Programme de colle S4

1 Remarques aux colleurs

— Il y a beaucoup de petits chapitres au programme, donc privilégiez peut-être pour une fois de courts exercices sur chaque thème.
— Pour les séries, les applications du critère de comparaison ou des équivalents de séries à termes positifs sont prioritaires cette semaine.
— En probabilités, les différentes notions d'indépendance n'ont pas encore été revues. Vous pouvez utiliser l'indépendance mais nous ne faisons pas encore de distinction entre indépendance 2 à 2 et indépendance mutuelle.
— La formule des probabilités composées n'a pas encore été revue, il sera peut-être nécessaire de la rappeler aux étudiants.

2 Chapitre 1 : Séries numériques

— notion de série numérique : somme partielle d'ordre n $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, notations $\sum u_n$ pour une série, somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ pour la valeur de la limite d'une série convergente
— reste R_n d'ordre n d'une série convergente : $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$; la suite $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite 0
— si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente de limite 0 (la réciproque est fausse et il faut savoir donner un contre-exemple), utilisation de la forme contraposée pour régler les cas de divergence *grossière*
— l'ensemble des séries convergentes a une structure d'espace vectoriel : si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

— la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes
— les séries usuelles :
1. la série *harmonique* $\sum \frac{1}{n}$ est divergente
2. la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (la somme n'est pas à connaître)
3. pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle (de paramètre x) est convergente de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,!} = \mathrm{e}^{\,x}$
4. pour tout $q \in \mathbb{R}$, les séries géométrique $\sum q^n$, géométrique dérivée première $\sum nq^{n-1}$ et géométrique dérivée seconde $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent chacune si et seulement si $q \in]-1,1[$ et :

$$\forall q \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

5. les séries télescopiques : $\sum (a_{k+1} - a_k)$ (pas de résultat général : on effectue le calcul des sommes partielles directement pour conclure quant à la nature et à la somme éventuelle de la série)

— **théorème de comparaison des séries à termes positifs**
On suppose que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

1. si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$
2. si la série $\sum u_n$ est divergente, alors la série $\sum v_n$ diverge

— **théorème des équivalents des séries à termes positifs**
Si deux suites positives (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.
— convergence absolue d'une série : définition, lien avec la convergence

3 Fiche de révision 4 : Nombres complexes, trigonométrie

— forme exponentielle d'un nombre complexe, notamment avec la technique de l'angle moitié pour $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta}$, résolution d'équation du type $z^n = \alpha$ en écrivant z sous forme exponentielle et en identifiant les formes exponentielles
— module d'un nombre complexe, propriétés
— utilisation de la conjugaison pour caractériser les nombres réels et les imaginaires purs
— formule d'Euler, formule de Moivre, inégalité(s) triangulaire(s), linéarité de la partie réelle et de la partie imaginaire
— formule de trigonométrie ($\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\cos(2x)$, $\sin(2x)$), procédé de linéarisation, de réduction de $a\cos(x) + b\sin(x)$ en $R\cos(x + \varphi)$, méthode de l'angle moitié, résolution d'équation et d'inéquation trigonométrique

4 Fiche de révision 5 : Équations différentielles du premier et du second ordre

— théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ou du second ordre
— équation différentielle linéaire du premier ordre $a(x)y' + b(x)y = c(x)$: ensemble des solutions de l'équation homogène, recherche d'une solution particulière, méthode de la variation de la constante
— équation différentielle linéaire du second ordre $ay'' + by' + cy = d(x)$: ensemble des solutions de l'équation homogène, **recherche de solution particulière dont la forme est donnée dans l'énoncé**
— principe de superposition
— résolution d'un problème de Cauchy
— changement de fonction d'étude dans une équation différentielle

5 Fiche de révision 6 : Dénombrement

— différents types de dénombrement : listes, listes sans répétition, combinaisons d'un ensemble, propriétés du cardinal (formule du crible hors programme), probabilité uniforme
— cardinal d'un ensemble fini (c'est le nombre d'éléments de l'ensemble), cardinal d'un sous-ensemble d'un ensemble fini
— cardinal d'une union de deux (ou plus que deux) ensembles *disjoints*, cardinal d'une union de deux ensembles quelconques
— rappel du produit cartésien de deux (ou plus que deux) ensembles, cardinal, un élément de E^p sera appelé **une p-liste d'éléments de E**
— **p-arrangement d'un ensemble E** : définition, nombre de p-listes sans répétition d'un ensemble fini
— **permutations** : définition, nombre de permutations d'un ensemble fini
— **combinaisons** : définition, nombre de combinaisons d'un ensemble fini, cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini

6 Chapitre 2 : Probabilités

- notations $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$
- notion de tribu $\mathcal{T}$, espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$
- notion de probabilité : définition, propriétés ($\mathrm{P}(\overline{A})$, $\mathrm{P}(A \cup B)$, croissance d'une probabilité,...), probabilité conditionnelle
- notion de probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{T})$:
  1. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;
  2. σ-additivité : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(A_n)$ est convergente de somme :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

- espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$
- expérience aléatoire, univers, événement, événement élémentaire, impossible, quasi-impossible (ou négligeable), certain, quasi-certain, événements incompatibles
- système complet d'événements, système quasi-complet d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$
- formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ est un système (quasi-)complet d'événements, alors pour tout $B \in \mathcal{T}$, la série de terme général $\mathrm{P}(B \cap A_n)$ est convergente de somme $\mathrm{P}(B)$ et :

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(B \cap A_n).$$

7 Python

- Travail sur les listes et les chaînes de caractères (TP1)
- Méthode du balayage et méthode de dichotomie (pour la dichotomie, rappeler le principe dans l'énoncé)
- Tris de listes (tri par insertion, tri par sélection, tri fusion, tri rapide)

8 La question de cours

Voici quelques exemples (liste non exhaustive) :

1. Étant donnée une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, écrire le lien entre les propriétés « $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ » et « la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge ».
2. Donner la condition de convergence des trois types de séries géométriques ainsi que les sommes de ces séries lorsqu'elles sont convergentes.
3. Définir la série exponentielle.
4. Énoncer le théorème de comparaison des séries à termes positifs.
5. Énoncer le théorème des équivalents des séries à termes positifs.
6. Définir la convergence absolue d'une série et donner son lien avec la convergence de la série.
7. Définition du module d'un nombre complexe.
8. Si α est un nombre réel quelconque, rappeler les solutions de l'équation $\cos(x) = \cos(\alpha)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
9. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, donner la définition de « $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements »
10. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, donner la définition de « $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'événements »
11. Énoncer la formule des probabilités totales
12. Énoncer le principe de superposition pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1

13. Énoncer le principe de superposition pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants
14. Énoncer le théorème fondamental pour les équations différentielles
15. Définir une p liste à n éléments et les dénombrer
16. Définir une n permutation et les dénombrer
17. ...