
Fiche de révision 6 - Correction

Dénombrement

1 Compétences et notions à maîtriser

- ▷ C1 : Déterminer le cardinal d'un ensemble fini
- ▷ C2 : Maîtriser les notions de p -listes, de p -listes sans répétitions, de permutations et de p -combinaisons et cardinaux associés
- ▷ C3 : Utiliser l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble fini E et cardinal
- ▷ C4 : Utiliser la probabilité uniforme quand on est en situation d'équiprobabilité
- ▷ C5 : Utiliser la commande `shuffle` qui permet de mélanger une liste (modifie la liste de départ) et la commande `sample` qui permet d'extraire une sous-liste d'une liste (présentes dans la bibliothèque `random`)

2 Correction des exercices

Exercice 1 (C1-C2-C5)

1. On prélève successivement et avec remise trois jetons dans une urne contenant neuf jetons numérotés de 1 à 9. Combien y a-t-il de tirages :

(a) possibles ?

On peut assimiler un tirage à une 3-liste de l'ensemble des 9 jetons. Le nombre de tirages possibles est donc $9^3 = 729$.

(b) comportant trois numéros impairs ?

Un tirage est une 3-liste de l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Le nombre de tirages possibles est donc $5^3 = 125$.

(c) comportant exactement une fois le numéro 1 ?

Pour obtenir un tel tirage, on doit :

- choisir le jeton numéroté 1 : 1 choix
- placer le jeton numéroté 1 : 3 choix
- choisir 2 autres jetons et les placer, ce qui revient à choisir une 2-liste de l'ensemble $\llbracket 2, 9 \rrbracket$: $8^2 = 64$ choix.

Au total, on a donc $3 \times 64 = 192$ tirages possibles.

(d) comportant au moins un numéro impair ?

Notons A l'ensemble de ces tirages. Alors $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages ne comportant que des numéros pairs. Autrement dit, $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}^3$. Le nombre de tirages comportant au moins un numéro impair est alors :

$$\text{card}(A) = 729 - \text{card}(\overline{A}) = 729 - 4^3 = 665$$

2. Simulation informatique de l'expérience de la question 1.

(a) Modéliser un tirage de trois jetons dans l'urne à l'aide d'une fonction `Tirage`. On pourra modéliser un tirage par une liste.

On utilise la commande `randint`.

```
1 from random import *
2 def Tirage() :
3     j1 = randint(1,9)
4     j2 = randint(1,9)
5     j3 = randint(1,9)
6     L=[j1,j2,j3]
7     return L
```

- (b) Écrire une fonction **Pairs** qui renvoie **True** si les trois nombres obtenus sont pairs et **False** sinon.
On utilise la fonction **Tirage** précédente pour simuler le lancer.

```

1 def Pairs() :
2     L = jetons()
3     if (L[0]%2 == 0) and (L[1]%2 == 0) and (L[2]%2 == 0) :
4         return True
5     return False

```

- (c) Écrire une fonction **Un** qui dit à l'utilisateur si le tirage obtenu contient exactement une fois le numéro 1 ou non.
On utilise encore la fonction **Tirage**.

```

def Un() :
    compteur = 0
    L = Tirage()
    for k in range(3) :
        if L[k] == 1 :
            compteur += 1
    if compteur == 1 :
        return True
    return False

```

- (d) Écrire une fonction **Impairs** qui teste si le tirage obtenu contient au moins une fois un numéro impair.
La commande `n%2==1` permet de tester si un entier est impair.

```

1 def Impairs() :
2     L = Tirage()
3     for k in range(3) :
4         if L[k]%2 == 1 :
5             return True
6     return False

```

3. Un sac contient dix boules numérotées de 1 à 10 réparties en six boules jaunes et quatre boules vertes.
On prélève simultanément trois boules dans cette urne. Combien y a-t-il de résultats :

- (a) possibles ?
Toutes les boules sont distinctes et le tirage est simultané. Un tirage peut donc être assimilé à une 3-combinaison de l'ensemble des 10 boules. Donc le nombre de tirages possibles est $\binom{10}{3} = 120$.
- (b) comportant trois boules jaunes ?
Un tirage est une 3-combinaison de l'ensemble des 6 boules jaunes. Le nombre de tirages possibles est donc $\binom{6}{3} = 20$.
- (c) comportant au moins une boule jaune ?
Notons A l'ensemble de ces tirages. Alors $\bar{A}$ est l'ensemble des tirages de 3 boules vertes simultanément (un élément de $\bar{A}$ est donc une 3-combinaison de l'ensemble des 4 boules vertes). Ainsi :

$$\text{card}(A) = 120 - \text{card}(\bar{A}) = \text{nombre de tirages au total} - \binom{4}{3} = 120 - 4 = 116$$

- (d) comportant exactement une boule jaune et deux boules vertes ?
Pour obtenir un tel tirage, on doit (*rappelons qu'il n'y a pas d'ordre pour un tirage simultané*) :
- choisir la boule jaune parmi les six disponibles : 6 choix ;
 - choisir 2 boules vertes, ce qui revient à choisir une 2-combinaison de l'ensemble des quatre boules vertes : $\binom{4}{2} = 6$ choix.

Le nombre de tirages possibles est donc ici $6^2 = 36$.

4. Une urne contient trois boules noires numérotées de 1 à 3, six boules rouges numérotées de 4 à 9 et deux boules blanches numérotées 10 et 11. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne. Combien y a-t-il de tirages :

(a) possibles ?

On prélève les boules successivement et sans remise donc un tirage peut-être assimilé à une 3-liste sans répétition de l'ensemble des 11 boules. Le nombre de tirages possibles est donc $\frac{11!}{(11-3)!} = \frac{11!}{8!} = 990$.

(b) comportant trois boules rouges ?

Un tirage est une 3-liste sans répétition de l'ensemble des six boules rouges. Le nombre de tirages possibles est donc $\frac{6!}{(6-3)!} = 120$.

