

Chapitre 2

Probabilités

1 Union ou intersection infinie d'évènements

Définition 1.0.1. Soit E un ensemble.

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille infinie de parties de E . On pose :

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = \{x \in E, \exists k \in \mathbb{N}, x \in A_k\}$$

$$\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k = \{x \in E, \forall k \in \mathbb{N}, x \in A_k\}$$

Exemple 1.0.1. 1. Déterminer $\bigcap_{k=1}^{+\infty} [0, k]$.

$\text{Pq } \bigcap_{k=1}^{+\infty} [0, k] = [0, 1] \cap [0, 2] \cap \dots \cap [0, k] \cap \dots = [0, 1]$

* Soit $x \in [0, 1]$, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, k]$, donc $x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} [0, k]$,

donc $[0, 1] \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} [0, k]$.

* Soit $x \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} [0, k]$, alors en particulier $x \in [0, 1]$

donc $\bigcap_{k=1}^{+\infty} [0, k] \subset [0, 1]$.

* Ainsi, $\boxed{\bigcap_{k=1}^{+\infty} [0, k] = [0, 1]}$.

2. Déterminer $\bigcup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1]$.

$\text{Pq } \bigcup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1] = [0, 1] \cup [1, 2] \cup [2, 3] \cup \dots = \mathbb{R}_+$

* Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors $x \in [Lx, Lx+1]$ donc $x \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1]$ car $Lx \geq 0$,

ainsi $\mathbb{R}_+ \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1]$.

* Soit $x \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1]$, alors $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tq $x \in [k_0, k_0+1] \subset \mathbb{R}_+$ donc $x \in \mathbb{R}_+$.

Ainsi $\bigcup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1] \subset \mathbb{R}_+$

* Ainsi, $\boxed{\bigcup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1] = \mathbb{R}_+}$.

2 Notion de tribu

Définition 2.0.1. Une **tribu** sur Ω est une famille $\mathcal{T}$ de parties de Ω telle que :

1. $\Omega \in \mathcal{T}$
2. Si $A \in \mathcal{T}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{T}$
3. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in \mathcal{T}$ alors $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{T}$

Tout élément de la tribu $\mathcal{T}$ est appelé un **évènement**.
 $(\Omega, \mathcal{T})$ est un **espace probabilisable**

Exemple 2.0.1. On considère $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω .

$$* \Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$$* \text{ Si } A \in \mathcal{P}(\Omega), \text{ alors } \bar{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

$$* \text{ Si pour tout } n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{P}(\Omega), \text{ alors } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{P}(\Omega).$$

2. On se place dans la situation où le joueur gagne s'il obtient un 6. Montrer que $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω .

$$* \Omega \in \mathcal{T}$$

$$* \emptyset = \bar{\Omega} \text{ et } \bar{\{6\}} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$* \emptyset \cup \{6\} = \{6\}, \{6\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = \Omega, \Omega \cup \{6\} = \Omega, \dots$$

3. Créer une autre tribu sur Ω .

$$\{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$$

Remarque 2.0.1. Si Ω est un ensemble fini, on prend traditionnellement $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.

3 Probabilité sur une tribu

3.1 Définition de probabilité

Définition 3.1.1. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Deux événements $(A, B) \in \mathcal{T}^2$ sont dits **incompatibles ou disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

Définition 3.1.2. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Une application $P : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{T})$ si elle vérifie les propriétés suivantes :

- $P(\Omega) = 1$
- **axiome de σ -additivité** : pour toute suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}$ deux à deux incompatibles, la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ converge et :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

On dit alors que le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un **espace probabilisé**.

Exemple 3.1.1. On reprend l'univers et la tribu de l'exemple 2.0.1 question 2. Donner une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$

On pose $P : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} P(\Omega) = 1 & \text{imposé} \\ P(\emptyset) = 0 \\ P(\{1, 6\}) = 1/4 & \text{choisit dans }]0, 1[\\ P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = 3/4 & \text{égal à } 1 - P(\{1, 6\}) \end{cases}$$

Remarque 3.1.1. La propriété de σ -additivité de P est valable également pour une suite *finie* d'événements deux à deux incompatibles. En effet, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \dots, A_n)$ une suite d'événements deux à deux incompatibles, il suffit de choisir $A_k = \emptyset$ pour tout entier $k \geq n + 1$ et d'appliquer la définition.

