

Correction du devoir maison 2

Exercice 1.

Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

1. Déterminer la nature des séries suivantes et calculer éventuellement leur somme :

$$(a) \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (b) \sum_{n \geq 0} \frac{2n-1}{5^n} \quad (c) \sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)$$

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{puis} \quad n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

et donc, par composition des limites, la fonction exponentielle étant continue sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow 1} e^x = e \neq 0$$

On en déduit donc que :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ est (grossièrement) divergente}$$

(b) Pour tout entier naturel n , on a :

$$\frac{2n-1}{5^n} = 2n \left(\frac{1}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{2}{5}n \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Comme $\frac{1}{5} \in]-1, 1[$, les séries géométrique $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ et géométrique dérivée première $\sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ sont convergentes. Comme l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, on peut conclure que :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 0} \frac{2n-1}{5^n} \text{ est convergente}$$

de somme égale à (par linéarité de la somme) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n-1}{5^n} = \frac{2}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}_{=0 \text{ si } n=0} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{2}{5} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{5}\right)^2} - \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$\text{c'est-à-dire } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n-1}{5^n} = -\frac{5}{8}.$$

(c) Notons $(S_n)_{n \geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série proposée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{2k+1}{2k-1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln(2k+1) - \sum_{k=1}^n \ln(2k-1) && \text{par linéarité de la somme} \\ &= \sum_{k=1}^n \ln(2k+1) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \ln(2\ell+1) && \text{en posant } \ell = k-1 \\ &= \ln(2n+1) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} && \text{par sommes télescopiques} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ donc :

la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)$ est divergente

2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+2^{2n}}$ est convergente de somme inférieure ou égale à $\frac{4}{3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $n+2^{2n} \geq 2^{2n} > 0$ (puisque $n \geq 0$) et donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{1}{n+2^{2n}} \leq \frac{1}{\underbrace{2^{2n}}_{=\left(\frac{1}{4}\right)^n}}$$

Or la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est convergente car sa raison vérifie $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc, d'après le théorème de majoration des séries à termes positifs :

la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+2^{2n}}$ est convergente

On sait également que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2^{2n}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Donc :

la somme de la série est inférieure ou égale à $\frac{4}{3}$

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n}$. On s'intéresse dans cette question à la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

(a) Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - n}{n} = \frac{|n| \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - n}{n} = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \quad (\text{car } n \geq 0)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$ donc :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

(b) Conclure.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} n^2 + 1 \geq n^2 &\iff \sqrt{n^2 + 1} \geq n \\ &\iff \sqrt{n^2 + 1} - n \geq 0 \\ &\iff u_n \geq 0 \end{aligned}$$

Donc $\sum u_n$ est une série à termes positifs. De plus la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Donc par linéarité la série $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge. Ainsi d'après le théorème d'équivalence des séries à termes positifs la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 2.

L'objectif de cet exercice est de justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n + \alpha}$ pour tout

$\alpha \in [1, +\infty[$ et de donner une expression de la somme de cette série à l'aide d'une intégrale.

1. À l'aide de Python, proposer un programme qui permet, pour la valeur $\alpha = 2$, de vérifier informatiquement que la série mentionnée ci-dessus est convergente. Proposer une valeur approchée de la somme de la série.

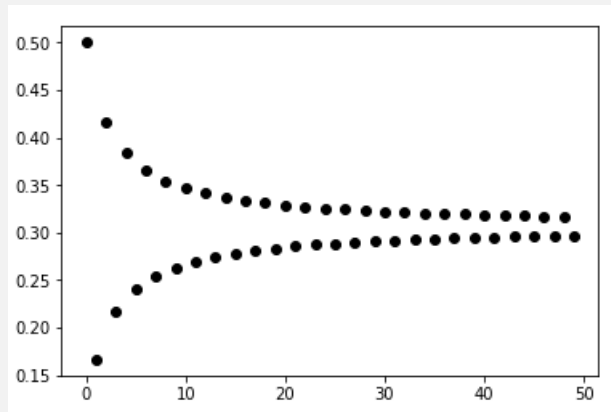
On commence par écrire une fonction qui permet de calculer les sommes partielles de la série.

```
1 def somme_partielle(n) :
2     """alpha vaut 2"""
3     s = 0
4     for k in range(n+1) :
5         s += (-1)**k/(k+2)
6     return s
```

On représente ensuite les 50 premiers termes (par exemple) de la suite des sommes partielles de la série.