(c) comportant au moins une boule blanche ?

Soit A l'ensemble de ces tirages. Alors $\overline{A}$ est l'ensemble des 3-listes sans répétition de l'ensemble des boules noires et rouges (il y en a 9) donc $\text{card}(\overline{A}) = \frac{9!}{6!} = 504$. Donc :

$$\text{card}(A) = \frac{11!}{8!} - \text{card}(\overline{A}) = \frac{11!}{8!} - \frac{9!}{6!} = 990 - 504 = 486$$

(d) comportant trois boules de trois couleurs différentes ?

Pour obtenir un tel tirage, on doit :

- choisir une boule noire : 3 choix ;
- choisir une boule rouge : 6 choix ;
- choisir une boule blanche : 2 choix ;
- choisir l'ordre dans lequel on place les trois couleurs, ce qui revient à choisir une permutation de l'ensemble des trois couleurs : $3! = 6$ choix.

Le nombre de tirages possibles est donc $3 \times 6 \times 2 \times 6 = 216$.

(e) La commande `sample(L,n)` permet de choisir simultanément n éléments de la liste L (le résultat est une liste).

Écrire une fonction `python` qui génère un tirage de trois boules et qui renvoie `True` si le tirage contient une boule blanche au moins et `False` sinon.

On assimile une boule au numéro qu'elle porte (les boules blanches correspondent donc aux entiers 10 et 11). On utilise `sample` pour choisir trois nombres aléatoirement entre 1 et 11.

```

1 def lancer() :
2     L = [k for k in range(1,12)]
3     B = sample(L,3) # B est une liste
4     if B[0] > 9 or B[1] > 9 or B[2] > 9 :
5         return True
6     return False

```

5. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On tire deux boules successivement, sans remise, d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Combien y a-t-il de tirages tels que les numéros soient tirés dans l'ordre croissant ?

— *Méthode 1* : Obtenir deux boules dont les numéros sont rangés dans l'ordre croissant revient à choisir une 2-combinaison de l'ensemble des n boules de l'urne. Le nombre de tirages possibles est donc $\binom{n}{2}$.

— *Méthode 2* : Le nombre de tirages de deux boules dans l'urne, successivement et sans remise, correspond au nombre de 2-listes sans répétitions de l'ensemble des boules ; il y en a donc $\frac{n!}{(n-2)!}$.

Ces tirages sont formés des couples $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$. Pour deux entiers i et j donnés tels que $i \neq j$ (disons $i < j$ pour fixer les idées), on a compté le couple (i,j) et le couple (j,i) dans le dénombrement précédent. Or pour le couple (j,i) , les nombres ne sont pas rangés dans l'ordre croissant. On a donc deux fois trop d'éléments. Ainsi, le cardinal cherché est :

$$\frac{\frac{n!}{(n-2)!}}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2} = \binom{n}{2}$$

— *Méthode 3* : Compter le nombre de couples $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tels que $i < j$ revient à calculer :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 &= \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} 1 = \sum_{j=2}^n (j-1) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell \quad (\text{changement d'indice } \ell = j-1) \\ &= \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \binom{n}{2} \end{aligned}$$

Exercice 2 (C1-C2-C5)  Dans chaque cas, expliquer comment on peut formaliser un résultat de l'expérience de manière à ce que les issues des différentes expériences soient équiprobables et déterminer le nombre de résultats différents possibles.

- On pioche 8 cartes dans un jeu de 32 cartes.
Un tirage peut être assimilé à une 8-combinaison de l'ensemble des 32 cartes. Le nombre de tirages possibles est donc $\binom{32}{8}$.
- Lors d'une course à pied comprenant 380 participants numérotés de 1 à 380, on s'intéresse aux numéros des trois plus rapides rangés dans l'ordre d'arrivée.
Un podium est une 3-liste sans répétition de l'ensemble des 380 coureurs. Le nombre de podiums possibles est donc $\frac{380!}{377!}$.
- On tire successivement avec remise 4 boules dans une urne qui contient 8 boules bleues et 5 boules rouges. Pour avoir équiprobabilité, il est nécessaire de supposer que les boules sont deux à deux distinctes (on numérote au besoin les boules). Un tirage est alors une 4-liste de l'ensemble des 13 boules de l'urne. Le nombre de tirages possibles est alors 13^4 .
- On tire simultanément 3 boules dans une urne qui contient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ boules blanches et n boules vertes.
De même, on peut supposer que les boules sont deux à deux distinctes. Un tirage peut être assimilé à une 3-combinaison de l'ensemble des $2n$ boules. Le nombre de tirages possibles est donc $\binom{2n}{3}$.
- On lance trois dés simultanément.
Pour avoir équiprobabilité, il faut différencier les dés (ou bien en les lançant les uns après les autres, ou bien en considérant qu'ils sont de couleurs différentes par exemple). Un lancer des trois dés peut donc être assimilé à une 3-liste de l'ensemble $\llbracket 1, 6 \rrbracket$. Le nombre de tirages possibles est donc $6^3 = 216$.
- On choisit trois élèves dans la classe pour former un groupe de colle.
Un tirage peut être assimilé à une 3-combinaison de l'ensemble des élèves de la classe. En notant n le nombre d'élèves dans la classe, le nombre de groupes possibles est $\binom{n}{3}$.
- On répartit n boules numérotées de 1 à n dans quatre urnes U_1, U_2, U_3 et U_4 .
À chacune des n boules, on associe une urne parmi $\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$. On peut donc assimiler une disposition à une n -liste de l'ensemble $\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$. Par exemple, la n -liste :

$$(U_1, U_3, U_4, \dots, U_1)$$

signifie que :

- la boule numéro 1 a été placée dans l'urne U_1 ;
- la boule numéro 2 a été placée dans l'urne U_3 ;
- la boule numéro 3 a été placée dans l'urne U_4 ;
- *etc* ;
- la boule numéro n a été placée dans l'urne U_1 .

