < u_{2n+1},$$

donc la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus, par question 1b, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, donc la suite (u_n) est minorée par 0, donc sa suite extraite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est elle aussi minorée par 0.

Ainsi, par théorème de convergence monotone, on déduit que

la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

5. Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

- (a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer l'expression de $h(x)$ en fonction de $g(x)$ et de x .

Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} h(x) &= f(f(x)) \\ &= f\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \\ &= \frac{e^{\frac{-e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}} \\ &= x e^{\frac{-e^{-x}}{x} + x} \\ &= x e^{\frac{-g(x)}{x}} \end{aligned}$$

donc $h(x) = x e^{\frac{-g(x)}{x}}$.

- (b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

h est continue sur $]0, +\infty[$ comme composée de la fonction f avec elle même, la fonction f étant continue sur $]0, +\infty[$.

On a vu que $g(0) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-g(x)}{x} = -\infty$.

Par composition des limites et continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-g(x)}{x}} = 0,$$

et donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0.$$

La définition de la fonction donne $h(0) = 0$. Ainsi, h est continue en 0. Ainsi,

h est continue sur $[0, +\infty[$.

- (c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions sur $[0, +\infty[$ qui sont 0 et α , où α est le réel introduit à la question 3b.

Soit $x = 0$, on a $h(0) = 0$ donc 0 est solution de $h(x) = x$.

Soit $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}h(x) = x &\iff x e^{\frac{-g(x)}{x}} = x \\&\iff e^{\frac{-g(x)}{x}} = 1 \text{ car } x \neq 0 \\&\iff \frac{-g(x)}{x} = 0 \\&\iff g(x) = 0 \text{ car } x \neq 0 \\&\iff x = \alpha \text{ par question 3b}\end{aligned}$$

Ainsi, les seules solutions de l'équation $h(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+$ sont 0 et α .

(d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

On a montré en questions 1b et 3d que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{2n+1} < \alpha$ et en question 4c que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et convergente vers une limite finie $\ell \in [0, \alpha]$.

La suite (u_{2n+1}) est définie par la relation $u_{2(n+1)+1} = h(u_{2n+1})$. La fonction h est continue sur $[0, +\infty[$, donc par passage à la limite :

$$\ell = h(\ell).$$

Ainsi, les seules limites finies possibles pour la suite (u_{2n+1}) sont $\ell = 0$ et $\ell = \alpha$ d'après la question précédente. Comme la suite (u_{2n+1}) est décroissante, elle ne peut pas converger vers son majorant. C'est donc que $\ell = 0$.

6. La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ admet-elle une limite ? Est-elle majorée ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{2n} = f(u_{2n-1})$.

Comme on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n-1} = 0$, par composition des limites et continuité de f sur $]0, +\infty[$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = +\infty.$$

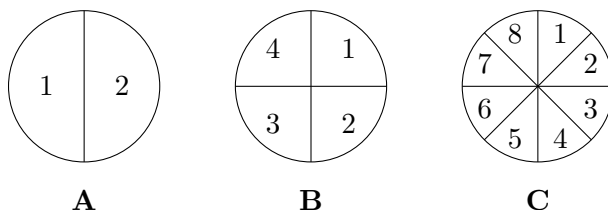
La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite croissante et divergente.

Par contraposée du théorème de la limite monotone, on en déduit que

la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Exercice 2.

Un forain organise un jeu de fléchettes dans une fête foraine. Le jeu se présente sous la forme de trois cibles A , B et C . La cible A est séparée en deux secteurs, la cible B est séparée en quatre secteurs et la cible C est séparée en 8 secteurs.



Le jeu consiste à lancer des fléchettes sur les cibles successives selon le protocole suivant :

- On commence par la cible A . Il faut atteindre le secteur 1 de cette cible pour avoir le droit de passer à la cible B ; dans le cas contraire on continue à lancer la fléchette en direction de la cible A .
- De même, lorsqu'on lance une fléchette en direction de la cible B , il faut atteindre le secteur 1 pour avoir le droit de passer à la cible C ; dans le cas contraire, on continue les lancers vers la cible B .
- Enfin le joueur ne lance qu'une fois la fléchette en direction de la cible C . Le secteur qu'il atteint décide du lot qu'il gagne.

