
TD 3 Correction - Variables aléatoires discrètes

Compétences à acquérir :

- ▷ C1 : Déterminer la loi d'une variable aléatoire (univers image et probabilités associées)
- ▷ C2 : Reconnaître les différentes situations relatives aux lois usuelles : Bernoulli, binomiale, uniforme, géométrique et Poisson et connaître toutes leurs caractéristiques
- ▷ C3 : Étudier l'existence d'une espérance, d'une variance et les calculer en cas d'existence
- ▷ C4 : Utiliser le théorème de transfert
- ▷ C5 : Connaître les propriétés des espérances et des variances
- ▷ C6 : Utiliser les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev
- ▷ C7 : Utiliser l'une des méthodes usuelles : déterminer la loi d'une somme de va discrètes, la loi d'une va discrète définie conditionnellement à une autre ou la loi du min ou du max de va discrètes

Exercice 1 (C2)  Pour chacune des expériences suivantes, déterminer la loi de la grandeur observée (on rappellera notamment l'univers image et les probabilités associées).

On note X chacune des grandeurs mises en jeu.

1. On lance 10 dés équilibrés et on observe la nombre de lancers qui amènent un 1.
On peut supposer que tous les dés sont différents (ou que le tirage est successif). On répète 10 fois la même épreuve de Bernoulli (lancer un dé) de succès « obtenir un 1 » dont la probabilité vaut $\frac{1}{6}$ (puisque les dés sont équilibrés). Les dix lancers sont mutuellement indépendants et X comptabilise le nombre de succès obtenus donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{6}\right)$. En particulier :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, 10 \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, 10 \rrbracket, P(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

2. On lance des flèches sur une cible (de manière indépendante) et on observe le premier lancer qui atteint la cible. On a une chance sur cinq d'atteindre la cible et on suppose que les tirs sont indépendants.
La variable aléatoire X correspond au rang du premier succès lors de la répétition d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes (pour chaque tir, la probabilité de succès étant constante égale à $1/5$) donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right)$. En particulier :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

3. Un couple a 5 enfants. On compte le nombre de ceux qui ont les yeux bleus. La probabilité d'avoir les yeux bleus est supposée égale à $\frac{1}{3}$.
On répète 5 fois la même épreuve de Bernoulli (avoir un enfant) dont le succès (l'enfant a les yeux bleus) a pour probabilité $\frac{1}{3}$. Ces épreuves sont mutuellement indépendants

(au sens où la probabilité de succès est constante). De plus, X comptabilise le nombre d'enfants ayant les yeux bleus donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5, \frac{1}{3}\right)$. En particulier :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, 5 \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket, P(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$$

4. Michel descend dans un escalier de 300 marches en sautant 100 fois. À chaque fois, il saute aléatoirement une ou deux marches de manière indépendante des autres sauts. On compte le nombre de fois où Michel a fait un saut d'une seule marche.

On répète 100 fois la même épreuve de Bernoulli (sauter d'une ou deux marches) dont le succès (sauter d'une marche) a pour probabilité $\frac{1}{2}$. De plus, ces différentes épreuves sont mutuellement indépendantes par hypothèse et X comptabilise le nombre de sauts d'une marche donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$. En particulier :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, 100 \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, 100 \rrbracket, P(X = k) = \binom{100}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{100-k} = \frac{\binom{100}{k}}{2^{100}}$$

5. On tire une boule d'une urne contenant dix boules blanches et deux noires et on remet la boule avant le tirage suivant. On observe le tirage donnant pour la première fois une boule noire.

On répète indéfiniment la même épreuve de Bernoulli (tirer une boule de l'urne). Ces épreuves sont mutuellement indépendantes car il y a remise après chaque tirage et le succès (obtenir une boule noire) a pour probabilité $\frac{1}{6}$. La variable aléatoire X correspondant au rang d'apparition du premier succès est donc telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$. En particulier :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

6. On tire une boule d'une urne contenant dix boules blanches et deux noires et on remet la boule avant le tirage suivant. On observe le nombre de boules blanches tirées avant la première noire.

En notant ici Y la grandeur observée, on a l'égalité $Y = X - 1$ où X est la variable aléatoire de la question 7. On trouve que :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, P(Y = k) = P(X = k + 1) \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^k \quad (\text{car } k + 1 \in \mathbb{N}^*)$$

En fait, Y suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $\frac{1}{6}$.

Exercice 2 (C2-C4)  Une urne contient 100 jetons numérotés de 1 à 100. On effectue $n \in \mathbb{N}^*$ tirages avec remise. Soit X le nombre de jetons tirés qui portent un numéro multiple de 3.

1. Déterminer la loi et l'espérance de X .

Comptons le nombre d'entiers multiples de 3 compris entre 1 et 33. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$1 \leq 3m \leq 100 \iff 1 \leq m \leq 33$$

Il y a donc 33 multiples de 3 compris entre 1 et 100. Comme le tirage des jetons s'effectue avec remise, on répète n fois, de façon indépendante, la même épreuve de Bernoulli (qui consiste à choisir un jeton dans l'urne) dont le succès « obtenir un jeton dont le numéro est un multiple de 3 » a pour probabilité $\frac{33}{100}$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès à l'issue de ces n tirages donc :

$$X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{33}{100} : X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{33}{100}\right)$$

En particulier :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et pour tout } k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{33}{100}\right)^k \left(\frac{67}{100}\right)^{n-k}$$

De plus, $E(X) = \frac{33n}{100}$.

2. Déterminer l'espérance de $(-1)^X$.

La variable aléatoire $(-1)^X$ a une espérance puisque son univers image est fini. D'après le théorème de transfert, on a :

$$E((-1)^X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(-\frac{33}{100}\right)^k \left(\frac{67}{100}\right)^{n-k}$$

et donc, d'après la formule du binôme de Newton :

$$E((-1)^X) = \left(\frac{34}{100}\right)^n = \left(\frac{17}{50}\right)^n$$

3. Calculer la probabilité que X soit pair.

On a $(X \text{ pair}) = \bigcup_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}} (X = k)$ et comme les événements de cette réunion de cette égalité sont deux à deux incompatibles, on a l'égalité :

$$P(X \text{ pair}) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n P(X = k)$$

D'après la question 3., on sait que :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k P(X = k) = \left(\frac{17}{50}\right)^n$$

De plus, comme $\{(X = k) \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est un système complet d'événement, on a aussi :

$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$$

En sommant ces deux égalités, on obtient (par linéarité de la somme) :

$$\sum_{k=0}^n (1 + (-1)^k) P(X = k) = 1 + \left(\frac{17}{50}\right)^n$$

Or :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad 1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'égalité précédente se réécrit donc :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n 2 P(X = k) = 1 + \left(\frac{17}{50}\right)^n$$

En divisant par 2, on obtient finalement :

$$\boxed{P(X \text{ pair}) = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{17}{50}\right)^n\right)}$$

Exercice 3 (C1-C3)  Une urne contient une boule blanche et une boule noire. Si on tire une boule noire, la partie s'arrête, sinon, on remet la boule et on rajoute une blanche. X étant le nombre de tirages effectués, déterminer sa loi et son espérance si elle existe. On commence par remarquer que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ puisque le tirage de la boule noire peut survenir à n'importe quel tour.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i l'évènement « Piocher une boule blanche au tirage i » et N_i « Piocher une boule blanche au tirage i ».

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, déterminons $P(X = k)$:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \\ &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) \dots P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-2}}(B_{k-1})P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) \\ &\quad \text{par formule des probabilités composées généralisée} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{3} \dots \frac{1 + (k-2)}{2 + (k-2)} \frac{1}{2 + (k-1)} \\ &= \frac{(k-1)!}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{k(k+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$.

Déterminons si X admet une espérance. X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X = k)$ est absolument convergente, c'est-à-dire, si la série de terme général $\frac{1}{k+1}$ est absolument convergente.

On pose pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}$. On reconnaît la somme partielle de la série de terme général $\frac{1}{j}$ qui diverge.

Ainsi, X n'admet pas d'espérance.

Exercice 4 (C1-C2-C3)  Une puce se déplace sur l'axe des abscisses à partir de l'origine. À chaque seconde, elle saute d'une unité vers la droite avec une probabilité $p \in]0, 1[$ ou vers la gauche avec une probabilité $1 - p$. Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n le nombre de sauts vers la droite effectués et X_n la position de la puce après n secondes.

1. Écrire une fonction `position` qui prend pour argument un entier n et un nombre réel $p \in]0, 1[$ et qui renvoie l'abscisse de la puce au bout de n secondes.

On génère aléatoirement un nombre réel entre 0 et 1 pour simuler la probabilité p .

```

1 from random import *
2 def puce(n) :
3     position = 0
4     for k in range(n) :
5         x = random()
6         if (x < p) :
7             position += 1
8         else :
9             position -= 1
10    return position

```

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Déterminer la loi de Y_n .

La puce saute vers la gauche ou vers la droite à chaque seconde et ceci de manière indépendante des autres sauts. On répète donc n fois une épreuve de Bernoulli de façon indépendante, où le succès est : « la puce a sauté vers la droite » (dont la probabilité vaut p). Comme Y_n compte le nombre de succès obtenus, on peut conclure que :

la variable aléatoire Y_n suit la loi binomiale de paramètres n et p : $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

Ainsi, $Y_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et, pour tout $k \in Y_n(\Omega)$, on a $P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

(b) Donner le lien entre Y_n et X_n . En déduire la loi de X_n , son espérance et sa variance. Le nombre de sauts effectués par la puce est égal à n . Le nombre de sauts qu'elle effectue vers la gauche est donc égal à $n - Y_n$ (puisque'elle effectue Y_n sauts vers la droite). On a la relation :

$$X_n = Y_n + (-1) \times (n - Y_n)$$

puisque'il faut compter négativement les sauts vers la gauche (la puce recule). Autrement dit :

$$X_n = 2Y_n - n$$

Déterminons la loi de X_n . Son univers image est $X_n(\Omega) = \{2k - n \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors :

$$P(X_n = 2k - n) = P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Les variables aléatoires X_n et Y_n admettent une espérance et une variance car leurs univers images sont finis. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(X_n) = 2E(Y_n) - n = 2np - n = n(2p - 1)$$

puisque $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et :

$$V(X_n) = 2^2 V(Y_n) = 4np(1-p)$$

(c) Pour quelles valeurs de p la variable X_n est-elle centrée ? Commenter.