Le nombre de dispositions possibles est donc 4^n .

- On donne aux n enfants d'un centre aéré un numéro de 1 à n au hasard (chaque enfant a un numéro différent).
Une répartition des numéros peut être assimilée à une permutation de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ (ou de l'ensemble des enfants). Le nombre de répartitions possibles est donc $n!$.

9. On forme une anagramme du mot PREPA.

Si toutes les lettres du mot PREPA étaient différentes (ce qui n'est pas le cas), alors un anagramme de ce mot pourrait être assimilé à une permutation des lettres du mot. Il y aurait donc $5! = 120$ anagrammes différents. Or on a compté plusieurs fois les mêmes anagrammes, autant de fois qu'il y a de permutations possibles des deux lettres P. Finalement, le nombre d'anagrammes possibles du mot PREPA est $\frac{120}{2!} = 60$.

10. On forme un nombre à 6 chiffres (le premier chiffre étant donc non nul).

Le premier chiffre du nombre appartient à $\llbracket 1, 9 \rrbracket$. Donc l'ensemble des nombres possibles peut-être assimilé à l'ensemble $\llbracket 1, 9 \rrbracket \times \llbracket 0, 9 \rrbracket^5$ (par exemple, le nombre 212401 correspond à la liste $(2, 1, 2, 4, 0, 1)$). Il y en a 9×10^5 .

11. (a) Soit $(r, s, t) \in (\mathbb{N}^*)^3$. On forme un nombre contenant r chiffres 1, s chiffre 2 et t chiffres 3.

Si les $r + s + t$ chiffres étaient différents, le nombre de nombres que l'on pourrait former correspondrait au nombre de permutations de ces $r + s + t$ chiffres, à savoir $(r + s + t)!$. Or on a compté plusieurs fois les mêmes nombres :

- autant de fois qu'il y a de permutations des r chiffres 1 : on a donc compté $r!$ fois trop de nombres ;
- autant de fois qu'il y a de permutations des s chiffres 2 : on a donc compté $s!$ fois trop de nombres ;
- autant de fois qu'il y a de permutations des t chiffres 3 : on a donc compté $t!$ fois trop de nombres.

Au finalement, on a compté $r!s!t!$ fois trop de nombres. Le cardinal cherché est donc $\frac{(r + s + t)!}{r!s!t!}$.

- (b) Écrire une fonction `nombre` prenant en entrée trois nombres r , s et t et renvoyant un nombre de la forme précédente.

Un nombre est assimilé à une liste. On utilise la commande `sample` pour choisir les positions des 1, des 2 et des 3. Ensuite, la fonction `remove` permet de supprimer les positions déjà occupées. On commence par construire un nombre (c'est-à-dire une liste) constituée de $r + s + t$ chiffres zéros.

```

1 def nombre(r,s,t) :
2     L = [0 for k in range (r+s+t)]
3     indices = [k for k in range(r+s+t)]
4     U = sample(indices,r)
5     for k in U :
6         L[k] = 1
7         indices.remove(k)
8     V = sample(indices,s)
9     for k in V :
10        L[k] = 2
11        indices.remove(k)
12    for k in indices :
13        L[k] = 3
14    return L

```

Exercice 3 (C1-C2-C4)  On appelle *main* tout ensemble de 8 cartes prises dans un jeu de 32 cartes.

1. Comment peut-on modéliser une main ? Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Une main est ici assimilée à une 8-combinaison de l'ensemble des 32 cartes. Il y a donc $\binom{32}{8}$ tirages possibles.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une main ne comportant que des figures ?

L'univers Ω est l'ensemble des 8-combinaisons de l'ensemble des 32 cartes. Comme toutes les cartes sont distinctes, on est en situation d'équiprobabilité, ce qui signifie que P est la probabilité uniforme. Par conséquent :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(A)}{\binom{32}{8}}$$

Le nombre de figures (valet, dame, roi) est $4 \times 3 = 12$. Une main ne comportant que des figures est une 8 combinaison de l'ensemble des 12 figures. Si on note A l'événement : « on obtient une main ne contenant que des figures », on a alors $\text{card}(A) = \binom{12}{8}$. Ainsi :

$$P(A) = \frac{\binom{12}{8}}{\binom{32}{8}}$$

3. Quelle est la probabilité d'obtenir une main comportant le roi de pique ?

Notons B l'événement : « la main comporte le roi de pique ». Pour obtenir une telle main, on doit :

★ choisir le roi de pique : 1 choix ;

★ choisir une main de 7 cartes parmi les cartes restantes : $\binom{31}{7}$ choix.

On a alors $\text{card}(B) = \binom{31}{7}$ puis :

$$P(B) = \frac{\binom{31}{7}}{\binom{32}{8}}$$

4. Quelle est la probabilité d'obtenir une main comportant au moins un roi ?

Notons C l'événement : « la main contient au moins un roi ». Alors $\overline{C}$ est l'événement : « la main ne contient aucun roi ». Ainsi, $\overline{C}$ est l'ensemble des 8-combinaisons de l'ensemble de toutes les cartes du jeu auxquelles on a enlevé les rois. Donc $\text{card}(\overline{C}) = \binom{28}{8}$. On en déduit donc que :

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{\binom{28}{8}}{\binom{32}{8}}$$

5. Quelle est la probabilité d'obtenir une main comportant au plus un pique ?

Notons D l'événement : « la main contient au plus un pique » et encore :

★ D_0 l'événement : « la main ne contient pas de pique » ;

★ D_1 l'événement : « la main contient un pique exactement ».

Alors on a l'égalité $D = D_0 \cup D_1$ et comme les événements D_0 et D_1 sont incompatibles, on a :

$$P(D) = P(D_0) + P(D_1)$$

Or D_0 est l'ensemble des 8-combinaisons de l'ensemble des trèfles, carreaux et cœurs (24 cartes) donc $\text{card}(D_0) = \binom{24}{8}$ et $P(D_0) = \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$.