3.2 Propriétés des probabilités

Proposition 3.2.1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{T}^2$, on a :

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ et en particulier $P(\emptyset) = 0$
2. $P(A) \in [0, 1]$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
5. si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$ (croissance de P).

Proposition 3.2.2. On considère un univers de la forme $\Omega = \{\omega_i \mid i \in I\}$ où I est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ (fini ou infini). Soit $(p_i)_{i \in I}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls. Alors :

- il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $P(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si la série $\sum_{i \in I} p_i$ est convergente de somme égale à 1.
- dans ce cas, il y a unicité de la probabilité qui vérifie la propriété précédente.

Exemple 3.2.1. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0$$

1. Déterminer le terme général de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ afin qu'il existe une probabilité P sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $P(\{n\}) = a_n$.

* On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

L'équation caractéristique associée est : $2x^2 - 5x + 2 = 0$,

le discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9 > 0$.

Les racines sont $x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5+3}{4} = 2$.

Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = A \left(\frac{1}{2}\right)^n + B \times 2^n$.

* Pour qu'il existe une telle probabilité, on doit avoir $P(\mathbb{N}^*) = 1$.

$$P(\mathbb{N}^*) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{n\}\right)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(\{n\}) \text{ par } \sigma\text{-additivité car ces } \{n\} \text{ sont disjoints}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A \left(\frac{1}{2}\right)^n + B \times 2^n \right)$$

Ceci n'est possible que si $B = 0$ car la série géométrique de raison $r = 2 > 1$ est divergente.

On a alors :

$$1 = A \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow 1 = A \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right) \Leftrightarrow 1 = A \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) \Leftrightarrow A = 1$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2. On considère les événements A : « on obtient un nombre supérieur ou égal à 5 » et B : « on obtient un multiple de 2 ». Déterminer $P(A)$ et $P(B)$.

$$\begin{aligned}
 \text{On a } P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\
 &= 1 - P(\text{"obtenir un nb } \leq 4\text{"}) \\
 &= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^4 \text{"obtenir } k\text{"}\right) \\
 &= 1 - \sum_{k=1}^4 P(\text{"obtenir } k\text{"}) \\
 &= 1 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\
 &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right)
 \end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{1}{16}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{On a } P(B) &= P\left(\bigcup_{m \in 2\mathbb{N} \setminus \{0\}} \{m\}\right) \\
 &= P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{2n\}\right) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} \text{ par } \sigma\text{-additivité car les évts sont disjoints} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1 \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1
 \end{aligned}$$

$$P(B) = \frac{1}{3}.$$

Proposition 3.2.3 (Théorème de la limite croissante/décroissante).

- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$, alors :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$, alors :

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

3.3 Évènement négligeable et presque-sûr

Remarque 3.3.1. On sait que les événements $\emptyset$ et Ω sont appelés les événements impossible et certain respectivement. Ils sont tels que $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$. Lorsque l'univers est infini, il est possible qu'un événement A soit tel que $P(A) = 0$ mais sans avoir $A = \emptyset$ (de même on pourrait avoir $P(A) = 1$ sans avoir $A = \Omega$).

Définition 3.3.1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

Un évènement $A \in \mathcal{A}$ est dit

- **presque-sûr** si $P(A) = 1$
- **négligeable** si $P(A) = 0$

Exemple 3.3.1. On répète une infinité de fois un lancer de pièce équilibrée.

1. Que peut-on dire de l'événement "Obtenir au moins un pile" ?

* Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose A_k : "Obtenir au moins un pile au cours des k premiers lancers".

On remarque que $A_{k+1} = A_k \cup (\bar{A}_k \cap P_{k+1})$ donc $A_k \subset A_{k+1}$.

Il s'agit donc d'une suite croissante d'événements, et on remarque :

$$\text{"Obtenir au moins un pile"} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

* Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_k) = 1 - P(\bar{A}_k) = 1 - P(F_1 \cap \dots \cap F_k) = 1 - P(F_1)P(F_2) \dots P(F_k)$ par indépendance des lancers
 $= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$ car la pièce est équilibrée.

* Par thm de la limite croissante, on en déduit que :

$$P(\text{"Obtenir au moins un pile"}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(A_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1.$$

Ainsi, l'événement "Obtenir au moins un pile" est presque-sûr.