La variable aléatoire X_n est centrée si et seulement si $E(X_n) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $p = \frac{1}{2}$. Cela signifie que s'il y a équiprobabilité sur la direction du saut (gauche ou droite), alors la position moyenne de la puce est l'origine du repère, c'est-à-dire sa position initiale.

COMMENTAIRE

La variable aléatoire X_n ne suit pas une loi binomiale. L'univers image de X_n est inclus dans $\llbracket -n, n \rrbracket$ mais il n'est pas égal (on va de deux en deux en commençant à $-n$).

Exercice 5 (C1-C2-C3)  On effectue des lancers d'un dé truqué tel que la probabilité que le dé donne un cinq soit $p \in]0, 1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement « le lancer numéro i a amené un cinq ». Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note N_k le plus petit nombre de lancers nécessaires pour obtenir exactement k cinq avec le dé.

1. Quelle est la loi de S_n ?

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire X_i prend la valeur 1 si le $i^{\text{ème}}$ lancer a donné un cinq et 0 sinon. Par conséquent, S_n comptabilise le nombre de cinq obtenus à l'issue des n lancers. Les lancers de dés sont indépendants donc :

la variable aléatoire S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p

En particulier :

$$S_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et pour tout } k \in S_n(\Omega), \quad P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- 2.(a) Écrire une fonction **S** qui prend n et p en arguments et donne la valeur de S_n .

On utilise la commande **random()** pour simuler la probabilité p .

```

1 from random import random
2 def S(n,p) :
3     s = 0
4     for k in range(n) :
5         x = random()
6         if (x < p) :
7             s = s+1
8     return s

```

- (b) Écrire une fonction **N** qui prend k et p en arguments et donne la valeur de N_k .

On utilise ici une boucle **while**.

```

1 def N(n,p) :
2     nombre = 0
3     i = 0
4     while (i <= k) :
5         x = random()
6         nombre += 1
7         if (x < p) :
8             i = i+1
9     return nombre

```

- 3.(a) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(N_k = m)$ en utilisant les variables aléatoires S_n et X_n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Dire que l'événement $(N_k = m)$ est réalisé signifie que pour obtenir k cinq, il faut exactement m lancers. Cela revient à dire que $S_{m-1} = k-1$ ($m-1$ lancers ont donné exactement $k-1$ cinq) et $X_m = 1$ car on a obtenu un succès au lancer m .
Donc :

$$(N_k = m) = (S_{m-1} = k-1) \cap (X_m = 1)$$

(b) En déduire la loi de N_k .

L'univers image de N_k est $N_k(\Omega) = \llbracket k, +\infty \rrbracket$ (car il faut au moins k lancers pour obtenir k cinq). Soit $m \in N_k(\Omega)$. Alors :

$$\begin{aligned} P(N_k = m) &= P(S_{m-1} = k-1)P(X_m = 1) \text{ par indépendance des lancers} \\ &= \binom{m-1}{k-1} p^k (1-p)^{m-k} \end{aligned}$$

4. Calculer l'espérance de N_2 si elle existe.

La loi de probabilité de N_2 est donnée par :

$$\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad P(N_2 = m) = (m-1)p^2(1-p)^{m-2}$$

La variable aléatoire N_2 admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{m \geq 2} m P(N_2 = m)$ est absolument convergente, c'est-à-dire convergente car cette série est à termes positifs. Soit $m \geq 2$, on pose $T_m = \sum_{j=2}^m j P(N_2 = j)$. On a :

$$\begin{aligned} T_m &= \sum_{j=2}^m j(j-1)p^2(1-p)^{j-2} \\ &= p^2 \sum_{j=2}^m j(j-1)(1-p)^{j-2} \end{aligned}$$

On reconnaît une somme partielle de série géométrique dérivée seconde de raison $1-p$, or $|1-p| < 1$ donc elle converge. Ainsi, N_2 admet une espérance et :

$$\begin{aligned} E(N_2) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n \\ &= p^2 \frac{2}{(1-(1-p))^3} \\ &= \frac{2}{p} \end{aligned}$$

Exercice 6 (C2)  On lance une pièce truquée jusqu'à ce qu'elle tombe sur *face* pour la première fois. On note $p \in]0, 1[$ la probabilité que la pièce tombe sur *face*.

1. Écrire une fonction `experience` qui prend en argument la probabilité p que la pièce donne *face* et qui renvoie la liste des lancers obtenus jusqu'à l'obtention du premier *face*. On utilise `random()` pour simuler la probabilité d'obtenir *face*. On renvoie une liste de piles jusqu'au premier *face*. La longueur de la liste est alors le rang d'obtention du premier *face*.

```
1 from random import *
2 def experience(p) :
3     L = []
4     x = random()
5     while (x > p) :
6         L.append('Pile')
7         x = random()
```

```

8     L.append('Face')
9     return L, len(L)

```

- 2.(a) Quelle est la probabilité que le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier *face* soit pair ?

Notons X la variable aléatoire correspondant au numéro du lancer où on obtient *face* pour la première fois. On répète la même épreuve de Bernoulli (lancer un dé) de manière indépendante, dont le succès (obtenir *face*) a pour probabilité p . La variable aléatoire X correspond au rang d'obtention du premier succès. Donc X suit la loi géométrique de paramètre p . En particulier :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$$

On a l'égalité $(X \text{ pair}) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = 2k)$. Comme les événements $(X = 2k)$ (où $k \in \mathbb{N}^*$)

sont deux à deux incompatibles et puisque P est une probabilité, la série $\sum_{k \geq 1} P(X = 2k)$ est convergente de somme $P(X \text{ pair})$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 P(X \text{ pair}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - p)^{2k-1}p = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - p)^{2(k-1)}(1 - p)p \\
 &= p(1 - p) \sum_{k=1}^{+\infty} ((1 - p)^2)^{k-1} \\
 &= p(1 - p) \sum_{\ell=0}^{+\infty} ((1 - p)^2)^\ell
 \end{aligned}$$

en utilisant le changement d'indice $\ell = k - 1$. La somme de la série géométrique (convergente) de raison $(1 - p)^2$ fournit :

$$P(X \text{ pair}) = \frac{p(1 - p)}{1 - (1 - p)^2} = \frac{1 - p}{2 - p}$$

- (b) Estimer cette probabilité par une fréquence lorsque $p = 1/4$ à l'aide de l'outil informatique.

On génère un grand nombre de fois N la fonction `experience` (pour $p = 1/4$). À chaque fois, on vérifie si le deuxième argument de sortie de cette fonction, c'est-à-dire X , est pair. Si c'est le cas, on incrémente un compteur. On réalise enfin une moyenne.

```

1 def frequence(N) :
2     s = 0
3     for k in range(N) :
4         L, X = experience(0.25)
5         if X%2 == 0 :
6             s = s+1
7     return s/N

```

3. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur *face* après le a^{e} lancer (au sens large).

Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On cherche la probabilité de l'événement $(X \geq a)$. On a :

$$(X \geq a) = \bigcup_{k=a}^{+\infty} (X = k)$$

Les événements mis en jeu dans cette réunion sont deux à deux incompatibles donc, puisque P est une probabilité, la série $\sum_{k \geq a} P(X = k)$ est convergente de somme $P(X \geq a)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= \sum_{k=a}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=a}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p = p(1-p)^{a-1} \sum_{k=a}^{+\infty} (1-p)^{k-a} \\ &= p(1-p)^{a-1} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1-p)^{\ell} \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $\ell = k - a$. En utilisant la somme de la série géométrique (convergente) de raison $1 - p$, on obtient finalement :

$$P(X \geq a) = \frac{p(1-p)^{a-1}}{1 - (1-p)} = (1-p)^{a-1}$$

Exercice 7 (C1-C3-C4)  Soient λ un nombre réel et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda 3^{-n}$$

Soit X une variable aléatoire réelle discrète d'univers image égal à $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $P(X = n) = a_n$.

1. Déterminer la valeur de λ .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Une probabilité étant positive ou nulle, on a nécessairement $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
- On sait que $\{(X = n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un système quasi-complet d'événements donc la série $\sum_{n \geq 0} P(X = n)$ est convergente de somme égale à 1. On résout :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1 &\iff \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 && \text{par linéarité de la somme} \\ &\iff \lambda \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1 && \text{somme d'une série géométrique (convergente)} \\ &\iff \frac{3}{2}\lambda = 1 \\ &\iff \lambda = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Finalement :

$$\text{la valeur de } \lambda \text{ cherchée est } \lambda = \frac{2}{3}$$

2. Si elles existent, calculer l'espérance et la variance de X .

On sait que X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} n P(X = n)$ est absolument convergente, c'est-à-dire si et seulement si elle converge car elle est à termes positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$n P(X = n) = \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{9} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Comme $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$, la série géométrique dérivée première $\sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ est convergente.

L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel donc la série $\sum_{n \geq 0} n P(X = n)$ converge de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n P(X = n) = \frac{2}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Finalement :

la variable aléatoire X admet une espérance qui vaut $E(X) = \frac{1}{2}$

D'après le théorème de Koenig-Huygens, la variable aléatoire X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre deux et une espérance (ce deuxième point a déjà été établi) et, dans ce cas, on a l'égalité :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \frac{1}{4}$$

D'après le théorème de transfert, on sait que aussi que X admet un moment d'ordre deux si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} n^2 P(X = n)$ converge absolument, c'est-à-dire converge car cette série est à termes positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$n^2 P(X = n) = \frac{2}{3} n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{27} n(n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{2}{9} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Comme $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$, les séries géométriques dérivées première $\sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ et seconde

$\sum_{n \geq 2} n(n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ convergent. L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel

donc la série $\sum_{n \geq 0} n^2 P(X = n)$ est convergente de somme :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0} n^2 P(X = n) &= \frac{2}{27} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{2}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{27} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Finalement :

la variable aléatoire X admet une variance qui vaut $V(X) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

3. Calculer alors l'espérance des variables aléatoires $X(X+1)$ et $X \mathbf{1}_{(X \text{ pair})}$ si elles existent. On a vu à la question 2. que les variables aléatoires X^2 et X admettent une espérance. Par linéarité :

la variable aléatoire $X(X+1)$ admet une espérance qui vaut $E(X^2) + E(X) = \frac{3}{2}$

Par définition, $X \mathbf{1}_{(X \text{ est pair})} = \begin{cases} X & \text{si } X \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Cette variable aléatoire, notée Y , admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} 2n P(X = 2n)$ est absolument convergente, c'est-à-dire convergente car cette série est à termes positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$2n P(X = 2n) = \frac{4}{3} n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \frac{4}{3} n \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{4}{27} n \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

Comme $\frac{1}{9} \in]-1, 1[$, la série géométrique dérivée première $\sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$ est convergente.