Intéressons-nous maintenant à D_1 . Pour obtenir un élément de D_1 , on doit :

★ choisir un pique : 8 choix ;

★ choisir 7 autres cartes (sans pique), ce qui revient à choisir une 7 combinaison de l'ensemble des trèfles, carreaux et cœurs : $\binom{24}{7}$ choix.

Donc $\text{card}(D_1) = 8 \times \binom{24}{7}$ et $P(D_1) = \frac{8 \binom{24}{7}}{\binom{32}{8}}$. Finalement :

$$P(D) = \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}} + \frac{8 \binom{24}{7}}{\binom{32}{8}}$$

6. Quelle est la probabilité d'obtenir une main contenant un as et un seul et deux piques exactement ?
Notons E l'événement : « la main comporte un as et deux piques exactement ». Alors ou bien la main contient l'as de pique (événement noté E_1), ou bien elle ne la contient pas (événement noté E_2). On a l'égalité $E = E_1 \cup E_2$ et les événements E_1 et E_2 sont incompatibles donc $P(E) = P(E_1) + P(E_2)$. Dénombrons maintenant les ensembles E_1 et E_2 .

Pour obtenir un élément de E_1 , on doit :

- ★ choisir l'as de pique : 1 choix ;
- ★ choisir un autre pique : 7 choix ;
- ★ choisir encore 6 cartes parmi les carreaux, cœurs et trèfles sans les as : $\binom{21}{6}$ choix possibles.

Donc $\text{card}(E_1) = 1 \times 7 \times \binom{21}{6}$.

Pour obtenir un élément de E_2 , on doit :

- ★ choisir un as autre que l'as de pique : 3 choix ;
- ★ choisir deux piques mais pas l'as de pique : $\binom{7}{2}$ choix ;
- ★ choisir 5 autres cartes parmi les carreaux, cœurs et trèfles sans les as : $\binom{21}{5}$ choix possibles.

Donc $\text{card}(E_2) = 3 \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{5}$. Finalement :

la probabilité cherchée est donc $P(E) = \frac{1 \times 7 \times \binom{21}{6} + 3 \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{5}}{\binom{32}{8}}$

7. Quelle est la probabilité d'obtenir une main comportant au moins un roi et exactement une dame ?

On considère les événements :

- ★ F : « la main comporte au moins un roi et exactement une dame » ;
- ★ G : « la main comporte au moins un roi » ;
- ★ H : « la main comporte une dame exactement ».

On a alors $F = G \cap H$. Comme $\{G, \overline{G}\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(H) = P(G \cap H) + P(\overline{G} \cap H) \quad \text{c'est-à-dire} \quad P(F) = P(H) - P(\overline{G} \cap H)$$

Pour obtenir un élément de H , on doit :

- ★ choisir une dame : 4 choix ;
- ★ choisir sept autres cartes, ce qui revient à choisir une 7-combinaison de l'ensemble de toutes les cartes sans les dames : $\binom{28}{7}$ choix.

On a alors $\text{card}(H) = 4 \times \binom{28}{7}$.

Pour obtenir un élément de $\overline{G} \cap H$, on doit :

- ★ choisir une dame : 4 choix ;
- ★ choisir sept autres cartes (mais pas de dame ni de roi) : $\binom{24}{7}$ choix possibles.

Ainsi, $\text{card}(H) = 4 \times \binom{24}{7}$. Finalement :

la probabilité cherchée est $P(F) = \frac{4 \binom{28}{7} - 4 \binom{24}{7}}{\binom{32}{8}}$

Exercice 4 (C1-C2-C4)  On lance deux fois un dé à six faces.

1. (a) Comment formaliser un résultat ? Combien y a-t-il de résultats différents ?
On peut assimiler un lancer des deux dés à une 2-liste de l'ensemble $\llbracket 1, 6 \rrbracket$. Le nombre de tirages possibles est $\text{card}(\llbracket 1, 6 \rrbracket^2) = 36$.
- (b) Proposer un programme informatique simulant le lancer de deux dés.
On utilise `randint(1,6)` pour simuler un lancer de dé.

```
from random import randint
def lancer() :
    de1 = randint(1,6)
    de2 = randint(1,6)
    return de1, de2
```

2. Combien y a-t-il de résultats tels que la somme des numéros des deux dés fasse 8 ?
L'ensemble des résultats dont la somme des deux dés fasse 8 est :

$$\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$$

Donc le nombre de lancers dont la somme est égale à 8 est 5.

3. Combien y a-t-il de résultats tels que le plus grand des numéros des deux dés soit inférieur ou égal à 3 ?
Pour obtenir un tel lancer, il faut et il suffit que les deux numéros soient inférieurs ou égaux à 3. L'ensemble des lancers associés est donc $\llbracket 1, 3 \rrbracket^2$. On en dénombre $3^2 = 9$.
4. Combien y a-t-il de résultats tels que le produit des numéros des deux dés soit un multiple de 6 ?
L'ensemble des tirages pour lesquels le produit des deux numéros soit un multiple de 6 est :

$$\{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$$

Il y en a donc 15.

Exercice 5 (C1-C2-C4)  On lance deux dés à 6 faces équilibrés.

1. Proposer une description de l'univers.
Pour être en situation d'équiprobabilité, on assimile un lancer à une 2-liste d'éléments de l'ensemble $\llbracket 1, 6 \rrbracket$. L'univers Ω est donc $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité p_k que la somme des nombres obtenus aux deux lancers soit égale à k .
Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $k \in \{0, 1\}$ ou si $k \geq 13$, alors $p_k = 0$. Supposons que $k \in \llbracket 2, 12 \rrbracket$. On note A_k l'événement : « la somme des deux dés obtenus est égale à k ». On est en situation d'équiprobabilité (donc P est la probabilité uniforme). On a donc :

$$p_k = P(A_k) = \frac{\text{card}(A_k)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(A_k)}{36}$$

On distingue ensuite tous les cas (il y en a 11). De façon plus rapide :

- si $k \in \llbracket 2, 7 \rrbracket$, alors :

$$A_k = \{(j, k-j) \mid 1 \leq j \leq k-1\}$$

ce qui donne $P(A_k) = \frac{k-1}{36}$.