On suppose que le joueur atteint toujours la cible visée et que pour une cible donnée les secteurs atteints le sont de manière équiprobable. On suppose que le joueur continue de lancer des fléchettes autant de fois qu'il est nécessaire pour avoir le droit de passer à la cible C .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement : « lors du lancer de la n -ème fléchette le joueur tire vers la cible A », de probabilité a_n . On définit de même l'événement B_n et sa probabilité b_n .

Le joueur commençant par la cible A on a donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

1. (a) Calculer les probabilités a_2 et b_2 .

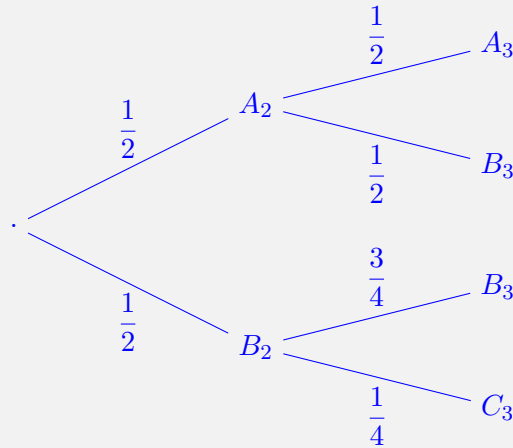
Le joueur commence par la cible A . Avec sa première fléchette, il peut :

- soit toucher le secteur 1 de la cible A et donc passer à la cible B , avec une probabilité $\frac{1}{2}$,
- soit toucher le secteur 2 de la cible A et donc rester à la cible A , avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

Ainsi $a_2 = b_2 = \frac{1}{2}$.

- (b) Calculer b_3 et vérifier que $b_3 = \frac{5}{8}$.

On peut modéliser la situation par l'arbre de probabilités suivant :



Les évènements A_2 et B_2 forment un système complet d'évènements, donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

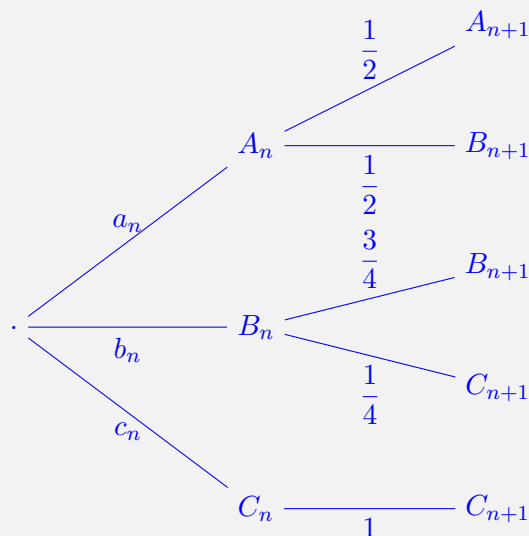
$$\begin{aligned}
 P(B_3) &= P(A_2 \cap B_3) + P(B_2 \cap B_3) \\
 &= P_{A_2}(B_3)P(A_2) + P_{B_2}(B_3)P(B_2) \text{ par formule des probas composées} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{5}{8}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on a bien $b_3 = \frac{5}{8}$.

2. En utilisant la formule des probabilités totales, justifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut modéliser la situation par l'arbre de probabilités suivant :



Les évènements (A_n, B_n, C_n) forment un système complet d'évènements donc d'après

la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + 0 + 0 \text{ par formule des probas composées} \end{aligned}$$

autrement dit,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n.$$

De même,

$$P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1})P(C_n)$$

autrement dit,

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}b_n + 0.$$

3. (a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche les valeurs de a_n et de b_n , l'entier $n \geq 1$ étant donné par l'utilisateur.

```
1 n=int(input('n?'))
2 a=1
3 b=0
4 for i in range(2,n+1):
5     b=...
6     a=...
7 print(b,a)
```

L'algorithme complété est le suivant :

```
1 n=int(input('n?'))
2 a=1
3 b=0
4 for i in range(2,n+1):
5     b=1/2*a+3/4*b
6     a=1/2*a
7 print(b,a)
```

- (b) Si on échange les lignes 5 et 6 le résultat affiché est-il le même ? Pourquoi ?