L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel donc :

Y admet une espérance et $E(Y) = \frac{4}{27} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{4}{27} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2} = \frac{3}{16}$

Exercice 8 (C1-C2-C3-C7)

1. On lance un dé équilibré jusqu'à ce qu'on obtienne le premier as. On note T le numéro du lancer correspondant. Déterminer la loi de T , son espérance et sa variance.

On répète indéfiniment la même épreuve de Bernoulli (à savoir lancer un dé) dont la probabilité de succès vaut $\frac{1}{6}$ (car le dé est équilibré). Ces épreuves sont mutuellement indépendantes. De plus, la variable aléatoire T correspond au rang d'obtention du premier succès donc :

la variable aléatoire T suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$, c'est-à-dire :

$$T(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, P(T = n) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

De plus, on sait que T admet une espérance et une variance qui valent $E(T) = 6$ et $V(T) = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{36}} = 30$

2. Calculer $P(T > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme l'univers image de $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et puisque $n+1 \geq 1$, on a l'égalité

$(T > n) = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} (T = k)$. Les événements $(T = k)$ (où $k \geq n+1$) sont deux à deux

incompatibles et P est une probabilité donc la série $\sum_{k \geq n+1} P(T = k)$ converge de somme

$P(T > n)$:

$$\begin{aligned}
 P(T > n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(T = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\
 &= \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-(n+1)} \quad (\text{par linéarité de la somme}) \\
 &= \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^n \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{\ell} \\
 &= \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^n \times \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} \\
 &= \left(\frac{5}{6}\right)^n
 \end{aligned}$$

en utilisant la somme de la série géométrique (convergente) de raison $\frac{5}{6}$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(T > n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

3. On dispose de trois dés équilibrés qu'on lance simultanément. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir au moins un as.

- (a) Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier as avec le k^{e} dé. Exprimer N en fonction de X_1 , X_2 et X_3 .

La variable aléatoire prend la valeur minimale parmi les valeurs prises par X_1 , X_2 et X_3 . Autrement dit :

$$\boxed{N = \min(X_1, X_2, X_3)}$$

- (b) Pour tout entier naturel k , calculer $P(N > k)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
 P(N > k) &= P(\min(X_1, X_2, X_3) > k) = P((X_1 > k) \cap (X_2 > k) \cap (X_3 > k)) \\
 &= P(X_1 > k) P(X_2 > k) P(X_3 > k)
 \end{aligned}$$

car les lancers sont mutuellement indépendants (les événements $(X_1 > k)$, $(X_2 > k)$ et $(X_3 > k)$ le sont donc également). Par ailleurs, X_1 , X_2 et X_3 suivent la même loi que T par définition de ces variables ; elles ont donc la même loi et suivent la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$. En utilisant la question 2., on a donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(N > k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{3k}}$$

(c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k P(N = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(N > k) - n P(N > n)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P(N = k) = P(N > k - 1) - P(N > k)$ donc, par linéarité de la somme,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k P(N = k) &= \sum_{k=1}^n k P(N > k - 1) - \sum_{k=1}^n k P(N > k) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell + 1) P(N > \ell) - \sum_{k=0}^n k P(N > k) \quad (\text{changement d'indice } \ell = k - 1) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell P(N > \ell) + \sum_{\ell=0}^{n-1} P(N > \ell) - \sum_{k=0}^n k P(N > k) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, par télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k P(N = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(N > k) - n P(N > n)$$

(d) En déduire que N admet une espérance que l'on déterminera.

Par définition, la variable aléatoire N (dont l'univers image est $\mathbb{N}^*$) admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 1} k P(X = k)$ est absolument convergente, c'est-à-dire

convergente car la série est à termes positifs. Notons $(S_n)_{n \geq 1}$ la suite des sommes partielles de cette série. D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} P(N > k) - n P(N > n)$$

En utilisant la question 3.(b), on a d'une part (par croissances comparées et puisque $(\frac{5}{6})^3 \in]-1, 1[$) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n P(N > n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6} \right)^{3n} = 0$$

et, d'autre part (en utilisant la somme d'une suite géométrique de raison $(\frac{5}{6})^3 \neq 1$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(N > k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{5}{6} \right)^{3k} = \frac{1 - \left(\frac{5}{6} \right)^{3n}}{1 - \left(\frac{5}{6} \right)^3}$$

Comme $(\frac{5}{6})^3 \in]-1, 1[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(N > k) = \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6} \right)^3}$$

Finalement, la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente donc :

la variable aléatoire N admet une espérance qui vaut :

$$E(N) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6} \right)^3}$$

COMMENTAIRE

Ça ressemble à l'espérance associée à une loi géométrique, non ? (bien sûr ça ne prouve rien, cf. question suivante)

- (e) Montrer que N suit une loi usuelle et retrouver l'espérance de N .

L'univers image de N est $\mathbb{N}^*$ (puisque ce sont les univers images de X_1 , X_2 et X_3 et car $N = \min(X_1, X_2, X_3)$). De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} P(N = n) &= P(N > n - 1) - P(N > n) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)} - \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} \quad (\text{d'après la question 3.(b) et car } (n-1, n) \in \mathbb{N}^2) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)} \underbrace{\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3\right]}_{=p} \\ &= p(1 - p)^{n-1} \end{aligned}$$

On peut donc conclure que :

la variable aléatoire suit la loi géométrique de paramètre $p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$;
l'espérance de N vaut donc $E(N) = \frac{1}{p} = \dots$

Exercice 9 (C2-C4-C5)  Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer, si elles existent, $E(X + 1)$ et $E\left(\frac{1}{X + 1}\right)$.

Comme X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, elle admet une espérance qui vaut λ . De plus, la variable aléatoire constante égale à 1 admet aussi une espérance (qui vaut 1). Donc :

la variable aléatoire $X + 1$ admet une espérance qui vaut (par linéarité de l'espérance) $E(X + 1) = E(X) + 1 = \lambda + 1$

Étude de l'espérance de la variable aléatoire $\frac{1}{X + 1}$ notée Y

★ Tout d'abord, la variable aléatoire Y est bien définie puisque X ne prend pas la valeur -1 (en effet, $X(\Omega) = \mathbb{N}$).

★ D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $\frac{1}{X + 1}$ admet une espérance

si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n + 1} P(X = n)$ est absolument convergente, c'est-à-

dire convergente, puisque cette série est à termes positifs. Notons $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de cette série. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k + 1} P(X = k) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k + 1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{(k + 1)!}$$

Le changement d'indice $\ell = k + 1$ fournit :

$$S_n = e^{-\lambda} \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{\lambda^{\ell-1}}{\ell!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{\ell=0}^{n+1} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} - 1 \right)$$

Or $\sum_{\ell=0}^{n+1} \frac{\lambda^\ell}{\ell!}$ est la somme partielle d'ordre $n + 1$ de la série exponentielle de paramètre λ dont on sait qu'elle converge. Ainsi, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} - 1 \right) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^\lambda - 1)$$

Finalement :

la variable aléatoire Y admet une espérance qui vaut $E(Y) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$

2. Montrer que $\frac{1}{E(X+1)} \leq E\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

D'après la question 1., on a (puisque $\lambda > 0$ et $\lambda + 1 > 0$) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{E(X+1)} \leq E\left(\frac{1}{X+1}\right) &\iff \frac{1}{\lambda+1} \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \\ &\iff \lambda \leq (\lambda+1)(1-e^{-\lambda}) \\ &\iff (\lambda+1)e^{-\lambda} - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

La fonction $f : x \mapsto (x+1)e^{-x} - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x} \leq 0$$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leq f(0) \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) \leq 0$$

Comme $\lambda > 0$, on a bien $f(\lambda) = (\lambda+1)e^{-\lambda} - 1 \leq 0$. Autrement dit :

$$\boxed{\frac{1}{E(X+1)} \leq E\left(\frac{1}{X+1}\right)}$$

3. La fonction `poisson` du module `random` de `numpy`, sous la forme `poisson(a,n)`, permet de simuler un échantillon de taille n de la loi de Poisson de paramètre a (l'argument d'entrée n est facultatif). L'argument de sortie est un tableau (ou un seul nombre pour `poisson(a)`).

Construire une fonction `Y` qui prend comme argument un nombre réel a et qui renvoie une valeur simulée de la variable aléatoire $Y = \frac{1}{X+1}$. Proposer une estimation de l'espérance de Y en utilisant la fonction `Y`.

On utilise la fonction `poisson` à un paramètre.

```
1 from numpy import random as rd
2 def Y(a) :
3     x = rd.poisson(a)
4     y = 1/(x+1)
5     return y
```

On utilise une fréquence pour renvoyer une estimation de l'espérance de Y .

```
1 from numpy import random as rd
2 def frequence(a,N) : # prendre N grand
3     s = 0
4     for k in range(N) :
5         s = s+Y(a)
6     return s/N
```

Exercice 10 (C1-C2)  Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Justifier la convergence des séries $\sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ pair}}} \frac{\lambda^n}{n!}$ et $\sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ impair}}} \frac{\lambda^n}{n!}$ et calculer leurs sommes en consi-

dérant les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{(-\lambda)^n}{n!}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\lambda^n}{n!} + \frac{(-\lambda)^n}{n!} = \begin{cases} 2\frac{\lambda^n}{n!} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda^n}{n!} - \frac{(-\lambda)^n}{n!} = \begin{cases} 2\frac{\lambda^n}{n!} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \quad (0.1)$$

Or on sait que les séries exponentielles $\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{(-\lambda)^n}{n!}$ sont convergentes et l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel donc les séries :

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda^n}{n!} + \frac{(-\lambda)^n}{n!} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda^n}{n!} - \frac{(-\lambda)^n}{n!} \right)$$

sont convergentes. Autrement dit, les séries :

$$\sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ pair}}} 2\frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ impair}}} 2\frac{\lambda^n}{n!}$$

convergent. Ainsi :

les séries $\sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ pair}}} \frac{\lambda^n}{n!}$ et $\sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ impair}}} \frac{\lambda^n}{n!}$ convergent

de sommes (d'après les égalités (1) et par linéarité de la somme) :

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \right) = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2}$$

2. Calculer la probabilité que X soit pair.

On cherche la probabilité de l'événement $(X \in 2\mathbb{N})$. On a :

$$(X \in 2\mathbb{N}) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X = 2n)$$

Les événements $(X = 2n)$ (où $n \in \mathbb{N}$) sont deux à deux incompatibles et P est une probabilité donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = 2n)$ est convergente de somme $P(X \in 2\mathbb{N})$. Ainsi :

$$P(X \in 2\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = 2n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda} \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$$

et donc :

$$\text{la probabilité que } X \text{ soit paire est égale à } \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}$$

3. On définit la variable aléatoire Y par $Y = \frac{X}{2}$ si X est pair, et $Y = 0$ sinon.

(a) Déterminer la loi de Y .