- si $k \in \llbracket 8, 12 \rrbracket$, alors :

$$A_k = \{(j, k-j) \mid k-6 \leq j \leq 6\}$$

ce qui donne $P(A_k) = \frac{(6 - (k-6) + 1)}{36} = \frac{13-k}{36}$.

3. Déterminer la probabilité que l'on obtienne un numéro multiple de l'autre.

L'événement A : « on obtient un numéro multiple de l'autre » peut s'écrire $A = \bigcup_{k=1}^6 A_k$ où :

$$A_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (6, 1), (5, 1), (4, 1), (3, 1), (2, 1)\}$$

$A_2 = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (6, 2), (4, 2)\}$, $A_3 = \{(3, 3), (3, 6), (6, 3)\}$, $A_4 = \{(4, 4)\}$, $A_5 = \{(5, 1)\}$ et $A_6 = \{(6, 6)\}$. Ces événements sont deux à deux incompatibles donc :

$$P(A) = \sum_{k=1}^6 P(A_k) = \frac{11 + 5 + 3 + 1 + 1 + 2}{36} = \frac{23}{36}$$

Exercice 6 (C1-C2-C5)  Le mode de passe d'un digicode contient cinq caractères : une lettre (A ou B) et quatre chiffres (compris entre 0 et 9). La lettre est placée aléatoirement dans le mot de passe. Par exemple, 122A9 et B1234 sont des mots de passe possibles.

1. Combien de mots de passe sont possibles ?

On peut assimiler un mot de passe à une liste où chaque entrée est une lettre ou un chiffre. Par exemple, le code 122A9 est assimilé à $(1, 2, 2, A, 9)$.

Pour obtenir un mot de passe, on doit :

- choisir la lettre du mot de passe parmi A et B : 2 choix ;
- choisir l'emplacement de la lettre dans le mot de passe et la placer : 5 choix ;
- choisir les quatre chiffres et les placer dans les positions vacantes, ce qui revient à choisir une 4-liste de l'ensemble $\llbracket 0, 9 \rrbracket$: 10^4 choix.

Donc le nombre de codes possibles est $2 \times 5 \times 10000 = 100000$.

2. Combien peut-on former de mots de passe contenant la lettre A et deux fois le chiffre 4 exactement ?

Pour obtenir un mot de passe contenant la lettre A et deux fois le chiffre 4 exactement, on doit :

- choisir la lettre A : 1 choix ;
- choisir l'emplacement de cette lettre dans le mot de passe : 5 choix ;
- placer les deux chiffres 4 dans le code, ce qui revient à choisir une 2-combinaison de l'ensemble des 4 places disponibles dans le code : $\binom{4}{2}$ choix ;
- choisir deux chiffres (pas le 4) et les placer, ce qui revient à choisir une 2-liste de l'ensemble $\llbracket 0, 3 \rrbracket \cup \llbracket 5, 9 \rrbracket$: 9^2 choix.

Donc le nombre de codes possibles est $5 \times 6 \times 81 = 2430$.

3. Combien de mots de passe contenant des chiffres impairs tous différents sont possibles ?

Pour obtenir un tel tirage, on doit :

- choisir la lettre du mot de passe parmi A et B : 2 choix ;
- choisir l'emplacement de la lettre dans le mot de passe et la placer : 5 choix ;
- on choisit 4 chiffres impairs deux à deux distincts et on les place, ce qui revient à choisir une 4-liste sans répétition de l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, 9\}$: $\frac{5!}{(5-4)!} = 120$ choix.

Donc le nombre de codes possibles est $2 \times 5 \times 120 = 1200$.

4. Simulation informatique.

On pourra utiliser la commande `choice(L)` qui permet de choisir un élément aléatoirement dans la liste `L`.

- (a) Écrire une fonction `code` qui génère un mot de passe suivant la règle précédente. Un mot de passe pourra être modélisé par une liste. Par exemple, la liste `[1,2,2,'A',9]` modélise le code 122A9. La fonction `choice` permet de choisir un élément au hasard dans une liste.

```

1 from random import *
2 def code() :
3     L = ['A','B']
4     mdp = [0,0,0,0,0] #code initial
5     lettre = choice(L)
6     position = randint(0,4)
7     mdp[position] = lettre
8     for k in range(5) :
9         if k != position :
10             x = randint(0,9)
11             mdp[k] = x
12     return code

```

- (b) Écrire un script qui génère un mot de passe puis qui demande à l'utilisateur de le trouver. On utilise l'instruction `input` pour demander un mot de passe à l'utilisateur.

```

1 mdp = code()
2 essai = input("Donner un mot de passe sous la forme d'une liste")
3 if (essai == mdp) :
4     print("Vous avez gagné")
5 else :
6     essai = input("Donner un mot de passe sous la forme d'une liste")

```

- (c) Reprendre le script précédent en autorisant 8 essais au maximum à l'utilisateur. On incrémente ici un compteur.

```

1 mdp = code()
2 essai = [0,0,0,0,0]
3 compteur = 0
4 while (compteur <= 8 and essai != mdp) :
5     essai = input("Donner un mot de passe sous la forme d'une liste")
6     compteur +=1
7     if (essai == mdp) :
8         print("Vous avez gagné")
9         break
10 if (essai != mdp) :
11     print("Vous avez perdu")

```

- (d) Reprogrammer la fonction `choice`. Il suffit de choisir une position aléatoire dans la liste.

```

1 def choisir(L) :
2     n = len(L)
3     i = randint(0,n-1)
4     return L[i]

```

Exercice 7 (C1-C2-C4)  Trois personnes sont invitées à une soirée, chacune de ces personnes arrive avec un chapeau. Ceux-ci sont redistribués de façon aléatoire à la fin de la soirée et chacun des invités repart avec un chapeau.

