TD 3 - Variables aléatoires discrètes

Compétences à acquérir :

- ▷ C1 : Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète (univers image et probabilités associées)
- ▷ C2 : Reconnaître les différentes situations relatives aux lois usuelles : Bernoulli, binomiale, uniforme, géométrique et Poisson et connaître toutes leurs caractéristiques
- ▷ C3 : Étudier l'existence d'une espérance, d'une variance et les calculer en cas d'existence
- ▷ C4 : Utiliser le théorème de transfert
- ▷ C5 : Connaître les propriétés des espérances et des variances
- ▷ C6 : Utiliser les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev
- ▷ C7 : Utiliser l'une des méthodes usuelles : déterminer la loi d'une somme de va discrètes, la loi d'une va discrète définie conditionnellement à une autre ou la loi du min ou du max de va discrètes

Exercice 1 (C2) Pour chacune des expériences suivantes, déterminer la loi de la grandeur observée (on rappellera notamment l'univers image et les probabilités associées).

1. On lance 10 dés équilibrés et on observe la nombre de lancers qui amènent un 1.
2. On lance des flèches sur une cible (de manière indépendante) et on observe le premier lancer qui atteint la cible. On a une chance sur cinq d'atteindre la cible et on suppose que les tirs sont indépendants.
3. Un couple a 5 enfants. On compte le nombre de ceux qui ont les yeux bleus. La probabilité d'avoir les yeux bleus est supposée égale à $\frac{1}{3}$.
4. Michel descend dans un escalier de 300 marches en sautant 100 fois. À chaque fois, il saute aléatoirement une ou deux marches de manière indépendante des autres sauts. On compte le nombre de fois où Michel a fait un saut d'une seule marche.
5. On tire une boule d'une urne contenant dix boules blanches et deux noires et on remet la boule avant le tirage suivant. On observe le tirage donnant pour la première fois une boule noire.
6. On tire une boule d'une urne contenant dix boules blanches et deux noires et on remet la boule avant le tirage suivant. On observe le nombre de boules blanches tirées avant la première noire.

Exercice 2 (C2-C4) Une urne contient 100 jetons numérotés de 1 à 100. On effectue $n \in \mathbb{N}^*$ tirages avec remise. Soit X le nombre de jetons tirés qui portent un numéro multiple de 3.

1. Déterminer la loi et l'espérance de X.
2. Déterminer l'espérance de $(-1)^X$.
3. Calculer la probabilité que X soit pair.

Exercice 3 (C1-C3) Une urne contient une boule blanche et une boule noire. Si on tire une boule noire, la partie s'arrête, sinon, on remet la boule et on rajoute une blanche.
X étant le nombre de tirages effectués, déterminer sa loi et son espérance si elle existe.

Exercice 4 (C1-C2-C3) Une puce se déplace sur l'axe des abscisses à partir de l'origine. À chaque seconde, elle saute d'une unité vers la droite avec une probabilité $p \in]0,1[$ ou vers la gauche avec une probabilité $1-p$. Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n le nombre de sauts vers la droite effectués et X_n la position de la puce après n secondes.

1. Écrire une fonction `position` qui prend pour argument un entier n et un nombre réel $p \in]0,1[$ et qui renvoie l'abscisse de la puce au bout de n secondes.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer la loi de Y_n.
   (b) Donner le lien entre Y_n et X_n. En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.
   (c) Pour quelles valeurs de p la variable X_n est-elle centrée ? Commenter.

Exercice 5 (C1-C2-C3) On effectue des lancers d'un dé truqué tel que la probabilité que le dé donne un cinq soit $p \in]0,1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement « le lancer numéro i a amené un cinq ». Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note N_k le plus petit nombre de lancers nécessaires pour obtenir exactement k cinq avec le dé.

1. Quelle est la loi de S_n ?
2. (a) Écrire une fonction `S` qui prend n et p en arguments et donne la valeur de S_n.
   (b) Écrire une fonction `N` qui prend k et p en arguments et donne la valeur de N_k.
3. (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(N_k = m)$ en utilisant les variables aléatoires S_n et X_n $(n \in \mathbb{N}^*)$.
   (b) En déduire la loi de N_k.
4. Calculer l'espérance de N_2 si elle existe.

Exercice 6 (C2) On lance une pièce truquée jusqu'à ce qu'elle tombe sur *face* pour la première fois. On note $p \in]0,1[$ la probabilité que la pièce tombe sur *face*.

1. Écrire une fonction `experience` qui prend en argument la probabilité p que la pièce donne *face* et qui renvoie la liste des lancers obtenus jusqu'à l'obtention du premier *face*.
2. (a) Quelle est la probabilité que le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier *face* soit pair ?
   (b) Estimer cette probabilité par une fréquence lorsque $p = 1/4$ à l'aide de l'outil informatique.
3. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur *face* après le a^{e} lancer (au sens large).

Exercice 7 (C1-C3-C4) Soient λ un nombre réel et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \lambda 3^{-n}$$

Soit X une variable aléatoire réelle discrète d'univers image égal à $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathrm{P}(X = n) = a_n$.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Si elles existent, calculer l'espérance et la variance de X.
3. Calculer alors l'espérance des variables aléatoires $X(X+1)$ et $X\,\mathbf{1}_{(X \text{ pair})}$ si elles existent.