Par définition de Y , son univers image est :

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{2k}{2} \mid 2k \in X(\Omega) \right\} = \{0\} \cup \{k \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On cherche $P(Y = k)$. On distingue deux cas.

• **Premier cas :** $k \in \mathbb{N}^*$.

Comme k est non nul, on a $(Y = k) = (X = 2k)$ et donc, comme X suit une loi de Poisson,

$$P(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$$

• **Deuxième cas :** $k = 0$

On a $Y = 0$ si et seulement si $X = 0$ ou X prend une valeur impair, c'est-à-dire :

$$(Y = 0) = (X = 0) \cup \bigcup_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ impair}}} (X = n)$$

Les événements impliqués dans cette réunion sont deux à deux incompatibles et P est une probabilité donc la série $\sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ impair}}} P(X = n)$ est convergente et on a l'égalité :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P(X = 0) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} P(X = n) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} + \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2} \end{aligned}$$

d'après la question 1. Finalement, la loi de Y est donnée par :

$$P(Y = 0) = e^{-\lambda} + \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2} \quad \text{et, pour tout } k \in \mathbb{N}^*, P(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$$

(b) Calculer l'espérance de Y si elle existe.

L'espérance de Y existe si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} k P(Y = k)$ converge absolument.

Comme elle est à termes positifs, il suffit d'étudier la convergence de la série. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=0}^n k P(Y = k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (2k) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

D'après la question 1., on sait que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite :

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2}$$

donc la suite $\left(\sum_{k=0}^n k P(Y = k) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k P(Y = k) = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2} \times \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2} = \frac{\lambda}{4} (1 - e^{-2\lambda})$$

Autrement dit :

la variable aléatoire Y admet une espérance qui vaut $E(Y) = \frac{\lambda}{4} (1 - e^{-2\lambda})$

Exercice 11 (C2)  Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On admet qu'il existe une variable aléatoire réelle X vérifiant les propriétés suivantes :

$$X(\Omega) = \{ \pm \sqrt{k} \mid k \in \mathbb{N} \}, \quad X^2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$$

et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $P(X = -\sqrt{n}) = \frac{1}{n} P(X = \sqrt{n})$.

1.(a) Donner l'espérance et la variance de X^2 .

Comme $X^2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, la variable aléatoire X^2 possède une espérance et une variance qui valent :

$E(X^2) = V(X^2) = \lambda$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X = \sqrt{n})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $X^2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, on a $P(X^2 = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$. Or :

$$P(X^2 = n) = P((X = -\sqrt{n}) \cup (X = \sqrt{n})) = P(X = -\sqrt{n}) + P(X = \sqrt{n})$$

car les événements $(X = -\sqrt{n})$ et $(X = \sqrt{n})$ sont incompatibles. En utilisant la deuxième hypothèse, on obtient :

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = P(X^2 = n) = \frac{n+1}{n} P(X = \sqrt{n})$$

et donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = \sqrt{n}) = e^{-\lambda} \frac{n \lambda^n}{(n+1)!}$

(c) Calculer $P(X = 0)$.

On a $X = 0 \iff X^2 = 0$ donc :

$$P(X = 0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$$

(d) Calculer $P(X \geq 0)$.

Par définition de l'univers image de X , on a l'égalité :

$$(X \geq 0) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X = \sqrt{n})$$

Les événements $(X = \sqrt{n})$ (où $n \in \mathbb{N}$) sont deux à deux incompatibles et P est une probabilité donc la série $\sum_{n \geq 0} P(X = \sqrt{n})$ est convergente et on a l'égalité :

$$P(X \geq 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = \sqrt{n}) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\lambda^n}{(n+1)!}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{n\lambda^n}{(n+1)!} = \frac{((n+1) - 1)\lambda^n}{(n+1)!} = \frac{\lambda^n}{n!} - \frac{\lambda^n}{(n+1)!} = \frac{\lambda^n}{n!} - \frac{1}{\lambda} \times \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}$$

En utilisant la linéarité de la somme, il vient :

$$\begin{aligned} P(X \geq 0) &= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} - \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} \right) \\ &= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} - 1 - \frac{1}{\lambda} \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \right) \\ &= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \left(e^\lambda - 1 - \frac{1}{\lambda} (e^\lambda - 1 - \lambda) \right) \end{aligned}$$

en utilisant la somme de la série exponentielle (convergente) de paramètre λ . Finalement :

$$P(X \geq 0) = 1 - \frac{1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}}{\lambda}$$

2. Montrer que pour tout $(m, p) \in \mathbb{N}^2$, on a $(m^2 + p)! \geq (m^2)!p!$.

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrons que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \quad (p + q)! \geq p!q!$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ (fixé). Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}_q$: « $(p + q)! \geq p!q!$ ».

- **Initialisation** : la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie car :

$$(p + 0)! = p! = p!0! \quad \text{car} \quad 0! = 1$$

- **Hérédité** : soit $q \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathcal{P}_q$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{q+1}$ est vraie. On a :

$$(p + q + 1)! = (p + q + 1)(p + q)! \geq (p + q + 1)q!p!$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $p + q + 1 \geq 0$. Or $p + q + 1 \geq q + 1$ puisque $p \geq 0$. On a donc $(p + q + 1)q! \geq (q + 1)!$. Finalement :

$$(p + q + 1)! \geq p!(q + 1)!$$

ce qui prouve que la proposition $\mathcal{P}_{q+1}$ est vraie.

- **Conclusion** : pour tout $q \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}_q$ est vraie par principe de récurrence simple.

En remplaçant q par $m^2 \in \mathbb{N}$, on obtient donc :

$$\boxed{\forall (m, p) \in \mathbb{N}^2, \quad (m^2 + p)! \geq (m^2)!p!}$$

3. Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad P(|X| \geq m) \leq \frac{\lambda^{m^2}}{(m^2)!}$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. La fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$|X| \geq m \iff X^2 \geq m^2$$

De plus, on a l'égalité :

$$(X^2 \geq m^2) = \bigcup_{n=m^2}^{+\infty} (X^2 = n)$$

Les événements $(X^2 = n)$ (où $n \geq m^2$) sont deux à deux incompatibles et P est une probabilité donc la série $\sum_{n \geq m^2} P(X^2 = n)$ est convergente et on a l'égalité :

$$P(|X| \geq m) = P(X^2 \geq m^2) = \sum_{n=m^2}^{+\infty} P(X^2 = n) = e^{-\lambda} \sum_{n=m^2}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$$

car $X^2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. En utilisant le changement d'indice $n = m^2 + p$, on obtient :

$$P(|X| \geq m) = e^{-\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{m^2+p}}{(m^2 + p)!} = e^{-\lambda} \lambda^{m^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^p}{(m^2 + p)!}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On sait que $(m^2 + p)! \geq (m^2)! p!$ d'après la question 2. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ et en utilisant le fait que $\lambda^p \geq 0$, on obtient :

$$\frac{\lambda^p}{(m^2 + p)!} \leq \frac{1}{(m^2)!} \times \frac{\lambda^p}{p!}$$

On sait que la série $\sum_{p \geq 0} \frac{\lambda^p}{p!}$ est convergente (en tant que série exponentielle) donc, en sommant les inégalités, on obtient :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^p}{(m^2 + p)!} \leq \frac{1}{(m^2)!} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^p}{p!} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^p}{(m^2 + p)!} \leq \frac{e^\lambda}{(m^2)!}$$

En multipliant enfin par $e^{-\lambda} \lambda^{m^2} \geq 0$, on obtient bien :

$$P(|X| \geq m) \leq \frac{\lambda^{m^2}}{(m^2)!}$$

4. Écrire une fonction `proba` d'arguments $\lambda > 0$ et un nombre réel strictement positif ε et qui renvoie un entier naturel m à partir duquel $P(|X| \geq m) \leq \varepsilon$.

On utilise la question précédente et une boucle `while` et la fonction `factorial` disponible dans le module `math`.

```

1 from math import factorial
2 def proba(lambda,eps) :
3     m = 0
4     while (lambda**(m**2)/(factorial(m**2))) > eps :
5         m = m+1
6     return m

```

Exercice 12 (C2-C6)  Un dé à six faces amène le 6 avec la probabilité $p \in]0, 1[$ à chaque lancer. On lance le dé une infinité de fois et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où le 6 est sorti au cours des $6n$ premiers lancers.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de X_n , son espérance et sa variance.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On répète $6n$ fois la même expérience (lancer un dé) et on s'intéresse au succès « obtenir un 6 » dont la probabilité est égale à p . Ces épreuves de Bernoulli sont indépendantes et X_n compte le nombre de succès obtenus. Alors $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(6n, p)$. En particulier :

$$X_n(\Omega) = \llbracket 0, 6n \rrbracket \quad \text{et pour tout } k \in X_n(\Omega), \quad P(X_n = k) = \binom{6n}{k} p^k (1-p)^{6n-k}$$

On a $E(X_n) = 6np$ et $V(X_n) = 6np(1-p)$.

- Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une variable aléatoire discrète X .

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance et une variance. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

3. On suppose le dé équilibré. À partir de quelle valeur $n \in \mathbb{N}^*$ est-on sûr d'obtenir une proportion de 6 dans un intervalle de longueur 10^{-2} autour de $\frac{1}{6}$ avec une probabilité d'au moins $\frac{1}{2}$?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme le dé est supposé équilibré, on a $E(X_n) = n$ et $V(X_n) = \frac{5n}{6}$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X_n - n| \geq \varepsilon) \leq \frac{5n}{6\varepsilon^2} \quad \text{et donc} \quad 1 - P(|X_n - n| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{5n}{6\varepsilon^2}$$

soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X_n - n| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{5n}{6\varepsilon^2}$$

En divisant par $6n > 0$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |X_n - n| < \varepsilon \iff \left| \frac{X_n}{6n} - \frac{1}{6} \right| < \frac{\varepsilon}{6n}$$

où ici $\frac{X_n}{6n}$ représente la proportion de 6 obtenus sur les $6n$ lancers. On choisit alors ε tel que :

$$\frac{\varepsilon}{6n} = 10^{-2} \iff \varepsilon = 0,06n$$

et on a alors :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{6n} - \frac{1}{6}\right| < 0,01\right) \geq 1 - \frac{50000}{216n}$$

On résout ensuite :

$$1 - \frac{50000}{216n} \geq \frac{1}{2} \iff \frac{50000}{216n} \leq \frac{1}{2} \iff n \geq 463$$

car n est un entier. Donc :

à partir de 463 lancers de dés, la probabilité d'obtenir une proportion de 6 proche de $\frac{1}{6}$ à 10^{-2} près est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$

Exercice 13 (C1-C2-C3)  Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.