1. Combien y a-t-il de redistributions possibles à la fin de la soirée ?
On peut assimiler une répartition des chapeaux à une permutation de l'ensemble des trois chapeaux. Donc :

le nombre de répartitions possibles est $3! = 6$

2. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Montrer que pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{P}(\Omega)^3$, on a la formule :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

On sait que :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, \quad P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$$

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(\Omega)^3$. En utilisant l'associativité de la réunion et la formule précédente, on a :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) \\ &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \end{aligned}$$

Par distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, on a :

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$$

3. Quelle est la probabilité qu'aucune des trois personnes ne reparte avec son chapeau à la fin de la soirée ? Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on considère l'événement P_i : « la i^{e} personne ne repart pas avec son chapeau ». On cherche la probabilité de l'événement $P_1 \cap P_2 \cap P_3$. En utilisant la formule de de Morgan et la question 2., on a :

$$\begin{aligned} P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) &= 1 - P(\overline{P_1 \cap P_2 \cap P_3}) \\ &= 1 - P(\overline{P_1} \cup \overline{P_2} \cup \overline{P_3}) \\ &= 1 - P(\overline{P_1}) - P(\overline{P_2}) - P(\overline{P_3}) + P(\overline{P_1} \cap \overline{P_2}) + P(\overline{P_2} \cap \overline{P_3}) + P(\overline{P_1} \cap \overline{P_3}) - P(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}) \end{aligned}$$

Comme il y a trois chapeaux, on a $P(\overline{P_1}) = P(\overline{P_2}) = P(\overline{P_3}) = \frac{1}{3}$. De plus :

$$P(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}) = \frac{\text{card}(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

car on est en situation d'équiprobabilité (et donc P est la probabilité uniforme) et il n'y a qu'une seule possibilité pour que chaque personne reparte avec son chapeau.

Ensuite, dire que deux personnes (au moins) repartent avec leur chapeau signifie que les trois personnes ont récupéré leur chapeau. Par conséquent :

$$\overline{P_1} \cap \overline{P_2} = \overline{P_2} \cap \overline{P_3} = \overline{P_1} \cap \overline{P_3} = \overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}$$

et donc :

$$P(\overline{P_1} \cap \overline{P_2}) = P(\overline{P_2} \cap \overline{P_3}) = P(\overline{P_1} \cap \overline{P_3}) = \frac{1}{6}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{la probabilité cherchée vaut } P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) = \frac{1}{3}}$$

Exercice 8 (C1-C2-C4)  On considère 9 livres différents comportant 3 livres de biologie, 4 de chimie et 2 de maths.

1. De combien de façon peut-on ranger les 9 livres sur l'étagère ?

On peut assimiler une disposition sur l'étagère à une permutation de l'ensemble des livres (il y a un ordre dans le rangement des livres et tous les livres sont différents). Donc :

le nombre de dispositions différentes sur l'étagère est $9!$

2. Quelle est la probabilité que les livres soient regroupés par matière sur l'étagère ?

Les livres sont deux à deux distincts donc on est en situation d'équiprobabilité. Ainsi, P est la probabilité uniforme. L'univers est l'ensemble des permutations de l'ensemble des 9 livres et $\text{card}(\Omega) = 9!$.

Notons A l'événement : « les livres sont regroupés par matière ». Pour obtenir un élément de A , on doit :

- ★ choisir l'ordre des matières sur l'étagère, ce qui revient à choisir une permutation de l'ensemble des trois matières : $3! = 6$ choix possibles ;
- ★ choisir l'ordre dans lequel on classe les livres de biologie, ce qui revient à choisir une permutation de l'ensemble des trois livres de biologie : $3! = 6$ choix possibles ;
- ★ choisir l'ordre dans lequel on classe les quatre livres de chimie : $4! = 24$ choix possibles ;
- ★ et enfin choisir l'ordre des livres de maths : $2! = 2$ choix possibles (même raisonnement).

Donc $\text{card}(A) = 6 \times 6 \times 24 \times 2$ puis :

$$\text{la probabilité que les livres soient regroupés par matière : } P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6 \times 6 \times 24 \times 2}{9!}$$

3. On prend deux livres au hasard sur l'étagère. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux de la même matière ?

Notons T l'ensemble de ces tirages. Ou bien on a pris deux livres de biologie, ou bien on a pris deux livres de chimie, ou bien on a pris les deux livres de maths. On a donc l'égalité $T = B \cup C \cup M$ où on a noté :

- ★ B l'ensemble des tirages de deux livres de biologie ;
- ★ C l'ensemble des tirages de deux livres de chimie ;
- ★ M l'ensemble des tirages des deux livres de maths.

Les événements B , C et M sont deux à deux incompatibles donc :

$$P(T) = P(B) + P(C) + P(M) = \frac{\text{card}(B) + \text{card}(C) + \text{card}(M)}{\text{card}(\Omega)}$$

Or B est l'ensemble des deux 2-combinaisons de l'ensemble des deux livres de biologie donc $\text{card}(B) = \binom{3}{2} = 3$. De la même manière, $\text{card}(C) = \binom{4}{2} = 6$ et $\text{card}(M) = \binom{2}{2} = 1$. L'univers est ici l'ensemble des 2-combinaisons de l'ensemble des 9 livres donc :

$$\text{la probabilité de choisir deux livres de la même matière est } P(T) = \frac{10}{\binom{9}{2}}$$

Exercice 9 (C1-C2-C4-C5)  On tire successivement toutes les boules (deux à deux distinctes) d'une urne qui en contient n (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$).

1. (a) Comment formaliser un tirage ? Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

Un tirage peut être assimilé à une permutation de l'ensemble des n boules de l'urne. Le nombre de tirages possibles est donc $n!$.