Si on échange les lignes 5 et 6 le résultat affiché n'est pas le même, puisque la valeur de a est modifiée avant de calculer le nouveau terme de b . Plus précisément, le programme afficherait alors les valeurs de a_n et b_n si (b_n) était défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $b_n = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{3}{4}b_n$.

4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

On sait que $a_1 = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$. Donc $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $a_1 = 1$.

En particulier, par propriété des suites géométriques, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

5. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $v_n = 2^{n-1}b_n + 2$.

- (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est géométrique et en déduire son expression en fonction de n pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Calcul de v_1 :

$$v_1 = 2^{1-1}b_1 + 2 = 2^0 \times 0 + 2 = 2.$$

Calcul de v_{n+1} :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2^n b_{n+1} + 2 \\ &= 2^n \left(\frac{1}{2} a_n + \frac{3}{4} b_n \right) + 2 \\ &= 2^n \times \frac{1}{2} a_n + 2^n \times \frac{3}{4} b_n + 2 \\ &= 2^{n-1} a_n + 2^{n-1} \times \frac{3}{2} b_n + 2. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant l'expressions de a_n obtenue en question 4, il vient :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2^{n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 2^{n-1} \times \frac{3}{2} b_n + 2 \\ &= 1 + \frac{3}{2} \times 2^{n-1} b_n + 2 \\ &= \frac{3}{2} \times 2^{n-1} b_n + 3 \\ &= \frac{3}{2} (2^{n-1} b_n + 2) \\ &= \frac{3}{2} v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est géométrique de raison $q = \frac{3}{2}$ et de premier terme

$v_1 = 2$. En particulier, par propriété des suites géométriques, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

- (b) Établir que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $v_n = 2^{n-1}b_n + 2$, donc $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}(v_n - 2)$. Puis, en utilisant l'expression de v_n déterminée à la question précédente, on obtient :

$$b_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left(2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 2 \right) = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}.$

- (c) Déterminer les limites des suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. Est-ce cohérent avec la situation pratique simulée ?

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, et $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}} = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$, or $-1 < \frac{3}{4} < 1$ et $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

Ces deux résultats sont tout à fait cohérents avec la situation modélisée puisque le joueur va au bout d'un temps fini atteindre les secteurs 1 des cibles A et B et passer à la cible C .

Exercice 3.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on définit le polynôme de $\mathbb{C}[X]$:

$$P_n(X) = \frac{1}{2i} ((X+i)^n - (X-i)^n)$$

1. Premières propriétés.

- (a) Déterminer P_1 , P_2 et P_3 .

$$P_1(X) = \frac{1}{2i} (X+i - (X-i)) = 1.$$

$$\begin{aligned} P_2(X) &= \frac{1}{2i} ((X+i)^2 - (X-i)^2) \\ &= \frac{1}{2i} (X^2 + 2iX - 1 - (X^2 - 2iX + 1)) \\ &= \frac{1}{2i} (4iX) \\ &= 2X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(X) &= \frac{1}{2i} ((X+i)^3 - (X-i)^3) \\ &= \frac{1}{2i} (X^3 + 3iX^2 - 3X - i - (X^3 - 3iX^2 - 3X + i)) \\ &= \frac{1}{2i} (6iX^2 - 2i) \\ &= 3X^2 - 1 \end{aligned}$$

Donc

$$P_1(X) = 1, \quad P_2(X) = 2X, \quad P_3(X) = 3X^2 - 1.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire P_n sous forme développée et en déduire que P_n appartient à $\mathbb{R}[X]$.

En appliquant la formule du binôme de Newton on obtient :

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k X^{n-k} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-i)^k X^{n-k} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (i^k - (-i)^k) X^{n-k} \right). \end{aligned}$$

Et

$$i^k - (-i)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 2i^k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \frac{1}{2i} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} 2i^k X^{n-k} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} i^{k-1} X^{n-k}. \end{aligned}$$

Or si k est impair, $k-1$ est pair et donc $i^{k-1} = \pm 1$.