On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

À partir d'un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite AABBBBA... signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3, 4 et 5 le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit qu'on a une première série de longueur 2 et une seconde série de longueur 3 (ce qui est aussi le cas de BBAAAB...).

On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la seconde série.

- 1.(a) Écrire un programme **python** permettant de donner une estimation de la probabilité de chacun des événements $(L_1 = 1)$, $(L_1 = 2)$, $(L_2 = 1)$ et $(L_2 = 2)$.

On simule le choix d'un serveur à l'aide de la commande `random()`. On teste alors si le nombre choisi est compris entre 0 et 0,7 (serveur A) ou entre 0,7 et 1 (serveur B).

- Pour $(L_1 = 1)$:

```

1  from random import random
2  def estimation1(n) : # choisir n grand
3      s = 0
4      for k in range(n) :
5          x = random()
6          y = random()
7          if (x < 0.7 and y > 0.7) or (x > 0.7 and y < 0.3) :
8              s = s+1
9      return s/n

```

- Pour $(L_1 = 2)$:

```

1  def estimation2(n) : # choisir n grand
2      s = 0
3      for k in range(n) :
4          x = random()
5          y = random()
6          z = random()
7          if (x < 0.7 and y < 0.7 and z > 0.7) or (x > 0.7 and y > 0.7 and y
8              s = s+1
9      return s/n

```

- Pour $(L_2 = 1)$:

```

1  def estimation3(n) :
2      s = 0
3      for k in range(n) :
4          x = random()
5          y = random()
6          while (x < 0.7 and y < 0.7) or (x > 0.7 and y > 0.7) :
7              x, y = y, random()
8          x = random()
9          y = random()
10         if (x < 0.7 and y > 0.7) or (x > 0.7 and y < 0.3) :

```

```

11         s = s+1
12     return s/n

```

• Pour ($L_2 = 2$) :

```

1  def estimation4(n) :
2      s = 0
3      for k in range(n) :
4          x = random()
5          y = random()
6          while (x < 0.7 and y < 0.7) or (x > 0.7 and y > 0.7) :
7              x, y = y, random()
8          x = random()
9          y = random()
10         z = random()
11         if (x < 0.7 and y < 0.7 and z > 0.7) or (x > 0.7 and y > 0.7 and y
12             s = s+1
13     return s/n

```

- (b) En utilisant l'outil informatique, proposer une estimation des espérances de L_1 et L_2 . Pour estimer l'espérance de L_1 , on calcule la valeur moyenne prise par cette variable aléatoire sur un grand nombre n de simulations.

```

1  def esperance1(n) :
2      s = 0
3      for k in range(n) :
4          i = 1
5          x = random()
6          y = random()
7          while (x < 0.7 and y < 0.7) or (x > 0.7 and y > 0.7) :
8              x, y = y, random()
9              i = i+1
10         s = s+i
11     return s/n

```

- 2.(a) Déterminer la loi de L_1 et vérifier par le calculer que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements :

- A_j : « l'ordinateur choisi le serveur A la $j^{\text{ème}}$ jour ;
- B_j : « l'ordinateur choisi le serveur B la $j^{\text{ème}}$ jour.

La longueur de la première série peut être égale à n'importe quel entier naturel non nul, c'est-à-dire $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La première série est de longueur k si et seulement si l'ordinateur choisi la serveur A les k premiers jours et le serveur B le $(k+1)^{\text{ème}}$ ou le contraire, c'est-à-dire :

$$(L_1 = k) = (A_1 \cap \dots \cap A_k \cap B_{k+1}) \cup (B_1 \cap \dots \cap B_k \cap A_{k+1})$$

Comme les événements $A_1 \cap \dots \cap A_k \cap B_{k+1}$ et $B_1 \cap \dots \cap B_k \cap A_{k+1}$ sont incompatibles, on a l'égalité :

$$P(L_1 = k) = P(A_1 \cap \dots \cap A_k \cap B_{k+1}) + P(B_1 \cap \dots \cap B_k \cap A_{k+1})$$

Les choix des serveurs étant supposés indépendants, on a ensuite :

$$\begin{aligned} P(L_1 = k) &= P(A_1) \dots P(A_k) P(B_{k+1}) + P(B_1) \dots P(B_k) P(A_{k+1}) \\ &= \left(\frac{7}{10}\right)^k \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^k \frac{7}{10} \end{aligned}$$

Donc la loi de L_1 est donnée par :

$$L_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad P(L_1 = k) = \left(\frac{7}{10}\right)^k \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^k \frac{7}{10}$$

Comme $\frac{7}{10} \in]-1, 1[$ et $\frac{3}{10} \in]-1, 1[$, les séries géométriques $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{7}{10}\right)^k$ et $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{3}{10}\right)^k$ sont convergentes. L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel donc la série $\sum_{k \geq 1} P(L_1 = k)$ est convergente et on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) &= \frac{21}{100} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1} + \frac{21}{100} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} \\ &= \frac{21}{100} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^{\ell} + \frac{21}{100} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^{\ell} \\ &= \frac{21}{100} \times \frac{1}{1 - \frac{7}{10}} + \frac{21}{100} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{10}} \\ &= \frac{7}{10} + \frac{3}{10} \end{aligned}$$

et donc :

$$\text{on retrouve bien que } \sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1$$

(b) Déterminer l'espérance mathématique de L_1 .

La variable aléatoire L_1 admet une espérance si la série $\sum_{k \geq 1} k P(L_1 = k)$ est absolument convergente, c'est-à-dire si elle est convergente car elle est à termes positifs. Or les séries géométriques dérivées premières $\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}$ et $\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1}$ sont convergentes car $\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right) \in]-1, 1[^2$. L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel donc la série $\sum_{k \geq 1} k P(L_1 = k)$ est convergente. Ainsi, L_1 admet une espérance qui vaut (par linéarité de la somme) :

$$\begin{aligned} E(L_1) &= \frac{21}{100} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1} + \frac{21}{100} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} \\ &= \frac{21}{100} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{7}{10}\right)^2} + \frac{21}{100} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{10}\right)^2} \\ &= \frac{21}{9} + \frac{21}{49} \end{aligned}$$

donc :

l'espérance mathématique de L_1 vaut $E(L_1) = \frac{58}{21}$

3. Déterminer la loi de L_2 ainsi que son espérance.

La longueur de la deuxième série peut être égale à n'importe quel entier naturel non nul donc $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On cherche $P(L_2 = k)$.

Comme $\{(L_1 = j) \mid j \in \mathbb{N}^*\}$ est un système quasi-complet d'événements, on sait d'après la formule des probabilités totales que la série $\sum_{j \geq 1} P((L_1 = j) \cap (L_2 = k))$ est convergente et qu'on a l'égalité :

$$P(L_2 = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} P((L_1 = j) \cap (L_2 = k))$$

Or :

$$(L_1 = j) \cap (L_2 = k) = (A_1 \cap \dots \cap A_j \cap B_{j+1} \cap \dots \cap B_{j+k} \cap A_{j+k+1}) \\ \cup (B_1 \cap \dots \cap B_j \cap A_{j+1} \cap \dots \cap A_{j+k} \cap B_{j+k+1})$$

En utilisant l'incompatibilité des événements :

$$A_1 \cap \dots \cap A_j \cap B_{j+1} \cap \dots \cap B_{j+k} \cap A_{j+k+1} \quad \text{et} \quad B_1 \cap \dots \cap B_j \cap A_{j+1} \cap \dots \cap A_{j+k} \cap B_{j+k+1}$$

on a :

$$P((L_1 = j) \cap (L_2 = k)) = P(A_1 \cap \dots \cap A_j \cap B_{j+1} \cap \dots \cap B_{j+k} \cap A_{j+k+1}) \\ + P(B_1 \cap \dots \cap B_j \cap A_{j+1} \cap \dots \cap A_{j+k} \cap B_{j+k+1})$$

On exploite maintenant l'indépendance des serveurs et on obtient finalement :

$$P((L_1 = j) \cap (L_2 = k)) = \left(\frac{7}{10}\right)^{j+1} \left(\frac{3}{10}\right)^k + \left(\frac{3}{10}\right)^{j+1} \left(\frac{7}{10}\right)^k$$

Par linéarité de la somme, on a (les deux séries géométriques mises en jeu convergent bien) :

$$P(L_2 = k) = \frac{49}{100} \left(\frac{3}{10}\right)^k \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^{j-1} + \frac{9}{100} \left(\frac{7}{10}\right)^k \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^{j-1} \\ = \frac{49}{100} \left(\frac{3}{10}\right)^k \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^i + \frac{9}{100} \left(\frac{7}{10}\right)^k \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^i \\ = \frac{49}{100} \left(\frac{3}{10}\right)^k \times \frac{1}{1 - \frac{7}{10}} + \frac{9}{100} \left(\frac{7}{10}\right)^k \times \frac{1}{1 - \frac{3}{10}}$$

et donc la loi de L_2 est donnée par :

$L_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(L_2 = k) = \frac{49}{100} \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} + \frac{9}{100} \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}$
--

On sait déjà que les séries mises en jeu dans l'existence de l'espérance de L_2 sont convergentes (cf. l'existence de l'espérance de L_1) donc L_2 admet une espérance et on a (par

linéarité de la somme) :

$$\begin{aligned} E(L_2) &= \frac{49}{100} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{10} \right)^{k-1} + \frac{9}{100} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{7}{10} \right)^{k-1} \\ &= \frac{49}{100} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{10}\right)^2} + \frac{9}{100} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{7}{10}\right)^2} \end{aligned}$$

et donc :

l'espérance mathématique de L_2 est égale à $E(L_2) = 2$

Exercice 14 (C1-C3-C5)  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient deux lots de jetons numérotés de 1 à n . À chaque tirage, on prélève deux jetons simultanément. Si les jetons portent le même numéro, on les retire de l'urne, sinon on remet les deux jetons dans l'urne. On effectue les tirages jusqu'à vider l'urne. On note T_n la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

1. Déterminer la loi de T_1 .

L'urne contient uniquement deux jetons numérotés 1. Au premier tirage, on prélève nécessairement les deux jetons numérotés 1 et l'expérience s'arrête. Donc :

T_1 est la variable aléatoire certaine de valeur 1

Cela signifie que $T_1(\Omega) = \{1\}$ (et $P(T_1 = 1) = 1$).

2. Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad P(T_2 = k) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2}$$

On suppose ici que $n = 2$. Il y a donc dans l'urne quatre jetons : deux jetons numérotés 1 et deux jetons numérotés 2. Remarquons que si on prélève deux jetons portant le même numéro à un tirage j , alors au $(j+1)^{\text{ème}}$ tirage on a nécessairement vidé l'urne (puisque'il n'en reste alors plus que deux à l'issue du $j^{\text{ème}}$ tirage qui portent le même numéro).

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Dire que l'événement $(T_2 = k)$ signifie que :

- au $k^{\text{ème}}$ tirage, on prélève les deux derniers jetons de l'urne (qui portent donc le même numéro) ;
- au $(k-1)^{\text{ème}}$ tirage, on prélève deux jetons portant le même numéro ;
- durant les $k-2$ premiers tirages, on prélève simultanément deux jetons ne portant pas le même numéro.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement A_k : « au $k^{\text{ème}}$ tirage, les deux jetons obtenus portent le même numéro ». On a alors l'égalité :

$$(T_2 = k) = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-2}} \cap A_{k-1} \cap A_k$$

Comme $P(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_{k-1}) \neq 0$, on a d'après la formule des probabilités composées généralisée :

$$\begin{aligned} P(T_2 = k) &= P(\overline{A_1}) \cdots P_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-3}}}(\overline{A_{k-2}}) P_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-2}}}(A_{k-1}) P_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-2}} \cap A_{k-1}}(A_k) \\ &= P(\overline{A_1})^{k-2} P_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-2}}}(A_{k-1}) P_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-2}} \cap A_{k-1}}(A_k) \end{aligned}$$

car l'expérience recommence tant qu'on prélève deux jetons portant des numéros différents.

Calculons $P(\overline{A_1})$. On choisit comme univers Ω l'ensemble des 2-combinaisons de l'ensemble des quatre jetons. En particulier, $\text{card}(\Omega) = \binom{4}{2}$. Chaque 2-combinaison de deux jetons à la même probabilité de sortie (on est en situation d'équiprobabilité) donc :

$$P(\overline{A_1}) = \frac{\text{card}(\overline{A_1})}{\binom{4}{2}} = \frac{\text{card}(\overline{A_1})}{6}$$

Or $\text{card}(A_1) = 2$ (A_1 est constitué de la 2-combinaison de jetons numérotés 1 et de la 2-combinaison de jetons numérotés 2). Ainsi, $\text{card}(\overline{A_1}) = 6 - 2 = 4$ et donc $P(\overline{A_1}) = \frac{2}{3}$. De même :

$$P_{\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-2}}}(A_{k-1}) = P(A_1) = 1 - P(\overline{A_1}) = \frac{1}{3}$$

Enfin, comme pour le dernier tirage il ne reste que deux jetons portant le même numéro dans l'urne, on a :

$$P_{\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-2}} \cap A_{k-1}}(A_k) = 1$$

Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad P(T_2 = k) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$$

3. Montrer que T_2 admet une espérance que l'on calculera.

Avec deux numéros différents, on peut vider l'urne au minimum au deuxième tirage donc $T_2(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. La variable aléatoire T_2 admet une espérance si la série $\sum_{k \geq 2} k P(T_2 = k)$ est absolument convergente, c'est-à-dire convergente puisqu'elle est à termes positifs. Or on sait que la série géométrique dérivée première de raison $\frac{2}{3}$ est convergente puisque $\frac{2}{3} \in]-1, 1[$. L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel donc la série $\sum_{k \geq 2} k P(T_2 = k)$ converge. Ainsi, T_2 admet donc une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned} E(T_2) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k P(T_2 = k) = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

Finalement :

$$T_2 \text{ admet une espérance qui vaut } E(T_2) = 4$$

4. On revient désormais au cas général (n est quelconque).

- (a) Écrire un programme `python` qui simule cette expérience en renvoyant la valeur de T_n . On considère deux listes d'entiers compris entre 1 et n que l'on concatène. On extrait deux nombres de cette liste (à l'aide de la commande `sample(L, 2)`) et on les compare. S'ils sont égaux, on les supprime de la liste (à l'aide de la commande `L.remove(...)`).

```
1 from random import *
2 def experience(n) :
3     urne = [k for k in range(1,n+1)]
4     urne = 2*urne
5     i = 0
6     while (len(urne) != 0) :
7         a, b = sample(N,2)
8         i = i+1
9         if (a == b) :
10             urne.remove(a)
11             urne.remove(b)
12     return i
```

- (b) À l'aide de l'outil informatique, émettre une conjecture quant à la valeur de l'espérance de T_n .

On réalise une moyenne à l'aide de la fonction `experience` précédente.

```

1 def esperance(N,n) : # choisir N grand
2     s = 0
3     for k in range(N) :
4         s = s+experience(n)
5     return s/N

```

En exécutant cette fonction pour de grandes valeurs de N et pour différentes valeurs de n , on peut émettre la conjecture suivante :

on conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, l'espérance de T_n vaut n^2

- 5.(a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a l'égalité :

$$P(T_n = k + 1) = \frac{1}{2n - 1} P(T_{n-1} = k) + \frac{2n - 2}{2n - 1} P(T_n = k)$$

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Comme $\{A_1, \overline{A_1}\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T_n = k + 1) = P_{A_1}(T_n = k + 1) P(A_1) + P_{\overline{A_1}}(T_n = k + 1) P(\overline{A_1})$$

L'urne contient $2n$ jetons et on en prélève 2 simultanément. Il y a n façons de choisir 2 jetons portant le même numéro (soit les deux jetons numérotés 1, soit les deux jetons numérotés 2,..., soit les deux jetons numérotés n). On a donc :

$$P(A_1) = \frac{\text{card}(A_1)}{\binom{2n}{2}} = n \times \frac{2}{2n(2n - 1)} = \frac{1}{2n - 1}$$

et donc :

$$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = \frac{2n - 2}{2n - 1}$$

Si on a prélevé deux jetons portant les mêmes numéros au premier tirage (c'est-à-dire si l'événement A_1 est réalisé), alors il reste $2(n - 1)$ jetons dans l'urne. L'événement $(T_n = k + 1)$ est réalisé si et seulement si on a vidé l'urne de ces $2(n - 1)$ jetons à l'issue des k tirages suivants. On a donc l'égalité :

$$(T_n = k + 1 \mid A_1) = (T_{n-1} = k)$$

Si l'événement $\overline{A_1}$ est réalisé, alors l'expérience recommence à l'identique dès le deuxième tirage (il y a toujours les $2n$ boules dans l'urne) et l'urne doit donc être vidée à l'issue du $k^{\text{ème}}$ à partir du deuxième, d'où l'égalité :

$$(T_n = k + 1 \mid \overline{A_1}) = (T_n = k)$$

Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad P(T_n = k + 1) = \frac{1}{2n - 1} P(T_{n-1} = k) + \frac{2n - 2}{2n - 1} P(T_n = k)$$

- (b) On admet que T_j admet une espérance pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.
Justifier que $E(T_n) = E(T_{n-1}) + 2n - 1$. En déduire alors l'espérance de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $T_n(\Omega) = \llbracket n, +\infty \llbracket$ et $T_{n-1}(\Omega) = \llbracket n-1, +\infty \llbracket$. D'après la question 5.(a), on a :

$$\forall k \geq n, \quad P(T_n = k) = \frac{1}{2n-1} P(T_{n-1} = k-1) + \frac{2n-2}{2n-1} P(T_n = k-1)$$

et donc, pour tout entier $k \geq n$:

$$\begin{aligned} k P(T_n = k) &= \frac{1}{2n-1} k P(T_{n-1} = k-1) + \frac{2n-2}{2n-1} k P(T_n = k-1) \\ &= \frac{1}{2n-1} (k-1) P(T_{n-1} = k-1) + \frac{2n-2}{2n-1} (k-1) P(T_n = k-1) \\ &\quad + \frac{P(T_{n-1} = k-1)}{2n-1} + \frac{2n-2}{2n-1} P(T_n = k-1) \end{aligned}$$

On a supposé que les variables aléatoires T_n et T_{n-1} donc les séries :

$$\sum_{k \geq n} k P(T_n = k), \quad \sum_{k \geq n} (k-1) P(T_{n-1} = k-1) \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq n} k P(T_n = k-1),$$

sont convergentes. De plus, on sait que les séries $\sum_{k \geq n} P(T_{n-1} = k-1)$ et $\sum_{k \geq n} P(T_{n-1} = k)$

sont convergentes car $\{(T_j = k) \mid k \in T_j(\Omega)\}$ est un système quasi-complet d'événements pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. On a donc par linéarité de la somme :

$$\begin{aligned} E(T_n) &= \frac{1}{2n-1} \sum_{n=k}^{+\infty} (k-1) P(T_{n-1} = k-1) + \frac{2n-2}{2n-1} \sum_{n=k}^{+\infty} (k-1) P(T_n = k-1) \\ &\quad + \frac{1}{2n-1} \sum_{n=k}^{+\infty} P(T_{n-1} = k-1) + \frac{2n-2}{2n-1} \sum_{n=k}^{+\infty} P(T_n = k-1) \end{aligned}$$

Le changement d'indice $\ell = k-1$ fournit :

$$E(T_n) = \frac{1}{2n-1} E(T_{n-1}) + \frac{2n-2}{2n-1} E(T_n) + \underbrace{\frac{1}{2n-1} + \frac{2n-2}{2n-1}}_{=1}$$

puis :

$$\underbrace{\left(1 - \frac{2n-2}{2n-1}\right)}_{=\frac{1}{2n-1}} E(T_n) = \frac{1}{2n-1} E(T_{n-1}) + 1$$

et finalement :

$$\boxed{E(T_n) = E(T_{n-1}) + 2n - 1}$$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a :

$$E(T_k) - E(T_{k-1}) = 2k - 1$$

En sommant ces égalités, il vient :

$$\sum_{k=2}^n (E(T_k) - E(T_{k-1})) = \sum_{k=2}^n (2k - 1) \quad \text{c'est-à-dire} \quad E(T_n) - E(T_1) = \sum_{k=2}^n (2k - 1)$$

Or $E(T_1) = 1$ d'après la question 1. donc (en calculant la somme de droite) on trouve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(T_n) = n^2$$

Exercice 15 (C1-C2-C3-C5-C7)  Un joueur A possède une pièce qui tombe sur pile avec la probabilité $1/3$. Un joueur B possède une pièce qui tombe sur pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$.