Exercice 8 (C1-C2-C3-C7)

1. On lance un dé équilibré jusqu'à ce qu'on obtienne le premier as. On note T le numéro du lancer correspondant. Déterminer la loi de T, son espérance et sa variance.
2. Calculer $\mathrm{P}(T > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On dispose de trois dés équilibrés qu'on lance simultanément. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir au moins un as.
   (a) Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier as avec le k^{e} dé. Exprimer N en fonction de X_1, X_2 et X_3.
   (b) Pour tout entier naturel k, calculer $\mathrm{P}(N > k)$.
   (c) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{P}(N = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(N > k) - n\,\mathrm{P}(N > n)$$
   (d) En déduire que N admet une espérance que l'on déterminera.
   (e) Montrer que N suit une loi usuelle et retrouver l'espérance de N.

Exercice 9 (C2-C4-C5) Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer, si elles existent, $\mathrm{E}(X+1)$ et $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.
2. Montrer que $\dfrac{1}{\mathrm{E}(X+1)} \leqslant \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.
3. La fonction `poisson` du module `random` de `numpy`, sous la forme `poisson(a,n)`, permet de simuler un échantillon de taille n de la loi de Poisson de paramètre a (l'argument d'entrée n est facultatif). L'argument de sortie est un tableau (ou un seul nombre pour `poisson(a)`).
   Construire une fonction `Y` qui prend comme argument un nombre réel a et qui renvoie une valeur simulée de la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{X+1}$. Proposer une estimation de l'espérance de Y en utilisant la fonction `Y`.

Exercice 10 (C1-C2) Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Justifier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{\substack{n\geqslant 0\\ n \text{ pair}}} \frac{\lambda^n}{n\,!}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{n\geqslant 0\\ n \text{ impair}}} \frac{\lambda^n}{n\,!}$ et calculer leurs sommes en considérant les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\lambda^n}{n\,!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-\lambda)^n}{n\,!}$.
2. Calculer la probabilité que X soit pair.
3. On définit la variable aléatoire Y par $Y = \dfrac{X}{2}$ si X est pair, et $Y = 0$ sinon.
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Calculer l'espérance de Y si elle existe.

Exercice 11 (C2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On admet qu'il existe une variable aléatoire réelle X vérifiant les propriétés suivantes :

$$X(\Omega) = \left\{ \pm\sqrt{k} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}, \qquad X^2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$$

et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $\mathrm{P}\left(X = -\sqrt{n}\right) = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{P}\left(X = \sqrt{n}\right)$.

1.(a) Donner l'espérance et la variance de X^2.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathrm{P}\left(X = \sqrt{n}\right)$.
   (c) Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$.
   (d) Calculer $\mathrm{P}(X \geqslant 0)$.
2. Montrer que pour tout $(m, p) \in \mathbb{N}^2$, on a $(m^2 + p)\,! \geqslant (m^2)!\,p\,!$.
3. Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{P}(|X| \geqslant m) \leqslant \frac{\lambda^{m^2}}{(m^2)\,!}$$

4. Écrire une fonction `proba` d'arguments $\lambda > 0$ et un nombre réel strictement positif ε et qui renvoie un entier naturel m à partir duquel $\mathrm{P}(|X| \geqslant m) \leqslant \varepsilon$.

Exercice 12 (C2-C6) Un dé à six faces amène le 6 avec la probabilité $p \in]0, 1[$ à chaque lancer. On lance le dé une infinité de fois et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où le 6 est sorti au cours des $6n$ premiers lancers.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de X_n, son espérance et sa variance.
2. Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une variable aléatoire discrète X.
3. On suppose le dé équilibré. À partir de quelle valeur $n \in \mathbb{N}^*$ est-on sûr d'obtenir une proportion de 6 dans un intervalle de longueur 10^{-2} autour de $\frac{1}{6}$ avec une probabilité d'au moins $\frac{1}{2}$?

Exercice 13 (C1-C2-C3) Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.
On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.
À partir d'un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite AABBBA... signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3, 4 et 5 le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit qu'on a une première série de longueur 2 et une seconde série de longueur 3 (ce qui est aussi le cas de BBAAAB...).
On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la seconde série.

1.(a) Écrire un programme `python` permettant de donner une estimation de la probabilité de chacun des événements $(L_1 = 1)$, $(L_1 = 2)$, $(L_2 = 1)$ et $(L_2 = 2)$.
   (b) En utilisant l'outil informatique, proposer une estimation des espérances de L_1 et L_2.

2.(a) Déterminer la loi de L_1 et vérifier par le calculer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(L_1 = k) = 1$.
   (b) Déterminer l'espérance mathématique de L_1.