2. Que peut-on dire de l'événement "Obtenir uniquement des piles" ?

* Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose B_k : "Obtenir uniquement des piles au cours des k premiers lancers".

On remarque que $B_{k+1} = B_k \cap P_{k+1}$, donc $B_{k+1} \subset B_k$. Il s'agit d'une suite décroissante d'événements.
 De plus, $\text{"Obtenir uniquement des piles"} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k$.

* Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, $P(B_k) = P(F_1 \cap \dots \cap F_k)$
 $= P(F_1) \dots P(F_k)$ par indépendance des lancers
 $= \left(\frac{1}{2}\right)^k$ car la pièce est équilibrée

* Par thm de la limite décroissante :

$$P(\text{"Obtenir uniquement des piles"}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(B_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1.$$

Ainsi, "Obtenir uniquement des piles" est un évènement négligeable.

4 Formule des probabilités totales

Définition 4.0.1. Une famille $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I$, où I est un sous-ensemble (fini ou non) de $\mathbb{N}$, est un **système complet d'événements** (ou partition de l'univers) si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1. les événements sont deux à deux incompatibles : $\forall (i, j) \in I, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$,
2. les événements recouvrent $\Omega : \bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Définition 4.0.2. Une famille $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I$, où I est un sous-ensemble (fini ou non) de $\mathbb{N}$, est un **système quasi-complet d'événements** (ou partition de l'univers) si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1. les événements sont deux à deux incompatibles : $\forall (i, j) \in I, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$,
2. la somme de la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ est égale à 1.

Théorème 4.0.1 (Formule des probabilités totales). Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ un système complet (ou quasi-complet) d'événements. Pour tout $B \in \mathcal{T}$, la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n \cap B)$ est convergente et :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B).$$

Exemple 4.0.1. On lance indéfiniment un dé à six faces (équilibré) et on note la suite des résultats obtenus. L'univers est donc $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites d'éléments de l'ensemble $\llbracket 1, 6 \rrbracket$). Par exemple, l'élément $(1, 4, 5, 3, \dots)$ de Ω signifie que le premier lancer a donné un as, le deuxième un 4, le troisième un 5, la quatrième un 3, etc.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement B_n : « on obtient la face numérotée 1 pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ lancer » et l'événement U_n : « le $n^{\text{ème}}$ lancer a donné la face numérotée 1 ».

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité de l'événement B_n . Vérifier que l'on a $\sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = 1$.

* Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on remarque que $B_m = \overline{U_1} \cap \overline{U_2} \cap \dots \cap \overline{U_{m-1}} \cap U_m$.

Comme les lancers sont indépendants, on obtient :

$$\begin{aligned} P(B_m) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{m-1} \overline{U_k} \cap U_m\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{m-1} P(\overline{U_k})\right) P(U_m) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{m-1} \times \frac{1}{6} \text{ car le dé est équilibré.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{ Puis pour } m \in \mathbb{N}^*, S_m &= \sum_{k=1}^m P(B_k) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \sum_{k=1}^m \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{\ell=0}^{m-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{\ell} \text{ en posant } \ell = k-1 \end{aligned}$$

On reconnaît une somme partielle de $\sum$ géom de raison $q = \frac{5}{6}$, $-1 < q < 1$, donc convergente.

Ainsi, la $\sum$ de $P(B_k)$ converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k) = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1.$$

7

Conclu : $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k) = 1}$.

2. Calculer la probabilité de l'événement E : « la première fois qu'un 1 est sorti, il est suivi d'un autre 1 ».

Les événements $(B_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ sont 2 à 2 disjoints et $\sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k) = 1$ donc $(B_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ forme un système quasi-complet d'événements. Par formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(E) &= \sum_{m=1}^{+\infty} P(E \cap B_m) = \sum_{m=1}^{+\infty} P(A_{m+1}) P(B_m) \text{ par indépendance des lancers} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{m=1}^{+\infty} P(B_m) = \frac{1}{6} \quad \text{donc} \quad \boxed{P(E) = \frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

3. On considère le jeu suivant. On lance un dé jusqu'à obtenir un 1. Si n lancers ont été nécessaires pour l'obtenir, on lance une pièce équilibrée n fois. On gagne si, lors de ces n lancers de pièce, au moins un *pile* est obtenu. Soit alors l'événement F : « on gagne à ce jeu ». Déterminer la probabilité de F.