1. Simulation informatique

- (a) Proposer une fonction **python** nommée **lancerB**, prenant en entrée le paramètre p et modélisant un lancer de pièce par le joueur B .

On utilise la commande **random()** pour simuler le lancer de pièce.

```
1 from random import random
2 def lancerB(p) :
3     x = random()
4     if x < p :
5         return 'Pile'
6     else :
7         return 'Face'
```

- (b) Comment peut-on alors modéliser un lancer de pièce pour le joueur A ?

Il suffit d'entrer **lancerB(1/3)** dans la console.

- (c) Les deux joueurs lancent à tour de rôle leur pièce. Le joueur déclaré vainqueur est celui qui obtient pile pour la première fois avant l'autre. Si les deux joueurs obtiennent le premier pile en même temps, alors les deux joueurs sont déclarés ex-æquo et la partie est terminée. Écrire une fonction **bataille** qui simule une partie et qui renvoie le vainqueur éventuel.

On utilise la fonction **lancerB** pour simuler les lancers des deux joueurs.

```
1 def bataille(p) :
2     a = lancerA(1/3)
3     b = lancerB(p)
4     while (a != 'Pile' and b != 'Pile') :
5         a = lancerA(1/3)
6         b = lancerB(p)
7     if (a == 'Pile' and b == 'Face') :
8         return 'Le joueur A gagne'
9     elif (a == 'Face' and b == 'Pile') :
10        return 'Le joueur B gagne'
11    else :
12        return 'Match nul'
```

2. Étude d'une variable aléatoire Δ

Chaque joueur lance sa pièce successivement jusqu'à obtenir pile pour la première fois. On note X le nombre de lancers effectués par le joueur A et Y le nombre de lancers effectués par le joueur B et on pose $\Delta = X - Y$.

- (a) Déterminer les lois de X et de Y et donner leur espérance et leur variance.

La variable aléatoire X correspond au rang du premier succès lors d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes dont le succès (obtenir *pile*) a pour probabilité $\frac{1}{3}$ donc :

$$X \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \frac{1}{3} : X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$$

Ainsi :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et pour tout } k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3}$$

De la même manière :

$$Y \text{ suit la loi géométrique de paramètre } p : Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

On sait alors que X et Y admettent une espérance et une variance qui valent :

$$E(X) = 3 \text{ et } V(X) = \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 6 \text{ tandis que } E(Y) = \frac{1}{p} \text{ et } V(Y) = \frac{1-p}{p^2}$$

- (b) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Δ .

Les variables aléatoires X et Y admettent une espérance donc :

$$\Delta = X - Y \text{ admet une espérance qui vaut (par linéarité de l'espérance)}$$

$$E(\Delta) = E(X) - E(Y) = 3 - \frac{1}{p}$$

Les lancers de pièces du joueur A sont indépendants des lancers de pièces du joueur B donc les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. De même, les variables aléatoires X et $-Y$ sont indépendantes. Comme X et Y (donc $-Y$) admettent une variance :

$$\text{la variable aléatoire } \Delta \text{ admet une variance qui vaut}$$

$$V(\Delta) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = 6 + \frac{1-p}{p^2}$$

(c) Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P(Y = k)$ et en déduire la valeur de $P(\Delta = 0)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(X = k) P(Y = k) = \frac{p}{3} \left(\frac{2(1-p)}{3} \right)^{k-1}$$

Or $1-p \in]0, 1[$ (puisque $p \in]0, 1[$) donc $\frac{2(1-p)}{3} \in \left] 0, \frac{2}{3} \right[$ et en particulier $\frac{2(1-p)}{3} \in]-1, 1[$. La série géométrique $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{2(1-p)}{3} \right)^{k-1}$ est donc convergente et on sait que l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel donc la série $\sum_{k \geq 1} P(X = k) P(Y = k)$ convergente de somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P(Y = k) &= \frac{p}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2(1-p)}{3} \right)^{k-1} = \frac{p}{3} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{2(1-p)}{3} \right)^{\ell} \\ &= \frac{p}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2(1-p)}{3}} \end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P(Y = k) = \frac{p}{1+2p}}$$

On a :

$$(\Delta = 0) = (X = Y) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} ((X = k) \cap (Y = k))$$

Les événements $(X = k) \cap (Y = k)$ (où $k \in \mathbb{N}^*$) sont deux à deux incompatibles et P est une probabilité donc la série $\sum_{k \geq 1} P((X = k) \cap (Y = k))$ est convergente et on a l'égalité :

$$P(\Delta = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P(Y = k)$$

car les lancers de A sont indépendants de ceux de B . D'après ce qui précède, on obtient donc :

$$\boxed{P(\Delta = 0) = \frac{p}{1+2p}}$$

(d) Pour tout entier *relatif* n , calculer $P(\Delta = n)$.

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$ (le cas $n = 0$ a été traité précédemment). On distingue deux cas.

- **Premier cas :** $n > 0$. Alors :

$$(\Delta = n) = (X = Y + n) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} ((X = k + n) \cap (Y = k))$$

Les événements $(X = k + n) \cap (Y = k)$ (où $k \in \mathbb{N}^*$) sont deux à deux incompatibles et P est une probabilité donc la série $\sum_{k \geq 1} P((X = k + n) \cap (Y = k))$ est convergente et on a l'égalité :

$$P(\Delta = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X = k + n) \cap (Y = k))$$

En utilisant l'indépendance des lancers de pièces du joueur A vis à vis de B , on obtient :

$$P(\Delta = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{p}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2(1-p)}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{p}{1+2p}$$

d'après les calculs précédents (question 2.(c)).

- **Deuxième cas :** $n < 0$. Dans ce cas :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad k + n \geq 1 \iff k \geq 1 - n$$

On a alors :

$$(\Delta = n) = \bigcup_{k=1-n}^{+\infty} ((X = k + n) \cap (Y = k))$$

Par incompatibilité deux à deux des événements mis en jeu dans la réunion et par indépendance mutuelle des lancers, on a encore :

$$\begin{aligned} P(\Delta = n) &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{p}{3} \sum_{k=1-n}^{+\infty} \left(\frac{2(1-p)}{3}\right)^{k-1} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{p}{3} \left(\frac{3}{2(1-p)}\right)^n \sum_{k=1-n}^{+\infty} \left(\frac{2(1-p)}{3}\right)^{k-(1-n)} \end{aligned}$$

Le changement d'indice $\ell = k - (1 - n)$ fournit :

$$P(\Delta = n) = \frac{p}{3(1-p)^n} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{2(1-p)}{3}\right)^{\ell} = \frac{p}{(1+2p)(1-p)^n}$$

(e) Calculer la probabilité que le joueur A gagne.

L'événement « le joueur A gagne » est l'événement $(X < Y) = (\Delta < 0)$. On a :

$$(\Delta < 0) = \bigcup_{n=-\infty}^{-1} (\Delta = n) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\Delta = -n)$$

Les événements $(\Delta = -n)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) sont deux à deux incompatibles et P est une probabilité donc la série $\sum_{n \geq 1} P(\Delta = -n)$ est convergente et on a l'égalité :

$$P(\Delta < 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\Delta = -n)$$

En utilisant la question 2.(d) (deuxième cas), on obtient :

$$P(\Delta < 0) = \frac{p}{1+2p} \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n = \frac{p}{1+2p} \times \frac{1}{1-(1-p)}$$

Ainsi :

la probabilité que le joueur A gagne est égale à $\frac{1}{1+2p}$

Exercice 16 (C1-C2-C3-C7)  Le nombre de véhicules empruntant l'autoroute dans le sens Paris-Lyon suit une loi de Poisson de paramètre λ et dans le sens Lyon-Paris de paramètre μ . Sachant que n véhicules franchissent le péage (de Dijon), quelle est la probabilité que k d'entre-eux viennent de Paris ?

On note X le nombre de véhicules empruntant l'autoroute dans le sens Paris-Lyon et Y le nombre de véhicules empruntant l'autoroute dans le sens Lyon-Paris. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, avec $k \leq n$. On cherche à déterminer $P_{X+Y=n}(X = k)$. On a :

$$\begin{aligned} P_{X+Y=n}(X = k) &= \frac{P((X + Y = n) \cap (X = k))}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{P((Y = n - k) \cap (X = k))}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{P(Y = n - k)P(X = k)}{P(X + Y = n)} \text{ par indépendance des va } X \text{ et } Y. \end{aligned}$$

Comme X et Y suivent deux lois de Poisson indépendantes, on montre (voir le cours) que $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P_{X+Y=n}(X = k) &= \frac{P(Y = n - k)P(X = k)}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}{e^{-\mu-\lambda} \frac{(\mu+\lambda)^n}{n!}} \\ &= \binom{n}{k} \frac{\mu^{n-k} \lambda^k}{(\mu + \lambda)^n}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, k \leq n, P_{X+Y=n}(X = k) = \binom{n}{k} \frac{\mu^{n-k} \lambda^k}{(\mu + \lambda)^n}$

Exercice 17 (C1-C3)

1. Montrer que, pour tous

$$(q, r) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } q \leq r, \text{ on a } \sum_{k=q}^r \binom{k}{q} = \binom{r+1}{q+1}.$$

Soit $q \in \mathbb{N}$ (fixé). On utilise un raisonnement par récurrence simple. Pour tout $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \geq q$, on considère la proposition $\mathcal{P}_r : \ll \sum_{k=q}^r \binom{k}{q} = \binom{r+1}{q+1} \gg$.

- **Initialisation** : la proposition $\mathcal{P}_q$ est vraie car $\binom{q+1}{q+1} = 1$ et :

$$\sum_{k=q}^q \binom{k}{q} = \binom{q}{q} = 1 = \binom{q+1}{q+1}$$

- **Hérédité** : soit r un entier naturel supérieur ou égal à q tel que la proposition $\mathcal{P}_r$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{r+1}$. En utilisant la relation de Chasles et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=q}^{r+1} \binom{k}{q} &= \sum_{k=q}^r \binom{k}{q} + \binom{r+1}{q} \\ &= \binom{r+1}{q+1} + \binom{r+1}{q} \\ &= \binom{r+2}{q+1} \end{aligned}$$

en utilisant la formule de triangle de Pascal. La proposition $\mathcal{P}_{r+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion** : pour tout entier $r \geq q$, la proposition $\mathcal{P}_r$ est vraie par principe de récurrence simple.