Donc $P_n \in \mathbb{R}[X]$.

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .

D'après la question précédente,

$$P_n(X) = \binom{n}{1} i^0 X^{n-1} + \sum_{\substack{k=3 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} i^{k-1} X^{n-k}.$$

Donc P_n est de degré $n-1$ et son coefficient dominant est n .

- (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la parité du polynôme P_n ?

Le polynôme P_n ne possédant que des termes de degrés $n-k$ avec k impair. Donc si n est pair les termes sont de degrés impairs et donc P_n est impair sinon les termes sont de degrés pairs et donc P_n est pair.

Donc P_n est de même parité que $n+1$.

2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ et $|z-i| = |z+i|$ alors $z \in \mathbb{R}$.

En déduire, sans les calculer explicitement, que toutes les racines de P_n sont réelles.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$. Montrons que si $|z-i| = |z+i|$

alors $b = 0$.

$$\begin{aligned} |z - i| = |z + i| &\iff |z - i|^2 = |z + i|^2 \\ &\iff a^2 + (b - 1)^2 = a^2 + (b + 1)^2 \\ &\iff b^2 - 2b + 1 = b^2 + 2b + 1 \\ &\iff b = 0. \end{aligned}$$

Donc $z \in \mathbb{R}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P_n . Alors $(z + i)^n = (z - i)^n$. On en déduit par propriété des modules que

$$|z - i|^n = |z + i|^n.$$

En appliquant la racine n -ième à cette égalité on en déduit que $|z - i| = |z + i|$.

Donc d'après ce qui précède $z \in \mathbb{R}$.

Donc les racines de P_n sont réelles.

- (b) On admet que les racines de P_n sont les réels distincts $\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, avec $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$. En déduire la factorisation de P_n en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

On en déduit que :

$$P_n(X) = n \prod_{k=1}^{n-1} (X - \cotan(k\pi/n)).$$

3. Étude d'une suite.

On considère les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

- (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Montrons que la suite (u_n) est croissante :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

Montrons que la suite (v_n) est décroissante :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{(n+1)^2 n} \\
&= \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{(n+1)^2 n} \\
&= \frac{-1}{(n+1)^2 n} < 0
\end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

Et enfin

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0.$$

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge. On notera α sa limite.

Comme les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes on en déduit qu'elles convergent vers la même limite.

Donc (u_n) converge.

(c) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \alpha - u_n \leq \frac{1}{n}$.

Indiquer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée à 10^{-5} près de α .

Comme la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq \alpha \leq v_n.$$

Et

$$\begin{aligned}
u_n \leq \alpha \leq v_n &\iff 0 \leq \alpha - u_n \leq v_n - u_n \\
&\iff 0 \leq \alpha - u_n \leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left[0 \leq \alpha - u_n \leq \frac{1}{n} \right].$$

De plus

$$\frac{1}{n} \leq 10^{-5} \iff n \geq 10^5.$$

Donc pour avoir une valeur approchée de α il suffit de calculer u_{10^5} .

4. Calcul d'une somme. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme R_n dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$P_{2n+1}(X) = R_n(X^2)$$

D'après la question 1b,

$$\begin{aligned}
 P_{2n+1}(X) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^{k-1} X^{2n+1-k} \\
 &= \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} i^{2p+1-1} X^{2n+1-(2p+1)} \\
 &= \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{2(n-p)}
 \end{aligned}$$

Donc

$$R_n(X) = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{n-p}$$

convient.

- (b) Quel est le degré, noté d_n , du polynôme R_n ? Calculer les coefficients de X^{d_n} et de X^{d_n-1} de $R_n(X)$.

Immédiatement d'après la question précédente, R_n est de degré $d_n = n$.

Le coefficient dominant est donc $2n+1$ et

$$\text{le coefficient de } X^{d_n-1} \text{ est } -\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}.$$

- (c) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) > 0$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $0 < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) > 0$, d'où le fait que

$$\cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) > 0.$$

- (d) Montrer les seules racines de $R_n(X)$ sont les $\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ où $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la question 2b on a :

$$P_{2n+1}\left(\cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) = 0 = R_n\left(\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).$$

Donc $\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ est une racine de R_n .