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 X = [n for n in range(50)]
4 Y = [somme_partielle(x) for x in X]
5 plt.plot(X,Y,'o')
6 plt.show()
```

On obtient :



On peut effectivement conjecturer que :

la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+2}$ est convergente de somme approximativement égale à 0,3

Soit $\alpha \in [1, +\infty[$. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+\alpha}, \quad u_n = S_{2n} \quad \text{et} \quad v_n = S_{2n+1}$$

2. (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1+\alpha} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2+\alpha} && \text{par relation de Chasles} \\ &= -\frac{1}{2n+1+\alpha} + \frac{1}{2n+2+\alpha} && \left(\begin{array}{l} \text{car } 2n+1 \text{ est impair et} \\ 2n+2 \text{ est pair} \end{array} \right) \\ &= -\frac{1}{(2n+1+\alpha)(2n+2+\alpha)} \leq 0 \end{aligned}$$

puisque le dénominateur est strictement positif. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. De la même manière :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(2n+2+\alpha)(2n+3+\alpha)} \geq 0$$

donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Enfin (en utilisant encore la relation de Chasles) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1+\alpha} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2n+1+\alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On peut donc conclure que :

les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes

- (b) Conclure que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n + \alpha}$ converge.

D'après la question 2a, les suites extraites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Ces deux suites extraites sont donc convergentes de limite commune. Par conséquent, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n + \alpha}$ est convergente. Autrement dit :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n + \alpha} \text{ est convergente}$$

3. Cette série est-elle absolument convergente ? Justifier.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left| \frac{(-1)^n}{n + \alpha} \right| \sim \frac{1}{n}.$$

De plus la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc d'après le théorème d'équivalence des séries à termes positifs $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n + \alpha} \right|$ diverge.

Donc $\sum \frac{(-1)^n}{n + \alpha}$ n'est pas absolument convergente.

4. Dans cette question, nous allons obtenir une *forme intégrale* de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \alpha}$.

- (a) Pour tout entier naturel k , calculer $\int_0^1 t^{k+\alpha-1} dt$.

On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 t^{k+\alpha-1} dt = \left[\frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha} \right]_0^1 = \frac{1}{k+\alpha}$$

- (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1} - (-1)^{n+1} t^{n+\alpha}}{1+t} dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 4a, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k+\alpha-1} dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k+\alpha-1} \right) dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 t^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^n (-t)^k \right) dt && \text{par linéarité de la somme} \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, la somme $\sum_{k=0}^n (-t)^k$ est celle des termes d'une suite géométrique de raison $-t \neq 1$ (puisque $t \neq -1$ si $0 \leq t \leq 1$) donc :

$$S_n = \int_0^1 t^{\alpha-1} \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} dt$$

En distribuant $t^{\alpha-1}$ au numérateur pour tout $t \in [0, 1]$, on obtient bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1} - (-1)^{n+1} t^{n+\alpha}}{1+t} dt$$

(c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+\alpha}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+\alpha+1}$$

puis conclure que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$. Alors $1+t \geq 1 > 0$ donc $0 \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. En multipliant par $t^{n+\alpha} \geq 0$, on obtient :

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq \frac{t^{n+\alpha}}{1+t} \leq t^{n+\alpha}$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes d'intégration sont dans le bon sens), il vient :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+\alpha}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+\alpha} dt$$

L'intégrale de droite a été calculée à la question 4a. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+\alpha}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+\alpha+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 4b et par linéarité de l'intégrale, on a :

$$S_n = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+\alpha}}{1+t} dt \quad (\diamond)$$

puisque $-(-1)^{n+1} = (-1)^2(-1)^n = (-1)^n$. Or $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc, en multipliant les inégalités il vient :

$$-\frac{1}{n+\alpha+1} \leq (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+\alpha}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+\alpha+1}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pm 1}{n+\alpha+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+\alpha}}{1+t} dt = 0$ d'après le théorème des gendarmes. L'égalité $(\diamond)$ implique donc que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$. Comme $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série

$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$, on peut conclure que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$$

5. Calculer la somme de la série évoquée à la question 1.

Comme $2 \in [1, +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+2}$ est convergente de somme :

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = \left[t - \ln(1+t)\right]_0^1 = 1 - \ln(2)$$

Donc :

$$\text{la somme cherchée est } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = 1 - \ln(2)$$