
Devoir maison 2

Exercice 1.

Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

1. Déterminer la nature des séries suivantes et calculer éventuellement leur somme :

(a) $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (b) $\sum_{n \geq 0} \frac{2n-1}{5^n}$ (c) $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)$

2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+2^{2n}}$ est convergente de somme inférieure ou égale à $\frac{4}{3}$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n}$. On s'intéresse dans cette question à la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

(a) Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

(b) Conclure.

Exercice 2.

L'objectif de cet exercice est de justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$ pour tout

$\alpha \in [1, +\infty[$ et de donner une expression de la somme de cette série à l'aide d'une intégrale.

1. À l'aide de Python, proposer un programme qui permet, pour la valeur $\alpha = 2$, de vérifier informatiquement que la série mentionnée ci-dessus est convergente. Proposer une valeur approchée de la somme de la série.

Soit $\alpha \in [1, +\infty[$. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+\alpha}, \quad u_n = S_{2n} \quad \text{et} \quad v_n = S_{2n+1}$$

2. (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(b) Conclure que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$ converge.

3. Cette série est-elle absolument convergente ? Justifier.

4. Dans cette question, nous allons obtenir une *forme intégrale* de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$.

(a) Pour tout entier naturel k , calculer $\int_0^1 t^{k+\alpha-1} dt$.

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1} - (-1)^{n+1} t^{n+\alpha}}{1+t} dt$$

(c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+\alpha}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+\alpha+1}$$

puis conclure que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$$

5. Calculer la somme de la série évoquée à la question 1.