Lycée Louis Thuillier
BCPST2B

Année 2025-2026

Fiche de révision 6
Dénombrement

1 Compétences et notions à maîtriser

- ▷ C1 : Déterminer le cardinal d'un ensemble fini
- ▷ C2 : Maîtriser les notions de p-listes, de p-listes sans répétitions, de permutations et de p-combinaisons et cardinaux associés
- ▷ C3 : Utiliser l'ensemble $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ des parties d'un ensemble fini E et cardinal
- ▷ C4 : Utiliser la probabilité uniforme quand on est en situation d'équiprobabilité
- ▷ C5 : Utiliser la commande `shuffle` qui permet de mélanger une liste (modifie la liste de départ) et la commande `sample` qui permet d'extraire une sous-liste d'une liste (présentes dans la bibliothèque `random`)

2 Rappels de cours

2.1 Opérations sur les cardinaux

Théorème 2.1.1 Soient A et B des ensembles finis inclus dans un ensemble fini E. On a les formules suivantes :

1. $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$
2. $\mathrm{Card}\left(\bar{A}\right) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$
3. $\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B)$
4. $\mathrm{Card}\,(\mathcal{P}(A)) = 2^{\mathrm{Card}(A)}$

2.2 Dénombrement

On considère une urne contenant n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n.

On pioche une boule au hasard, on note son numéro, on la remet dans l'urne et on recommence l'opération p fois. Il s'agit de **p tirages successifs avec remise**, on obtient une **p-liste** d'éléments de $[\![1, n]\!]$.
Le **nombre de p-listes d'éléments de** $[\![1, n]\!]$ est

$$\boldsymbol{n^p}.$$

On pioche une boule au hasard, on note son numéro, on ne la remet pas dans l'urne et on recommence l'opération p fois. Il s'agit de **p tirages successifs sans remise**, on obtient un **p-arrangement** d'éléments de $[\![1, n]\!]$.
Le **nombre de p-arrangements d'éléments de** $[\![1, n]\!]$ **est** :

$$\boldsymbol{\frac{n!}{(n-p)!}}.$$

On pioche d'une seul coup p boules. Il s'agit d'un **tirage simultané**, on obtient une **p-combinaison** d'éléments de $[|1, n|]$.
Si on note $\boldsymbol{\binom{n}{p}}$ le **nombre de combinaisons à p éléments de** $[|\boldsymbol{1, n}|]$, on a :

$$\boldsymbol{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

On réordonne les n-boules. On obtient une **permutation** des éléments de $[\![1, n]\!]$.
Le nombre de permutations des éléments de $[\![1, n]\!]$ est $\boldsymbol{n!}$.

	Avec ordre	Sans ordre
Avec remise	p-liste : n^p	
Sans remise	p-arrangement : $\frac{n!}{(n-p)!}$	p-combinaison : $\binom{n}{p}$

3 Exercices

Exercice 1 (C1-C2-C5) 1. On prélève successivement et avec remise trois jetons dans une urne contenant neuf jetons numérotés de 1 à 9. Combien y a-t-il de tirages :

(a) possibles ?

(b) comportant trois numéros impairs ?

(c) comportant exactement une fois le numéro 1 ?

(d) comportant au moins un numéro impair ?

2. Simulation informatique de l'expérience de la question 1.

(a) Modéliser un tirage de trois jetons dans l'urne à l'aide d'une fonction `Tirage`. On pourra modéliser un tirage par une liste.

(b) Écrire une fonction `Pairs` qui renvoie `True` si les trois nombres obtenus sont pairs et `False` sinon.

(c) Écrire une fonction `Un` qui dit à l'utilisateur si le tirage obtenu contient exactement une fois le numéro 1 ou non.

(d) Écrire une fonction `Impairs` qui teste si le tirage obtenu contient au moins une fois un numéro impair.

3. Un sac contient dix boules numérotées de 1 à 10 réparties en six boules jaunes et quatre boules vertes. On prélève simultanément trois boules dans cette urne. Combien y a-t-il de résultats :

(a) possibles ?

(b) comportant trois boules jaunes ?

(c) comportant au moins une boule jaune ?

(d) comportant exactement une boule jaune et deux boules vertes ?