Finalement :

$$\text{pour tout } (q, r) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } q \leq r, \text{ on a l'égalité } \sum_{k=q}^r \binom{k}{q} = \binom{r+1}{q+1}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On les tire une à une et sans remise. Soit X la variable aléatoire réelle égale au rang de la première boule blanche obtenue.

(a) Démontrer que la loi de X est donnée par :

$$\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = n \frac{n! (2n - k)!}{(n - k + 1)! (2n)!}$$

On peut obtenir la première boule blanche au plus tôt au premier tirage et au plus tard au $(n + 1)^{\text{ème}}$ tirage (dans le cas où l'on prélèverait toutes les boules noires au cours des n premiers tirages). L'univers image de X est donc $X(\Omega) = \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, on considère l'événement N_k (respectivement B_k) : « on a prélevé une boule noire (respectivement blanche) au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

Soit $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$. Alors :

$$(X = k) = N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k$$

D'après la formule des probabilités composées généralisée :

$$P(X = k) = P(N_1) \dots P_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-2}}(N_{k-1}) P_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}}(B_k)$$

où par convention le produit est nul si $P(N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}) \neq 0$. Le tirage s'effectue sans remise donc :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-2)}{2n-(k-2)} \times \frac{n}{2n-(k-1)} \\ &= \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \dots \times \frac{n-k+2}{2n-k+2} \times \frac{n}{2n-k+1} \\ &= \frac{n!}{(n-k+1)!} \times \frac{(2n-k+1)!}{(2n)!} \times \frac{n}{2n-k+1} \\ &= n \frac{n!}{(n-k+1)!} \times \frac{(2n-k)!}{(2n)!} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = n \frac{n! (2n - k)!}{(n - k + 1)! (2n)!}$$

- (b) Écrire un script `python` simulant l'expérience. On renverra la valeur de X .

Les boules noires sont codées par les entiers de 1 à n , les boules blanches correspondent aux entiers de $n + 1$ à $2n$. On utilise la commande `L.remove()` pour simuler le tirage sans remise. La fonction suivante renvoie une liste des boules tirées jusqu'à l'obtention d'une boule blanche. Elle renvoie également la valeur de X .

```

1 from random import *
2 def experience(n) :
3     urne = [k for k in range(1,2*n+1)]
4     liste = []
5     x = 0
6     while (x <= n) :
7         x = choice(urne)
8         liste.append(x)
9         urne.remove(x)
10    return liste, len(liste)

```

- (c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $2n+1-X$ à l'aide du changement d'indice $k = 2n+1-i$. En déduire l'espérance de X .

Les variables aléatoires $2n+1-X$ et X ont des univers images finis donc elles admettent chacune une espérance. D'après le théorème de transfert et en utilisant le changement d'indice $i = 2n+1-k$, on a :

$$\begin{aligned} E(2n+1-X) &= \sum_{k=1}^{n+1} (2n+1-k) P(X=k) = \sum_{i=n}^{2n} i P(X=2n+1-i) \\ &= n \frac{n!}{(2n)!} \sum_{i=n}^{2n} i \frac{(i-1)!}{(i-n)!} \\ &= n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{i=n}^{2n} \frac{i!}{n!(i-n)!} \\ &= n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{i=n}^{2n} \binom{i}{n} \\ &= n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \binom{2n+1}{n+1} \end{aligned}$$

Or :

$$\binom{2n+1}{n+1} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{2n+1}{n+1} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

donc :

$$E(2n+1-X) = n \frac{2n+1}{n+1}$$

Or, par linéarité de l'espérance, on sait que $E(2n+1-X) = 2n+1-E(X)$ donc :

$$E(X) = 2n+1 - n \frac{2n+1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}$$

- (d) On note Y le rang de la seconde boule blanche obtenue. Écrire une fonction `XY` donnant la valeur de X et de Y pour l'expérience simulée.

On procède comme à la question 2.(b).

```

1 from random import *
2 def experience(n) :
3     urne = [k for k in range(1,2*n+1)]
4     X_et_Y = []
5     numero_tirage = 0
6     boule = 0
7     while (len(X_et_Y) < 2) :
8         boule = choice(urne)
9         numero_tirage += 1
10        urne.remove(boule)
11        if boule < n :
12            nb_boules_blanches += 1
13            X_et_Y.append(numero_tirage)
14    return X_et_Y

```

Exercice 18 (C1-C3-C7)  Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire k jetons avec remise et on note X (respectivement Y) la variable aléatoire réelle égale au plus petit (respectivement plus grand) des numéros obtenus.

- 1.(a) Soit Z une variable aléatoire (quelconque) d'univers image égal à $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a l'égalité $P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k + 1)$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On distingue deux cas.

- Supposons que $k = n$. Comme $Z(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$, on a l'égalité $(Z \geq n) = (Z = n)$. De plus, $(Z \geq n + 1) = \emptyset$ donc $P(Z \geq n + 1) = 0$. On a donc bien l'égalité $P(Z = n) = P(Z \geq n) - P(Z \geq n + 1)$.
- Supposons maintenant que $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. On a l'égalité :

$$(Z \geq k) = (Z = k) \cup (Z \geq k + 1)$$

Or les événements $(Z = k)$ et $(Z \geq k + 1)$ sont incompatibles donc :

$$P(Z \geq k) = P(Z = k) + P(Z \geq k + 1)$$

d'où l'égalité annoncée.

Finalement :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k + 1)}$$

- (b) Déterminer la loi de X .

L'univers Ω associé à l'expérience « tirer k jetons successivement avec remise » est l'ensemble des k -listes de l'ensemble des n jetons. En particulier, $\text{card}(\Omega) = n^k$. Les jetons sont deux à deux distincts donc P est la probabilité uniforme (on est en situation d'équiprobabilité).

L'univers image de X est $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors :

$$P(X = j) = \frac{\text{card}(X = j)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(X = j)}{n^k}$$

Dénombrons l'événement $(X \geq j)$. Dire que l'événement $(X \geq j)$ est réalisé signifie que le minimum obtenu sur les k jetons tirés est supérieur ou égal à j . Pour obtenir un tel minimum, il faut et il suffit que l'on ait choisi tous les jetons parmi ceux numérotés de j à n . Autrement dit, $(X \geq j)$ est l'ensemble des k -listes de l'ensemble des jetons numérotés de j à n donc $\text{card}(X \geq j) = (n - j + 1)^k$. On a alors :

$$P(X \geq j) = \frac{(n - j + 1)^k}{n^k}$$

puis :

$$P(X = j) = P(X \geq j) - P(X \geq j + 1) = \frac{(n - j + 1)^k - (n - j)^k}{n^k}$$

Finalement, la loi de X est donnée par :

$$\boxed{X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall j \in X(\Omega), \quad P(X = j) = \frac{(n - j + 1)^k - (n - j)^k}{n^k}}$$

- 2.(a) Écrire une fonction `experience` qui prend en argument n et k et sort les k numéros tirés.

On choisit les boules aléatoirement à l'aide de la commande `randint(1,10)`.

```
1 from random import *
2 def experience(n,k) :
3     L = []
4     for j in range(k) :
5         x = randint(1,n)
6         L.append(x)
7     return L
```

- (b) En déduire une fonction `valeurXY` renvoyant les valeurs de X et Y . Il n'est pas autorisé d'utiliser les fonctions `min` et `max` prédéfinies dans `python`.

On parcourt les éléments de la liste `experience(n,k)`.

```
1 def valeurXY(n,k) :
2     L = experience(n,k)
3     min, max = L[0], L[0]
4     for j in range(k) :
5         if L[j] < min :
6             min = L[j]
7         if L[j] > max :
8             max = L[j]
9     return min, max
```

3. Montrer que $n^k \mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^k$ puis déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

L'espérance de X existe car son univers image est fini. On a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^n j \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=1}^n j \frac{(n-j+1)^k - (n-j)^k}{n^k}$$

et donc :

$$\begin{aligned} n^k \mathbb{E}(X) &= \sum_{j=1}^n j(n-(j-1))^k - \sum_{j=1}^n j(n-j)^k = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)(n-i)^k - \sum_{j=1}^n j(n-j)^k \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} i(n-i)^k - \sum_{j=1}^n j(n-j)^k + \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^k \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^k \end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)^k}{n^k} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^k$$

puis :

$$\frac{\mathbb{E}(X)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^k = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto (1-x)^k$. Donc $\frac{\mathbb{E}(X)}{n}$ est une somme de Riemann associée à la fonction f . Comme cette fonction est continue sur $[0, 1]$, la suite $\left(\frac{\mathbb{E}(X)}{n}\right)_{n \geq 1}$ est convergente de limite :

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[-\frac{(1-x)^k}{k} \right]_0^1 = \frac{1}{k}$$

On a donc $\frac{\mathbb{E}(X)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k}$ et donc :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{k}}$$

4. Déterminer la loi de Y et montrer que X et $n + 1 - Y$ suivent la même loi.

On raisonne de la même façon qu'à la question 1. L'univers image de Y est $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On sait que $P(Y = j) = P(Y \leq j) - P(Y \leq j - 1)$ donc :

$$P(Y = j) = \frac{j^k - (j - 1)^k}{n^k}$$

L'univers image de $n + 1 - Y$ est $\llbracket 1, n \rrbracket = X(\Omega)$. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors, d'après ce qui précède :

$$P(n + 1 - Y = j) = P(Y = n + 1 - j) = \frac{(n + 1 - j)^k - (n - j)^k}{n^k} = P(X = j)$$

Ainsi :

les variables aléatoires X et $n + 1 - Y$ suivent la même loi

5. En déduire un équivalent de l'espérance de Y quand n tend vers $+\infty$.

Comme X et $n + 1 - Y$ suivent la même loi, ces variables aléatoires ont la même espérance et, par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(X) = E(n + 1 - Y) = n + 1 - E(Y) \quad \text{c'est-à-dire} \quad E(Y) = n + 1 - E(X)$$

En utilisant la linéarité de la limite et la question 3., on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(Y)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{E(X)}{n} + \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{k} = \frac{k - 1}{k}$$

Finalement :

$$E(Y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \frac{k - 1}{k}$$