- (b) Proposer une fonction `python` qui prend en entrée un entier naturel n et qui modélise un tel tirage (qui pourra être assimilé à une liste). On pourra utiliser la commande `shuffle(L)` qui permet de mélanger une liste.

La commande `shuffle` permet de mélanger une liste. On assimile les boules aux entiers de 1 à n .

```

1 from random import *
2 def tirage(n) :
3     L = [k for k in range(1,n+1)]
4     L = shuffle(L) #ou L = sample(L,n)
5     return L

```

2. Dans cette urne, il y a 2 boules noires, les autres sont rouges.

(a) Combien y a-t-il de tirages tels que la boule tirée au premier tirage soit noire ?

Pour obtenir un tel tirage :

- on choisit l'une des deux boules noires que l'on place en première position : 2 choix ;
- il reste à prélever les autres boules de l'urne, ce qui revient à choisir une permutation des $n - 1$ boules restantes : $(n - 1)!$ choix.

Donc le nombre de tirages pour lesquels la première boule est noire est $2(n - 1)!$.

(b) On fixe $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Combien y a-t-il de tirages tels que la première boule noire soit tirée au tirage i ?

Soit $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Pour obtenir un tel tirage, on doit :

- choisir l'une des deux boules noires que l'on place en i^{e} position : 2 choix ;
- placer l'autre boule noire parmi les positions suivantes : $n - (i + 1) + 1 = n - i$ choix ;
- répartir les boules rouges dans les positions vacantes, ce qui revient à choisir une permutation de ces boules : $(n - 2)!$ choix.

Donc le nombre de tirages pour lesquels la première boule noire est en i^{e} position est $2(n - i)(n - 2)!$.

(c) Combien y a-t-il de tirages tels que les deux boules noires soient tirées aux deux premiers tirages ?

Pour obtenir un tel tirage, on doit :

- choisir l'ordre dans lequel on place les deux boules noires sur les deux premières positions : $2!$ choix ;
- choisir l'ordre dans lequel on place les $n - 2$ boules rouges sur les positions suivantes : $(n - 2)!$ choix.

Donc le nombre de tirages est ici $2(n - 2)!$.

(d) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i < j$. Combien y a-t-il de tirages tels que les deux boules noires soient tirées aux tirages i et j ?

Pour obtenir un tel tirage, on doit :

- choisir la boule noire que l'on place en position i : 2 choix ;
- placer l'autre boule noire en position j : 1 choix ;
- répartir les boules rouges sur les positions restantes : $(n - 2)!$ choix.

Donc le nombre de tirages est encore $2(n - 2)!$.

(e) On fixe $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Combien y a-t-il de tirages tels que la deuxième boule noire soit tirée au tirage i ?

Soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Pour obtenir un tel tirage, on doit :

- choisir la boule noire que l'on place en position i : 2 choix ;
- choisir la position de l'autre boule noire parmi les $i - 1$ premières positions : $i - 1$ choix ;
- répartir les boules rouges : $(n - 2)!$ choix.

Il y a donc $2(i - 1)(n - 2)!$ choix possibles.

(f) Écrire un programme **python** qui prend un entier i supérieur ou égal à 2 et qui vérifie si la deuxième boule noire est obtenue au i^{e} tirage. On pourra utiliser la fonction de la question 1.(b).

On peut assimiler les boules noires aux numéros 1 et 2. On vérifie s'il y a une boule noire parmi les $i - 1$ premiers tirages à l'aide d'un compteur s . La deuxième boule noire sera en i^{e} position si et seulement si $s=1$ et la i^{e} boule est noire (numéro 1 ou 2).

```
1 def position(n,i) :
2     L = tirage(n)
3     s = 0
4     for k in range(i-1) :
5         if L[k] == 1 or L[k] == 2 :
6             s = s+1
7     if s == 1 and 1 <= L[i] <= 2) :
8         return True
9     return False
```

Exercice 10 (C1-C2)  Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue un tirage de p boules de l'urne simultanément.

1. Combien a-t-il de tirages au total ?

Un tirage est une p -combinaison de l'ensemble des n boules de l'urne. Le nombre de tirages possibles est donc $\binom{n}{p}$.

2. Soit $k \in \llbracket p, n \rrbracket$. Déterminer le nombre de tirages tels que :

- (a) toutes les boules obtenues ont un numéro inférieur ou égal à k .

Dire que les deux numéros ont un numéro inférieur ou égal à k signifie que les deux boules ont été tirées parmi les boules numérotées de 1 à k . Il s'agit donc de dénombrer le nombre de p -combinaisons de l'ensemble $\llbracket 1, k \rrbracket$. Il y en a $\binom{k}{p}$.

- (b) le plus grand numéro tiré est k .

On note :

- A_k l'ensemble des tirages de p boules simultanément dont le plus grand numéro vaut k ;
- B_k (respectivement B_{k-1}) l'ensemble des tirages de p boules simultanément dont tous les numéros sont inférieurs ou égaux à k (respectivement $k-1$).

Si $k = p$, alors il n'y a qu'un seul tirage possible (on prend toutes les boules numérotées de 1 à p et le maximum des numéros vaut p) donc $\text{card}(A_p) = 1$.

Soit $k \in \llbracket p+1, n \rrbracket$. Dire que le plus grand numéro est inférieur ou égal à k signifie que ou bien le plus grand numéro vaut k , ou bien que celui-ci est inférieur ou égal à $k-1$. On a donc l'égalité :

$$B_k = A_k \cup B_{k-1}$$

Les ensembles A_k et B_{k-1} sont disjoints donc $\text{card}(B_k) = \text{card}(A_k) + \text{card}(B_{k-1})$ et donc $\text{card}(A_k) = \text{card}(B_k) - \text{card}(B_{k-1})$. Or les ensembles B_k et B_{k-1} ont été dénombrés à la question 2.(b). On a donc :

$$\text{card}(A_k) = \binom{k}{p} - \binom{k-1}{p} = \binom{k-1}{p-1}$$

d'après la formule du triangle de Pascal. Remarquons que cette formule reste valable si $k = p$. Finalement :

le nombre de tirages dont le plus grand numéro est k est $\text{card}(A_k) = \binom{k-1}{p-1}$

- (c) En déduire que $\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$ (formule du triangle de Pascal généralisée).