4. Une urne contient trois boules noires numérotées de 1 à 3, six boules rouges numérotées de 4 à 9 et deux boules blanches numérotées 10 et 11. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne. Combien y a-t-il de tirages :

(a) possibles ?

(b) comportant trois boules rouges ?

(c) comportant au moins une boule blanche ?

(d) comportant trois boules de trois couleurs différentes ?

(e) La commande `sample(L,n)` permet de choisir simultanément `n` éléments de la liste `L` (le résultat est une liste).

Écrire une fonction `python` qui génère un tirage de trois boules et qui renvoie `True` si le tirage contient une boule blanche au moins et `False` sinon.

5. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On tire deux boules successivement, sans remise, d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Combien y a-t-il de tirages tels que les numéros soient tirés dans l'ordre croissant ?

Exercice 2 (C1-C2-C5) Dans chaque cas, expliquer comment on peut formaliser un résultat de l'expérience de manière à ce que les issues des différentes expériences soient équiprobables et déterminer le nombre de résultats différents possibles.

1. On pioche 8 cartes dans un jeu de 32 cartes.
2. Lors d'une course à pied comprenant 380 participants numérotés de 1 à 380, on s'intéresse aux numéros des trois plus rapides rangés dans l'ordre d'arrivée.
3. On tire successivement avec remise 4 boules dans une urne qui contient 8 boules bleues et 5 boules rouges.
4. On tire simultanément 3 boules dans une urne qui contient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ boules blanches et n boules vertes.
5. On lance trois dés simultanément.
6. On choisit trois élèves dans la classe pour former un groupe de colle.
7. On répartit n boules numérotées de 1 à n dans quatre urnes U_1, U_2, U_3 et U_4.
8. On donne aux n enfants d'un centre aéré un numéro de 1 à n au hasard (chaque enfant a un numéro différent).
9. On forme une anagramme du mot PREPA.
10. On forme un nombre à 6 chiffres (le premier chiffre étant donc non nul).
11. (a) Soit $(r, s, t) \in (\mathbb{N}^*)^3$. On forme un nombre contenant r chiffres 1, s chiffre 2 et t chiffres 3.
    (b) Écrire une fonction `nombre` prenant en entrée trois nombres r, s et t et renvoyant un nombre de la forme précédente.

Exercice 3 (C1-C2-C4) On appelle *main* tout ensemble de 8 cartes prises dans un jeu de 32 cartes.

1. Comment peut-on modéliser une main ? Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une main ne comportant que des figures ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une main comportant le roi de pique ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir une main comportant au moins un roi ?
5. Quelle est la probabilité d'obtenir une main comportant au plus un pique ?
6. Quelle est la probabilité d'obtenir une main contenant un as et un seul et deux piques exactement ?
7. Quelle est la probabilité d'obtenir une main comportant au moins un roi et exactement une dame ?

Exercice 4 (C1-C2-C4) On lance deux fois un dé à 6 faces.

1. (a) Comment formaliser un résultat ? Combien y a-t-il de résultats différents ?
   (b) Proposer un programme informatique simulant le lancer de deux dés.
2. Combien y a-t-il de résultats tels que la somme des numéros des deux dés fasse 8 ?
3. Combien y a-t-il de résultats tels que le plus grand des numéros des deux dés soit inférieur ou égal à 3 ?
4. Combien y a-t-il de résultats tels que le produit des numéros des deux dés soit un multiple de 6 ?

Exercice 5 (C1-C2-C4) On lance deux dés à 6 faces équilibrés.

1. Proposer une description de l'univers.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité p_k que la somme des nombres obtenus aux deux lancers soit égale à k.
3. Déterminer la probabilité que l'on obtienne un numéro multiple de l'autre.

Exercice 6 (C1-C2-C5) Le mode de passe d'un digicode contient cinq caractères : une lettre (A ou B) et quatre chiffres (compris entre 0 et 9). La lettre est placée aléatoirement dans le mot de passe. Par exemple, 122A9 et B1234 sont des mots de passe possibles.

1. Combien de mots de passe sont possibles ?
2. Combien peut-on former de mots de passe contenant la lettre A et deux fois le chiffre 4 exactement ?
3. Combien de mots de passe contenant des chiffres impairs tous différents sont possibles ?
4. Simulation informatique.
   On pourra utiliser la commande `choice(L)` qui permet de choisir un élément aléatoirement dans la liste `L`.
   (a) Écrire une fonction `code` qui génère un mot de passe suivant la règle précédente. Un mot de passe pourra être modélisé par une liste. Par exemple, la liste `[1,2,2,'A',9]` modélise le code 122A9.
   (b) Écrire un script qui génère un mot de passe puis qui demande à l'utilisateur de le trouver.
   (c) Reprendre le script précédent en autorisant 8 essais au maximum à l'utilisateur.
   (d) Reprogrammer la fonction `choice`.

Exercice 7 (C1-C2-C4) Trois personnes sont invitées à une soirée, chacune de ces personnes arrive avec un chapeau. Ceux-ci sont redistribués de façon aléatoire à la fin de la soirée et chacun des invités repart avec un chapeau.

1. Combien y a-t-il de redistributions possibles à la fin de la soirée ?
2. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé. Montrer que pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{P}(\Omega)^3$, on a la formule :
$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C)$$
3. Quelle est la probabilité qu'aucune des trois personnes ne reparte avec son chapeau à la fin de la soirée ?

Exercice 8 (C1-C2-C4) On considère 9 livres différents comportant 3 livres de biologie, 4 de chimie et 2 de maths.

1. De combien de façon peut-on ranger les 9 livres sur l'étagère ?
2. Quelle est la probabilité que les livres soient regroupés par matière sur l'étagère ?
3. On prend deux livres au hasard sur l'étagère. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux de la même matière ?

Exercice 9 (C1-C2-C4-C5) On tire successivement toutes les boules (deux à deux distinctes) d'une urne qui en contient n (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$).

1. (a) Comment formaliser un tirage ? Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
   (b) Proposer une fonction `python` qui prend en entrée un entier naturel n et qui modélise un tel tirage (qui pourra être assimilé à une liste). *On pourra utiliser la commande* `shuffle(L)` *qui permet de mélanger une liste.*
2. Dans cette urne, il y a 2 boules noires, les autres sont rouges.
   (a) Combien y a-t-il de tirages tels que la boule tirée au premier tirage soit noire ?
   (b) On fixe $i \in [\![1, n-1]\!]$. Combien y a-t-il de tirages tels que la première boule noire soit tirée au tirage i ?
   (c) Combien y a-t-il de tirages tels que les deux boules noires soient tirées aux deux premiers tirages ?
   (d) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$. Combien y a-t-il de tirages tels que les deux boules noires soient tirées aux tirages i et j ?
   (e) On fixe $i \in [\![2, n]\!]$. Combien y a-t-il de tirages tels que la deuxième boule noire soit tirée au tirage i ?
   (f) Écrire un programme `python` qui prend un entier i supérieur ou égal à 2 et qui vérifie si la deuxième boule noire est obtenue au i^{e} tirage. On pourra utiliser la fonction de la question 1.(b).

Exercice 10 (C1-C2) Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $p \in [\![1, n]\!]$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue un tirage de p boules de l'urne simultanément.

1. Combien a-t-il de tirages au total ?
2. Soit $k \in [\![p, n]\!]$. Déterminer le nombre de tirages tels que :
   (a) toutes les boules obtenues ont un numéro inférieur ou égal à k ;
   (b) le plus grand numéro tiré est k.
   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$ (*formule du triangle de Pascal généralisée*).

Exercice 11 (C1-C2) On considère un ensemble de jetons formé de a jetons jaunes et b jetons verts. On en pioche n simultanément.

1. Comment formaliser un tirage ? Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
2. Combien de tirages différents peut-on obtenir si on veut prendre exactement k jetons jaunes ?
3. En déduire la *formule de Vandermonde* :

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$$

Exercice 12 (C1-C2-C3) On considère un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à dénombrer l'ensemble des couples (A, B) de sous-ensembles de E vérifiant $A \cap B = \varnothing$.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Combien y a-t-il de parties à k éléments de E ?
2. Soit A un sous-ensemble fixé de E de cardinal $k \in [\![0, n]\!]$. Combien y a-t-il de parties B de E telles que $A \cap B = \varnothing$?
3. Conclure.