On a donc n racines distinctes de R_n (car $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) > 0$) et R_n est de degré n . Donc $x \in \mathbb{R}$ est une racine de R_n si et seulement si il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x = \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Donc

$$R_n(X) = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left(X - \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \right).$$

(e) En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=1}^n \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) = \frac{n(2n-1)}{3}$$

En identifiant les coefficients de degré $n-1$ dans l'expression factorisée de R_n et dans l'expression développée on obtient

$$-(2n+1) \sum_{k=1}^n \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) = -\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}.$$

En simplifiant on obtient alors

$$\sum_{k=1}^n \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

5. Calcul de α .

On pose désormais, pour tout $k \in \mathbb{N} : \theta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$.

- (a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $\tan$, montrer que, pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[: \theta \leq \tan(\theta)$, puis à la fonction $\sin$, montrer que, pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[: 0 < \sin(\theta) \leq \theta$.

Comme $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\sin(\theta) > 0$.

Appliquons maintenant le théorème des accroissements finis aux fonctions $\sin$ et $\tan$ sur l'intervalle $[0, \theta]$.

Les fonctions $\sin$ et $\tan$ sont dérivables (et donc continues) sur $[0, \theta]$. Donc il existe $(c, d) \in]0, \theta[$ tel que

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta} = \cos(c), \quad \frac{\tan(\theta)}{\theta} = 1 + \tan^2(d).$$

Comme $\cos(c) \leq 1$ et $1 + \tan^2(d) \geq 1$ on en déduit en multipliant par θ que

$$0 < \sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta).$$

- (b) En déduire que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\cotan^2(\theta_k) \leq \frac{1}{\theta_k^2} \leq 1 + \cotan^2(\theta_k)$$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $\theta_k \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et donc d'après la question précédente

$$0 < \sin(\theta_k) \leq \theta_k \leq \tan(\theta_k) \iff 0 < \sin(\theta_k)^2 \leq \theta_k^2 \leq \tan(\theta_k)^2$$

car $x \mapsto x^2$ est
st. croissante
sur $\mathbb{R}_+$

$$\iff \frac{1}{\tan(\theta_k)^2} \leq \frac{1}{\theta_k^2} \leq \frac{1}{\sin(\theta_k)^2}$$

car $x \mapsto 1/x$ est
st. décroissante
sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\iff \cotan(\theta_k)^2 \leq \frac{1}{\theta_k^2} \leq \frac{\cos^2(\theta_k) + \sin^2(\theta_k)}{\sin(\theta_k)^2}$$

$$\iff \cotan(\theta_k)^2 \leq \frac{1}{\theta_k^2} \leq 1 + \frac{\cos^2(\theta_k)}{\sin(\theta_k)^2}$$

$$\iff \cotan(\theta_k)^2 \leq \frac{1}{\theta_k^2} \leq 1 + \cotan(\theta_k)^2$$

Donc

$$\cotan(\theta_k)^2 \leq \frac{1}{\theta_k^2} \leq 1 + \cotan(\theta_k)^2.$$

- (c) En déduire un encadrement de u_n pour $n \geq 1$, puis la valeur exacte de α .

En sommant les relations précédentes pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a

$$\sum_{k=1}^n \cotan(\theta_k)^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\theta_k^2} \leq n + \sum_{k=1}^n \cotan(\theta_k)^2.$$

Or d'après l'égalité de la question 4e et l'expression de θ_k on a alors

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^n \frac{(2n-1)^2}{k^2 \pi^2} \leq n + \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Par linéarité de la somme on en déduit que

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \frac{(2n-1)^2}{\pi^2} u_n \leq n + \frac{n(2n-1)}{3}.$$

D'où

$$\boxed{\frac{n\pi^2}{3(2n-1)} \leq u_n \leq \frac{n\pi^2}{(2n-1)^2} + \frac{n\pi^2}{3(2n-1)}}.$$

Les termes gauche et droite de l'inégalité tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$ en $+\infty$ donc d'après le théorème d'encadrement

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}}.$$