On considère le système quasi-complet d'événements $(B_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ et on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(F) &= \sum_{m=1}^{+\infty} P(F \cap B_m) = \sum_{m=1}^{+\infty} P(B_m) P_{B_m}(F) \text{ par formule des probabilités composées} \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} P(B_m) (1 - P_{B_m}(\bar{F})) \\ &\quad \text{on sait que des "face" lors de } m \text{ lancers indépendants d'une pièce équilibrée} \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{m-1} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m\right) \\ &= \underbrace{\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}}_1 - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{m-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^m \\ &= 1 - \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{\ell} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell} \text{ avec } \ell = m-1 \\ &= 1 - \frac{1}{12} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{\ell} = 1 - \frac{1}{12} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{12}} \\ &= 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} \quad \text{donc} \quad \boxed{P(F) = \frac{6}{7}}. \end{aligned}$$

5 Conditionnement et indépendance

5.1 Conditionnement

Proposition 5.1.1. Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{T}$ tel que $P(A) \neq 0$. Alors l'application :

$$P_A : \begin{cases} \mathcal{T} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ B & \longmapsto P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{cases}$$

est une probabilité, appelée **probabilité conditionnelle sachant l'événement A**.

Remarque 5.1.1.

- La probabilité P_A vérifie donc toutes les propriétés de la proposition précédente :

$$\forall B \in \mathcal{T}, \quad P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B), \dots$$

- La probabilité conditionnelle $P_A(B)$ se note aussi $P(B|A)$.

Exemple 5.1.1. On dispose d'un jeu de 32 cartes auxquelles on enlève 5 cartes. On distribue ensuite 5 nouvelles cartes à un joueur J . Sachant que parmi les cartes enlevées il y a exactement un roi, quelle est la probabilité que le joueur J ait au moins un roi ?

→ On note :

A : "Il y a exactement un roi parmi les cartes enlevées"

J : "J a au moins un roi".

On veut déterminer $P_A(J) = \frac{P(A \cap J)}{P(A)}$ par formule

du conditionnement.

→ On détermine $P(A)$. Le nombre total de manières

de retirer 5 cartes est $\binom{32}{5}$.

Le nb de manières contenant exactement un roi est :

$$\binom{4}{1} \times \binom{28}{4}$$

choix du roi choix des 4 "non rois"

Par équiprobabilité entre les cartes :

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{28}{4}}{\binom{32}{5}}$$

→ On détermine $P(A \cap J)$. Le nb total de tirages

possibles est $\binom{32}{5} \times \binom{27}{5}$
1^{er} tirage de 5 cartes 2nd tirage de 5 cartes parmi les restantes.

Le nb de tirages favorables est :

$$\underbrace{\binom{4}{1} \times \binom{28}{4}}_{\text{nombre de A}} \times \left(\binom{27}{5} - \binom{26}{5} \right)$$

↳ Nb de tirages sans roi
↳ Nb total de tirages

$$\text{Ainsi, } P(A \cap J) = \frac{\binom{4}{1} \binom{28}{4} \left(\binom{27}{5} - \binom{26}{5} \right)}{\binom{32}{5} \binom{27}{5}}$$

- On a donc :

$$P_A(J) = 1 - \frac{\binom{26}{5}}{\binom{27}{5}} = 1 - \frac{26!}{5! \cdot 22!} \times \frac{5! \cdot 22!}{27!} = 1 - \frac{22 \times 21 \times 20}{27 \times 26 \times 25}$$

donc $P_A(J) = \frac{277}{585}$.

Théorème 5.1.2 (Formule des probabilités composées).

Soient A et B deux événements :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

avec la convention $P(A) = 0 \implies P(A)P_A(B) = 0$.

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements, la **formule des probabilités composées généralisée** donne :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exemple 5.1.2. Un singe a à sa disposition 5 bananes et 9 pommes. On suppose que ce singe aime autant les bananes que les pommes et que, lorsqu'il a faim, il choisit un fruit au hasard. Quelle est la probabilité qu'il mange d'abord 2 bananes puis une pomme puis une banane ?