Notons T l'ensemble des tirages de p boules simultanément de l'urne. Le plus grand numéro obtenu vaut soit p , soit $p+1, \dots$, soit n . On a donc l'égalité :

$$T = A_p \cup A_{p+1} \cup \dots \cup A_n$$

et les ensembles A_p, A_{p+1}, A_n sont deux à deux disjoints donc :

$$\text{card}(T) = \sum_{k=p}^n \text{card}(A_k)$$

En utilisant les questions 1. et 2.(b), on obtient bien la formule du triangle de Pascal généralisée :

$$\binom{n}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1}$$

Exercice 11 (C1-C2)  On considère un ensemble de jetons formé de a jetons jaunes et b jetons verts. On en pioche n simultanément.

1. Comment formaliser un tirage ? Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
On peut assimiler un tirage à une n -combinaison de l'ensemble des $a + b$ jetons. Le nombre de tirages possibles est donc $\binom{a+b}{n}$.

2. Combien de tirages différents peut-on obtenir si on veut prendre exactement k jetons jaunes ?
Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour obtenir un tirage contenant exactement k jetons jaunes, on doit :

- choisir k jetons jaunes parmi les a disponibles : $\binom{a}{k}$ choix possibles ;
- compléter le tirage avec $n - k$ jetons verts : $\binom{b}{n-k}$.

Remarquons que si $k > a$ (on veut plus de jetons jaunes qu'il n'y en a) ou si $n - k > b$ (il n'y a pas assez de jetons verts pour compléter), alors un tel tirage n'est pas possible. Cela est compatible avec les coefficients obtenus car, par convention, $\binom{p}{q} = 0$ si $q > p$. Finalement :

le nombre de tirages contenant exactement k jetons jaunes est $\binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$

3. En déduire la *formule de Vandermonde* :

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$$

Notons T l'ensemble des tirages simultanés de n jetons dans l'urne. Alors $T = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_n$ où pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'ensemble T_k est celui des tirages de n jetons simultanément dont k sont jaunes exactement. Les ensembles $T_0, T_1, \dots, T_n$ sont deux à deux disjoints donc :

$$\text{card}(T) = \sum_{k=0}^n \text{card}(T_k)$$

donc, en appliquant les question 1. et 2., il vient la formule de Vandermonde :

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$$

Exercice 12 (C1-C2-C3)  On considère un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à dénombrer l'ensemble des couples (A, B) de sous-ensembles de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$.

1. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Combien y a-t-il de parties à k éléments de E ?
Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Une partie à k éléments de E est un sous-ensemble de E à k éléments. Il s'agit donc d'une k -combinaison d'éléments de E . Donc :

le nombre de parties à k éléments de E est $\binom{n}{k}$

2. Soit A un sous-ensemble fixé de E de cardinal $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Combien y a-t-il de parties B de E telles que $A \cap B = \emptyset$?

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\text{card}(A) = k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Soit $B \in \mathcal{P}(E)$. Montrons (en raisonnant par double implication) que :

$$A \cap B = \emptyset \iff B \in \mathcal{P}(\overline{A}) \quad \text{c'est-à-dire : } B \subset \overline{A} \quad (2.1)$$

Supposons que $A \cap B = \emptyset$. Soit $x \in B$. Montrons que $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$, c'est-à-dire $x \in \emptyset$, ce qui est absurde, donc $x \in \overline{A}$. D'où l'inclusion annoncée.

Réciproquement, supposons que $B \subset \overline{A}$. Montrons que $A \cap B = \emptyset$. Par hypothèse, on a :

$$A \cap B \subset A \cap \overline{A} \quad \text{c'est-à-dire} \quad A \cap B \subset \emptyset$$

c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$.

Ceci démontre l'équivalence (2.1). D'après celle-ci, on a :

$$\boxed{\text{card}(\{B \in \mathcal{P}(E) \mid A \cap B = \emptyset\}) = \text{card}(\mathcal{P}(\overline{A})) = 2^{\text{card}(\overline{A})} = 2^{n-k}}$$

car A est de cardinal k .

3. Conclure.

On note :

- ★ Γ l'ensemble des couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$;
- ★ Γ_k l'ensemble des couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$ et $\text{card}(A) = k$ (pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$).

On a alors l'égalité $\Gamma = \bigcup_{k=0}^n \Gamma_k$ et les ensembles $\Gamma_0, \dots, \Gamma_n$ sont deux à deux disjoints donc :

$$\text{card}(\Gamma) = \sum_{k=0}^n \text{card}(\Gamma_k)$$

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On rappelle que $\mathcal{P}_k(E)$ est l'ensemble des parties à k éléments de E (ou : k -combinaisons d'éléments de E). On a l'égalité :

$$\Gamma_k = \bigcup_{A \in \mathcal{P}_k(E)} \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \cap B = \emptyset\}$$

Si $(A, A') \in \mathcal{P}_k(E)$ est tel que $A \neq A'$, alors :

$$\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A' \cap B = \emptyset\} \cap \{(A', B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A' \cap B = \emptyset\} = \emptyset$$

puis les premières coordonnées des couples sont différentes. On a donc :

$$\begin{aligned} \text{card}(\Gamma_k) &= \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} \text{card}(\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \cap B = \emptyset\}) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} \text{card}(\{B \in \mathcal{P}(E) \mid A \cap B = \emptyset\}) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{P}_k(E)} 2^{n-k} \\ &= \text{card}(\mathcal{P}_k(E)) 2^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} 2^{n-k} \end{aligned}$$

en utilisant la question 2. En utilisant finalement la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\boxed{\text{card}(\Gamma) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n}$$