3. Déterminer la loi de L_2 ainsi que son espérance.

Exercice 14 (C1-C3-C5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient deux lots de jetons numérotés de 1 à n. À chaque tirage, on prélève deux jetons simultanément. Si les jetons portent le même numéro, on les retire de l'urne, sinon on remet les deux jetons dans l'urne. On effectue les tirages jusqu'à vider l'urne. On note T_n la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

1. Déterminer la loi de T_1.
2. Démontrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \qquad \mathrm{P}(T_2 = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$$
3. Montrer que T_2 admet une espérance que l'on calculera.
4. On revient désormais au cas général (n est quelconque).
   (a) Écrire un programme `python` qui simule cette expérience en renvoyant la valeur de T_n.
   (b) À l'aide de l'outil informatique, émettre une conjecture quant à la valeur de l'espérance de T_n.
5.(a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a l'égalité :
$$\mathrm{P}(T_n = k + 1) = \frac{1}{2n-1}\,\mathrm{P}(T_{n-1} = k) + \frac{2n-2}{2n-1}\,\mathrm{P}(T_n = k)$$
   (b) On admet que T_j admet une espérance pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.
   Justifier que $\mathrm{E}(T_n) = \mathrm{E}(T_{n-1}) + 2n - 1$. En déduire alors l'espérance de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15 (C1-C2-C3-C5-C7) Un joueur A possède une pièce qui tombe sur pile avec la probabilité 1/3. Un joueur B possède une pièce qui tombe sur pile avec la probabilité $p \in]0,1[$.

1. **Simulation informatique**
   (a) Proposer une fonction `python` nommée `lancerB`, prenant en entrée le paramètre p et modélisant un lancer de pièce par le joueur B.
   (b) Comment peut-on alors modéliser un lancer de pièce pour le joueur A ?
   (c) Les deux joueurs lancent à tour de rôle leur pièce. Le joueur déclaré vainqueur est celui qui obtient pile pour la première fois avant l'autre. Si les deux joueurs obtiennent le premier pile en même temps, alors les deux joueurs sont déclarés ex-æquo et la partie est terminée. Écrire une fonction `bataille` qui simule une partie et qui renvoie le vainqueur éventuel.
2. **Étude d'une variable aléatoire Δ**
   Chaque joueur lance sa pièce successivement jusqu'à obtenir pile pour la première fois. On note X le nombre de lancers effectués par le joueur A et Y le nombre de lancers effectués par le joueur B et on pose $\Delta = X - Y$.
   (a) Déterminer les lois de X et de Y et donner leur espérance et leur variance.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Δ.
   (c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X=k)\,\mathrm{P}(Y=k)$ et en déduire la valeur de $\mathrm{P}(\Delta = 0)$.
   (d) Pour tout entier *relatif* n, calculer $\mathrm{P}(\Delta = n)$.
   (e) Calculer la probabilité que le joueur A gagne.

Exercice 16 (C1-C2-C3-C7) Le nombre de véhicules empruntant l'autoroute dans le sens Paris-Lyon suit une loi de Poisson de paramètre λ et dans le sens Lyon-Paris de paramètre μ. Sachant que n véhicules franchissent le péage (de Dijon), quelle est la probabilité que k d'entre-eux viennent de Paris ?

Exercice 17 (C1-C3)

1. Montrer que, pour tous $(q,r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $q \leqslant r$, on a $\displaystyle\sum_{k=q}^{r} \binom{k}{q} = \binom{r+1}{q+1}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On les tire une à une et sans remise. Soit X la variable aléatoire réelle égale au rang de la première boule blanche obtenue.
   (a) Démontrer que la loi de X est donnée par :
   $$\forall k \in X(\Omega), \qquad \mathrm{P}(X=k) = n\frac{n\,!\,(2n-k)\,!}{(n-k+1)\,!\,(2n)\,!}$$
   (b) Écrire un script `python` simulant l'expérience. On renverra la valeur de X.
   (c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $2n+1-X$ à l'aide du changement d'indice $k = 2n+1-i$. En déduire l'espérance de X.
   (d) On note Y le rang de la seconde boule blanche obtenue. Écrire une fonction `XY` donnant la valeur de X et de Y pour l'expérience simulée.

Exercice 18 (C1-C3-C7) Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $k \in [\![2,n]\!]$. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire k jetons avec remise et on note X (respectivement Y) la variable aléatoire réelle égale au plus petit (respectivement plus grand) des numéros obtenus.

1.(a) Soit Z une variable aléatoire (quelconque) d'univers image égal à $[\![1,n]\!]$. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a l'égalité $\mathrm{P}(Z = k) = \mathrm{P}(Z \geqslant k) - \mathrm{P}(Z \geqslant k+1)$.

(b) Déterminer la loi de X.

2.(a) Écrire une fonction `experience` qui prend en argument n et k et sort les k numéros tirés.

(b) En déduire une fonction `valeurXY` renvoyant les valeurs de X et Y. Il n'est pas autorisé d'utiliser les fonctions `min` et `max` prédéfinies dans `python`.

3. Montrer que $n^k\,\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^k$ puis déterminer un équivalent de $\mathrm{E}(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

4. Déterminer la loi de Y et montrer que X et $n+1-Y$ suivent la même loi.

5. En déduire un équivalent de l'espérance de Y quand n tend vers $+\infty$.