On note B_i : "Manger une banane en $i^{\text{ème}}$ position".

$$\text{On calcule : } P(B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3 \cap B_4) = P(B_1) P_{B_1}(B_2) P_{B_1 \cap B_2}(\bar{B}_3) P_{B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3}(B_4)$$

par formule des probabilités composées

$$= \frac{5}{14} \times \frac{4}{13} \times \frac{9}{12} \times \frac{3}{11} \text{ par équiprobabilité entre les fruits}$$

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3 \cap B_4) = \frac{45}{2002}$$

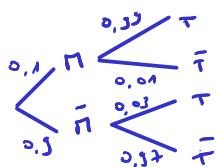
Théorème 5.1.3 (Formule de Bayes). Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathcal{T}^2$ deux événements de probabilités non nulles. Alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)}$$

Exemple 5.1.3. On suppose que 10% d'une population est atteinte d'une maladie. On dispose d'un test de dépistage pour tester cette maladie. Si l'individu choisi est malade, le test est positif dans 99% des cas. Si l'individu est sain, le test est positif dans 3% des cas (ce sont des *faux positifs*). Si le test est positif, quelle est la probabilité que la personne soit réellement malade ?

On note M : "Être malade" et T : "Être testé positif".

On a l'arbre suivant :



On veut déterminer $P_T(M) = \frac{P(M)}{P(T)} P_M(T)$ par formule de Bayes.

Pour déterminer $P(T)$, on applique la formule des probabilités totales avec les cas $(M, \bar{M})$:

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M}) \\ &= P(M) P_M(T) + P(\bar{M}) P_{\bar{M}}(T) \text{ par formule des probabilités composées} \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{99}{100} + \frac{9}{10} \times \frac{3}{100} \\ &= \frac{126}{1000} = 0,126 \end{aligned}$$

$$\text{On a alors } P_T(n) = \frac{P(n)}{P(T)} P_n(T) = \frac{0,1}{0,126} \times 0,99 \approx 0,786$$

Il y a 78,6 % de chances que la personne ait vraiment malade.

5.2 Indépendance de deux événements

Définition 5.2.1. Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements (c'est-à-dire $(A, B) \in \mathcal{T}^2$). On dit que **A et B sont des événements indépendants** si :

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

Remarque 5.2.1.

1. Si $P(A) \neq 0$, cela revient à dire que $P_A(B) = P(B)$ (la réalisation de B ne dépend pas de celle de A).
2. **Attention :** cette notion n'a rien à voir avec celle d'incompatibilité ($A \cap B = \emptyset$).

Exemple 5.2.1. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. On note D l'événement « La carte tirée est une dame », C l'événement « La carte tirée est un cœur » et F l'événement « La carte tirée est une figure ».

1. Les événements D et C sont-ils indépendants ?

$$\text{Par équiprobabilité entre les cartes, on a : } P(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \quad , \quad P(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$\text{et } P(C \cap D) = P(\text{"Dame de cœur"}) = \frac{1}{32}.$$

$$\text{On remarque que } P(C) \times P(D) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(C \cap D)$$

donc les événements C et D sont indépendants.

2. Les événements D et F sont-ils indépendants ?

$$\text{On a } P(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \quad , \quad P(F) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \quad \text{et} \quad P(D \cap F) = P(D) = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Ainsi } P(D) \times P(F) = \frac{3}{64} \neq P(D \cap F)$$

donc les événements D et F ne sont pas indépendants.

5.3 Indépendance de n événements

Définition 5.3.1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{T}^n$ une famille d'événements.

On dit que $(A_1, \dots, A_n)$ est une famille d'événements deux à deux indépendants si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

Définition 5.3.2. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{T}^n$ une famille d'événements.

On dit que $(A_1, \dots, A_n)$ est une famille d'événements mutuellement indépendants si :

$$\forall J \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Remarque 5.3.1. On remarque en particulier que des événements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants.

Exemple 5.3.1. Soient A, B et C trois événements.

1. Lister les propriétés à vérifier pour que (A, B, C) soit une famille d'événements deux à deux indépendants.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

2. Lister les propriétés à vérifier pour que (A, B, C) soit une famille d'événements mutuellement indépendants.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

5.4 Indépendance d'une suite d'événements

Définition 5.4.1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On dit que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements indépendants si :

$$\forall J \subset \mathbb{N}, J \text{ de cardinal fini, la famille } (A_j)_{j \in J} \text{ est mutuellement indépendante.}$$

Exemple 5.4.1. On lance une infinité de fois une pièce de monnaie (équilibrée ou non). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement F_n : « on obtient face au $n^{\text{ème}}$ lancer ». Alors $(F_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants.