Fiche de révision 1 - Correction
Fonctions usuelles, Continuité, Dérivabilité, Développements limités

1 Compétences et notions à maîtriser

- ▷ C1 : Déterminer un domaine de définition, de continuité, de dérivabilité d'une fonction
- ▷ C2 : Connaître les propriétés (domaines de définitions, de continuité, de dérivabilité, dérivées, propriétés algébriques...) des fonctions usuelles (ln, exp, fonctions exponentielles $x \longmapsto a^x$ (*en base* $a > 0$), fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ ou plus généralement $\alpha \in \mathbb{R}$), fonctions trigonométriques cos, sin et tan, fonction arctangente, fonction valeur absolue, fonction partie entière)
- ▷ C3 : Résoudre des équations et des inéquations (par équivalence, en fixant préalablement la variable et en justifiant chaque étape, surtout quand on compose par une fonction ... qui doit être strictement monotone)
- ▷ C4 : Calculer des limites de fonctions en utilisant les croissances comparées, les propriétés sur les limites, les équivalents ou les développements limités
- ▷ C5 : Démontrer des inégalités entre fonctions en considérant la fonction différence et en établissant son signe
- ▷ C6 : Démontrer qu'une fonction est prolongeable par continuité en un point
- ▷ C7 : Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème de la bijection, ou le théorème des fonctions continues sur un segment
- ▷ C8 : Dériver une fonction, opérations sur la dérivation (notamment la composition)
- ▷ C9 : Étudier la dérivabilité en un point, dérivabilité à droite, dérivabilité à gauche
- ▷ C10 : Déterminer l'existence d'une tangente à une courbe en un point, équation de la tangente
- ▷ C11 : Utiliser le théorème de dérivabilité d'une réciproque
- ▷ C12 : Utiliser le théorème de Rolle ou le théorème des accroissements finis
- ▷ C13 : Savoir utiliser les développements limités usuels (en 0, en $a \in \mathbb{R}^*$ en procédant par translation et en $\pm\infty$ en posant $h = 1/x$), calculs de développements limités
- ▷ C14 : Étudier les asymptotes horizontales, verticales, obliques et déterminer les positions relatives (locales) d'une asymptote par rapport à la courbe

2 Correction des exercices

Exercice 1 (C1-C2-C4-C6) Étudier le domaine de définition, la continuité sur ce domaine, et éventuellement le prolongement par continuité aux bornes du domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$

   Notons $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \qquad \text{car } \mathcal{D}_{\ln} = \mathbb{R}_+^* \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{array} \right. \iff x > 0 \text{ et } x \neq -1 \text{ et } x \neq 1$$
$$\iff x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

   Donc $\mathcal{D}_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
   La $x \longmapsto \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ tandis que les fonctions (polynomiales) $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x^2 - 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$. En particulier, ces trois fonctions sont continues sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et, par produit et quotient (le dénominateur ne s'annulant pas), la fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f$.
   Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$. De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 - 1) = -1$ donc, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. On en conclut donc qu'on peut prolonger la fonction f par continuité (à droite) en 0 en posant $f(0) = 0$.
   Il reste à étudier le prolongement éventuel par continuité de f en 1. Comme $\lim\limits_{x\to 1} (x - 1) = 0$, on a (par substitution) :

$$\ln(x) = \ln(1 + (x - 1)) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$$

   puis, par quotient :

$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{x-1}{x^2-1} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x+1}$$

   En particulier, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x+1} = 2$. Ainsi, on peut également prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

2. $g : x \longmapsto \dfrac{1-\cos(x)}{\mathrm{e}^x - 1}$

   Les fonctions $x \longmapsto 1 - \cos(x)$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$ et le dénominateur $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1$ ne s'annule qu'en 0. Par quotient, la fonction g est donc définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.
   On sait que $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ tandis que $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc :

$$g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2/2}{x} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

   On a donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2} = 0$. On peut donc prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

3. $h : x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ll} x^x & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$

   Par définition de h, son domaine de définition est $\mathbb{R}_+^*$. Par quotient de fonctions continues, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $h(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. Par produit et composée de fonctions continues, h est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (en effet, la fonction $x \longmapsto x\ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ tandis que la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$). Finalement, h est continue sur $\mathbb{R}^*$.
   Par croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ donc (par composition des limites), on a :

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{X\to 0} \mathrm{e}^X = 1$$

   D'autre part, on sait que $\sin(x) \underset{x\to 0^-}{\sim} x$ donc (par quotient) $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = 1$. On peut donc prolonger la fonction h par continuité en 0 en posant $h(0) = 1$.

Exercice 2 (C1-C2-C6) Soit f la fonction d'expression :

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \big(x - \lfloor x \rfloor\big)^2$$

Donner le domaine de définition de f et étudier la continuité de f sur ce domaine.
On sait que la fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$, tout comme la fonction $x \longmapsto x$. Par différence, somme et produits de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$$

On sait de plus que $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur tout intervalle $]n, n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$. Par différence, somme et produit, la fonction f est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Il reste maintenant à étudier la continuité en tout point entier.
Soit $n \in \mathbb{Z}$. On sait que $\lim\limits_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n$ donc :

$$\lim_{x \to n^+} \big(n + (n-n)^2\big) = n = f(n) \qquad \text{car } \lfloor n \rfloor = n$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1$ donc :

$$\lim_{x \to n^-} \big(n - 1 + (n - (n-1))^2\big) = n - 1 + n = f(n)$$

La fonction f est donc continue à droite et à gauche au point n. Elle est donc continue au point n. Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

Exercice 3 (C4) Déterminer les limites suivantes :

1. $\ell_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \big(\mathrm{e}^{\cos(x)} - \ln(x)\big)$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\cos(x) \leqslant 1$ donc $\mathrm{e}^{\cos(x)} \leqslant \mathrm{e}$ (par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$) puis $\mathrm{e}^{\cos(x)} - \ln(x) \leqslant \mathrm{e} - \ln(x)$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\ln(x)) = -\infty$ donc $\boxed{\ell_1 = -\infty}$ d'après le théorème de comparaison.
2. $\ell_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$
   Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x}$.
   Par produit, il vient $x \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} -1$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = -1$ et donc, par composition des limites, $\boxed{\ell_2 = \lim\limits_{y \to -1} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{-1}}$.
3. $\ell_3 = \lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln(x+3) - \ln(x))$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$x\big(\ln(x+3) - \ln(x)\big) = x \ln\left(\frac{x+3}{x}\right) = x \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$$

   Or $\ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{3}{x}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x} = 0$. Par produit, il vient $x\big(\ln(x+3) - \ln(x)\big) \underset{x \to +\infty}{\sim} 3$. Ainsi, $\boxed{\ell_3 = 3}$.

4. $\ell_4 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(3^x - 2^x)}{x}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\frac{\ln(3^x - 2^x)}{x} = \frac{\ln\left(3^x(1-(2/3)^x\right)}{x} = \frac{\ln(3^x) + \ln(1-(2/3)^x)}{x} = \ln(3) + \frac{\ln(1-(2/3)^x)}{x}$$

Or :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x \ln\left(\frac{2}{3}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$$

car $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$ puisque $\dfrac{2}{3} \in]0,1[$. Par composition des limites, on a donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x\right) = \ln(1) = 0$$

et aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1-(2/3)^x)}{x} = 0$. Finalement, $\boxed{\ell_4 = \ln(3)}$.

5. $\ell_5 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+1} - x = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + 1\right)} - x &= |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x \\ &= x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right) \qquad \text{car } |x| = x \text{ car } x \geqslant 0\end{aligned}$$

Par substitution, on a :

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{car } \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

puis (par produit) $\sqrt{x^2+x+1} - x \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$. On a donc :

$$\boxed{\ell_5 = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}}$$

Commentaire

On peut aussi utiliser l'expression conjuguée. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a en effet :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + x} &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + x} \\ &= \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} \qquad \text{car } |x| = x \text{ car } x \geqslant 0\end{aligned}$$

La limite cherchée est donc $\ell_5 = \dfrac{1}{\sqrt{1}+1} = \dfrac{1}{2}$.

6. $\ell_6 = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$
Le trinôme $3x^2+2x-1$ s'annule en -1 donc il se factorise par $x+1$. On a les factorisations :

$$3x^2+2x-1 = 3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad x^2-1=(x-1)(x+1)$$

Par conséquent :

$$\boxed{\ell_6 = \lim_{x\to -1} \frac{3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}{x-1} = 2}$$

7. $\ell_7 = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)$
Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$. Alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2x+3}+x = \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+x &= |x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+x \\ &= -x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right) \qquad \text{car } |x|=-x \text{ puique } x\leqslant 0\end{aligned}$$

Or :

$$\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right) \qquad \text{car } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=0$$

puis (par produit) $\sqrt{x^2+2x+3}+x \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2}\left(2+\dfrac{3}{x}\right)$. On en déduit donc que :

$$\boxed{\ell_7 = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{2}\left(2+\frac{3}{x}\right) = -1}$$

Commentaire

On peut, comme à la question 5., utiliser l'expression conjuguée mais attention :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \qquad |x| = -x$$

8. $\ell_8 = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-\ln(1+x))$
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$x-\ln(1+x) = x\left(1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=0$ (le numérateur tend vers $\ln(1)=0$ tandis que le dénominateur tend vers $+\infty$). Par produit de limites, on a donc $\boxed{\ell_8=+\infty}$.

Commentaire

En l'état $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ n'est pas une croissance comparée.

9. $\ell_9 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{x}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{3^x - 2^x}{x} = \frac{3^x - 1}{x} - \frac{2^x - 1}{x} = \frac{\mathrm{e}^{\ln(3)x} - 1}{x} - f\mathrm{e}^{\ln(2)x} - 1x$$

On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln(3)x = \lim\limits_{x\to 0} \ln(2)x = 0$ donc :

$$\mathrm{e}^{\ln(3)x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \ln(3)x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{\ln(2)x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \ln(2)x$$

donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{x} = \ln(3) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \ln(2)$$

Par différence, on obtient donc $\boxed{\ell_9 = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}$.

10. $\ell_{10} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3^x - \pi^x + \mathrm{e}^x\right)$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$3^x - \pi^x + \mathrm{e}^x = -\pi^x\left(\left(\frac{3}{\pi}\right)^x - 1 + \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^x\right) = -\pi^x\left(\mathrm{e}^{\ln(3/\pi)x} - 1 + \mathrm{e}^{\ln(\mathrm{e}/3)x}\right)$$

Or $\ln\left(\dfrac{3}{\pi}\right) < 0$ et $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{\pi}\right) < 0$ car $0 < \mathrm{e} < 3 < \pi$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\ln(3/\pi)x} = \lim_{y\to-\infty} \mathrm{e}^y = 0 \qquad \text{et de même} \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\ln(\mathrm{e}/\pi)x} = 0$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \pi^x = +\infty$ (car $\ln(\pi) > 0$) donc $\boxed{\ell_{10} = -\infty}$.

11. $\ell_{11} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^x$
Pour tout $x \in]-\infty, -2[$, on a $\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}$ et :

$$\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{x+2}\right) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\frac{1}{x+2} \qquad \text{car} \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x+2}\right) = 2$$

On a $x+2 \underset{x\to-\infty}{\sim} x$ donc on a aussi $\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x}$. Par produit, il vient $x\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) \underset{x\to-\infty}{\sim} -1$.
Par composition des limites, on a finalement :

$$\boxed{\ell_{11} = \lim_{y\to-1} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{-1}}$$

12. $\ell_{12} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x^4)^{1/2} - 1}{(1-2x^3)^{1/3} - 1}$
Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} (-2x^3) = 0$, on a par substitution :

$$(1+x^4)^{1/2} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{2} \qquad \text{et} \qquad (1-2x^3)^{1/3} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{2}{3}x^3$$

et donc (par quotient) :

$$\frac{(1+x^4)^{1/2} - 1}{(1-2x^3)^{1/3} - 1} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{3}{4}x$$

Finalement, $\boxed{\ell_{12} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{3}{4}x\right) = 0}$.

Exercice 4 (C2-C5) Établir les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$

   La fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1 - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ donc :

$$f'(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$$

   par stricte croissance de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$. On a donc le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   La limite en $-\infty$ est immédiate et :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x \left(1 - \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x}\right) = +\infty \qquad \text{par croissances comparées}$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geqslant 0$ et donc :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x}$$

2. $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$

   On démontre les deux inégalités séparément.

   - Montrons que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin(x) \leqslant x$.

     La fonction $f : x \longmapsto x - \sin(x)$ est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$. Donc la fonction f est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc, en particulier :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad f(x) \geqslant 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sin(x) \leqslant x$$

   - Montrons que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x)$.

     La fonction $g : x \longmapsto \sin(x) - \dfrac{2}{\pi}x$ est deux fois dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad g'(x) = \cos(x) - \frac{2}{\pi} \qquad \text{et} \qquad g''(x) = -\sin(x)$$

     Sur l'intervalle, la fonction g'' est strictement négative sauf en 0 où elle s'annule. Il s'ensuit donc que g' est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Comme $0 < \dfrac{2}{\pi} < 1$ on a $g'(0) > 0$ et $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$, il existe un unique $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $g'(\theta) = 0$ d'après le théorème de la bijection. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		θ		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g(\theta)$	$\searrow$	0

     En particulier, on a $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ce qui démontre la deuxième inégalité.

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \forall x \in [-1,0[\cup]0,+\infty[,\ (1+x)^n > 1+nx$
La fonction $x \longmapsto (1+x)^n - 1 - nx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en tant que fonction polynomiale) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n\big((1+x)^{n-1} - 1\big)$$

et donc, pour tout $x \in [-1,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff (1+x)^{n-1} > 1 \qquad \text{car } n > 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{(n-1)\ln(1+x)} > 1 \\ &\iff (n-1)\ln(1+x) > 0 \qquad \text{par stricte croissance de la fonction ln sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff \ln(1+x) > 0 \qquad \text{car } n-1 > 0 \\ &\iff 1+x > 1 \qquad \text{par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R} \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

On a le tableau de variation de f suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$n-1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour la limite de f en $+\infty$, on peut par exemple factoriser par x^n pour justifier que cette limite vaut $+\infty$.
On a $f(0) = 0$ et la fonction est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ (respectivement strictement décroissante sur $[-1,0]$) donc :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f(x) > f(0) \qquad\qquad (\text{respectivement : } \quad \forall x \in [-1,0[, \qquad f(x) > f(0))$$

Pour tout $x \in [-1,0[\cup]0,+\infty[$, on a donc $f(x) > 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall x \in [-1,0[\cup]0,+\infty[, \qquad (1+x)^n > 1+nx}$$

4. $\forall x \in]-1, +\infty[, \ \dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

On démontre les deux inégalités séparément.

- Montrons que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.
  La fonction $f : x \longmapsto x - \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ (par différence et composition) et :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

  On obtient le tableau de variations de f suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

  Pour la limite en $+\infty$, voir la limite ℓ_8 de l'exercice 3. On obtient bien l'inégalité annoncée.

- Montrons que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $\dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x)$.
  La fonction $g : x \longmapsto \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$ est deux dérivable sur $]-1, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

  On obtient le tableau de variation de g suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

  La limite en $+\infty$ est immédiate et :

$$\lim_{x \to -1^+} g(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x+1}\left((x+1)\ln(x+1) - x\right) = +\infty$$

  car (par croissances comparées) $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} (x+1)\ln(x+1) = \lim_{y \to 0^+} y\ln(y) = 0$. On a donc bien la deuxième inégalité.

Finalement :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1, +\infty[, \text{ on a } \frac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x}$$

Exercice 5 (C6) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. En considérant la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $U_n = \dfrac{1}{n\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il n'est pas possible de prolonger la fonction f par continuité en 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\cos(U_n) = \cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad f(U_n) = (-1)^n$$

En particulier, la suite $(f(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente (puisque ses deux suites extraites convergent vers des limites différentes). Cela implique que la fonction f n'admet pas de limite en 0. Donc :

$$\boxed{\text{on ne peut pas prolonger la fonction } f \text{ par continuité en } 0}$$

Exercice 6 (C2-C8-C10-C14) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de chacune des fonctions f suivantes et étudier l'existence de tangentes et d'asymptotes.

1. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x + 3x$
   La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont (donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$).
   - **Étude en $-\infty$**
     On remarque que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 3x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Donc la droite d'équation $y = 3x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.
   - **Étude en $+\infty$**
     On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = +\infty$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$.
2. $f : x \longmapsto x + 1 - \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
   $$x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} x \neq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x} > 0 \end{cases} \iff x > 1$$
   donc $\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$.
   - **Étude en 1**
     On a $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$. On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = 1$ comme tangente verticale.
   - **Étude en $+\infty$**
     On remarque que :
     $$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (x+1)\big) = \lim_{x\to+\infty} -\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$
     donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
3. $f : x \longmapsto \ln(x) + 4x$
   La fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.
   - **Étude en 0**
     On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ donc la courbe $\mathcal{D}_f$ admet la droite d'équation $x = 0$ comme tangente verticale.
   - **Étude en $+\infty$**
     On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(4 + \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 4$ par croissances comparées. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 4x) = +\infty$. Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ présente une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = 4x$ au voisinage de $+\infty$.

4. $f : x \longmapsto 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff x^2+4x+3 \iff x \in]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$$

donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$.

- La fonction f ne présente ni asymptote, ni branche parabolique, ni tangente verticale aux points d'abscisses -3 et -1 (ces nombres appartenant au domaine de définition de f).
- **Étude en $+\infty$**

  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x + \overbrace{|x|}^{=x} \sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x} = 3$ et :

  $$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-3x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+3} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} - 1\right) = 2$$

  car :

  $$\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right) \qquad \text{puisque} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right) = 0$$

  On en déduit donc que la droite d'équation $y = 3x+2$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{D}_f$ au voisinage de $+\infty$.
- **Étude en $-\infty$**

  On procède de la même manière : puisque $|x| = -x$ si $x \in \mathbb{R}_-$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ puis :

  $$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} -x\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} + 1}_{\text{tend vers 2 en } -\infty}\right) = +\infty$$

  Donc la courbe $\mathcal{D}_f$ présente une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$.

5. $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^2}{x-1}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{x^2}{x-1} \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 1 \\ x-1 \geqslant 0 \text{ puisque } x^2 \geqslant 0 \end{cases} \iff x > 1$$

donc $\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$.

- **Étude en 1**

  On a $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$. Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = 1$ comme tangente verticale.
- **Étude en $+\infty$**

  On a :

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\overbrace{|x|}^{=x}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$$

  donc la courbe $\mathcal{C}_f$ présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

Exercice 7 (C1-C2-C7) Soit $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \left\{\begin{array}{c} x \neq 1 \\ \dfrac{1+x}{1-x} > 0 \end{array}\right. \iff x \in]-1,1[$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

   Donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]-1,1[}$.

2. Montrer que f établit une bijection de $\mathcal{D}_f$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'application réciproque.
   Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}_f$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = y \\ &\iff \frac{1+x}{1-x} = \mathrm{e}^{\,y} \qquad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &\iff 1+x = \mathrm{e}^{\,y} - \mathrm{e}^{\,y} x \\ &\iff x(1+\mathrm{e}^{\,y}) = \mathrm{e}^{\,y} - 1 \\ &\iff x = \frac{\mathrm{e}^{\,y}-1}{1+\mathrm{e}^{\,y}} \qquad \text{car } \mathrm{e}^{\,y}+1 \neq 0 \end{aligned}$$

   Cela prouve que y admet un unique antécédent par f <u>dans $\mathbb{R}$</u>. Il reste à établir que l'antécédent obtenu x appartient à $\mathcal{D}_f$. Or :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f \iff -1 < \frac{\mathrm{e}^{\,y}-1}{1+\mathrm{e}^{\,y}} < 1 &\iff -1-\mathrm{e}^{\,y} < \mathrm{e}^{\,y} - 1 < \mathrm{e}^{\,y}+1 \qquad \text{car } \mathrm{e}^{\,y}+1 > 0 \\ &\iff 2\,\mathrm{e}^{\,y} > 0 \text{ et } 2 > 0 \end{aligned}$$

   ce qui est toujours vrai. Donc y admet un unique antécédent par f dans $]-1,1[$. Finalement :

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de }]-1,1[\text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } f^{-1} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ y & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{\,y}-1}{1+\mathrm{e}^{\,y}} \end{array}\right.}$$

Commentaire

Étant donné qu'il est demandé de déterminer la réciproque, il est inutile d'appliquer le théorème de la bijection pour établir le caractère bijectif de f. En effet, la méthode utilisée dans la question 2. permet de montrer que f est bijective et de donner son application réciproque.

Exercice 8 (C7) Soit f et g continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0,\ |f(x)| = |g(x)|$$

Montrer que $g = f$ ou $g = -f$.
La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc on peut définir la fonction

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{g(x)}{f(x)}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a $|h(x)| = 1$, donc $h(x) = \pm 1$. On veut monter que h est forcément une fonction constante, égale à 1 ou à -1 sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, tel que $h(a) = 1$ et $h(b) = -1$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annule pas. On remarque que $0 \in [-1, 1]$, donc par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h(c) = 0$. Or $h(c) = \pm 1$, d'où la contradiction.
C'est donc que h ne change pas de valeur, donc h est la fonction constante égale à 1 ou la fonction constante égale à -1.
Ainsi, $f = g$ sur $\mathbb{R}$ ou $f = -g$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 (C3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de chacune des (in)équations.

Commentaire

Lorsqu'une (in)équation met en jeu une fonction qui n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ (fonctions logarithme, racine carrée...) il ne faut pas oublier de commencer par déterminer le domaine de validité de l'(in)équation (pour éviter d'avoir des valeurs erronées à la fin).

1. $|x^2 + 3x + 3| > 1$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

   $$|x^2 + 3x + 3| > 1 \iff x^2 + 3x + 3 > 1 \text{ ou } x^2 + 3x + 3 < -1 \iff x^2 + 3x + 2 > 0 \text{ ou } x^2 + 3x + 4 < 0$$

   Le discriminant de $x^2 + 3x + 4$ est strictement négatif donc ce trinôme est toujours strictement positif (car du signe de coefficient dominant 1). De plus, les racines de $x^2 + 3x + 2$ sont -1 et -2 donc :

   $$x^2 + 3x + 2 > 0 \iff x \in]-\infty, -2[\cup] - 1, +\infty[$$

   Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup] - 1, +\infty[}$.
2. $\ln(x^2 - 6x + 9) = 2\ln(x - 3)$
   Déterminons le domaine de validité $\mathcal{D}$ de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

   $$x \in \mathcal{D} \iff \left\{ \begin{array}{c} x^2 - 6x + 9 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{array} \right. \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \text{ et } x \in]3, +\infty[\iff x \in]3, +\infty[$$

   De plus, pour tout $x \in]3, +\infty[$, on a :

   $$\ln(x^2 - 6x + 9) = \ln\left((x - 3)^2\right) = 2\ln(x - 3)$$

   donc tous les éléments du domaine de validité $\mathcal{D}$ sont solutions de l'équation. Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{D} =]3, +\infty[}$.

3. $|x+2|+2+2x=x^2$
Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$|x+2|=\begin{cases} x+2 & \text{si } x+2\geqslant 0 \\ -x-2 & \text{si } x+2<0\end{cases} = \begin{cases} x+2 & \text{si } x\geqslant -2 \\ -x-2 & \text{si } x<-2\end{cases}$$

On distingue maintenant deux cas.

- **Premier cas :** $x\in[-2,+\infty[$.
Alors :

$$|x+2|+2+2x=x^2 \iff x+2+2+2x=x^2 \iff x^2-3x-4 \iff x=-1 \text{ ou } x=4$$

Comme -1 et 4 appartiennent à $[-2,+\infty[$, ces valeurs sont solutions de l'équation.

- **Deuxième cas :** $x\in]-\infty,-2[$.
Alors :

$$|x+2|+2+2x=x^2 \iff -x-2+2+2x=x^2 \iff x^2-x-2=0 \iff x=-1 \text{ ou } x=2$$

Comme $-1\notin]-\infty,-2[$ et $2\notin]-\infty,-2[$, aucune de ces deux nombres n'est solution de l'équation.

On a donc finalement $\boxed{\mathcal{S}=\{-1,4\}}$.

4. $x-\dfrac{6}{x+4}\geqslant 1$
Le domaine de validité de l'inéquation est $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$. Soit $x\in\mathcal{D}$. Alors :

$$\begin{aligned} x-\frac{6}{x+4}\geqslant 1 \iff \frac{x^2+4x-6-(x+4)}{x+4}\geqslant 0 &\iff \frac{x^2+3x-10}{x+4}\geqslant 0 \\ &\iff x\in[-5,-4[\cup[2,+\infty[\end{aligned}$$

x	$-\infty$		-5		-4		2		$+\infty$
$x^2+3x-10$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2+3x-10}{x+4}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{\mathcal{S}=[-5,-4[\cup[2,+\infty[}$.

5. $\sqrt{2x^2-x-1} > 2x+1$
Déterminons le domaine de validité $\mathcal{D}$ de l'inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D} \iff 2x^2-x-1 \geqslant 0 \iff x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[$$

Donc $\mathcal{D} = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[$.
Soit $x \in \mathcal{D}$. On distingue rois cas.

- **Premier cas :** $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$
  Alors $2x+1 < 0$ tandis que $\sqrt{2x^2-x-1} > 0$. En particulier, on a $\sqrt{2x^2-x-1} \geqslant 2x+1$ (ce qui signifie que x est solution).
- **Deuxième cas :** $x = -\frac{1}{2}$
  Alors $\sqrt{2x^2-x-1} = 2x+1 = 0$ donc x n'est pas solution.
- **Troisième cas :** $x \in [1, +\infty[$
  Comme $\sqrt{2x^2-x-1} \in \mathbb{R}_+$ et $2x+1 \in \mathbb{R}_+$, on a par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2-x-1} > 2x+1 \iff 2x^2-x-1 > (2x+1)^2 &\iff 2x^2-x-1 > 4x^2+4x+1 \\ &\iff 2x^2+5x+2 < 0 \\ &\iff x \in \left]-2, -\frac{1}{2}\right[\end{aligned}$$

  Comme $[1, +\infty[\cap \left]-2, -\frac{1}{2}\right[= \varnothing$, il n'y a pas de solution dans l'intervalle $[1, +\infty[$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[}$.

6. $x = \sqrt{2-x^2}$
On cherche le domaine de validité $\mathcal{D}$ de l'équation. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D} \iff 2-x^2 \geqslant 0 \iff x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$$

Donc $\mathcal{D} = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.
Soit $x \in \mathcal{D}$. On distingue deux cas.

- **Premier cas :** $x \in \left[-\sqrt{2}, 0\right[$
  Alors $x < 0$ tandis que $\sqrt{2-x^2} \geqslant 0$ donc $x \neq \sqrt{2-x^2}$ (et donc x n'est pas solution de l'équation).
- **Deuxième cas :** $x \in \left[0, \sqrt{2}\right]$
  On a $\left(x, \sqrt{2-x^2}\right) \in (\mathbb{R}_+)^2$ donc par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ on obtient :

$$x = \sqrt{2-x^2} \iff x^2 = 2-x^2 \iff x^2 = 1 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1 \iff x = 1$$

  car $1 \in \left[0, \sqrt{2}\right]$ tandis que $-1 \notin \left[0, \sqrt{2}\right]$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$.

7. $\mathrm{e}^x - 1 - 2\,\mathrm{e}^{-x} = 0$
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - 1 - 2\,\mathrm{e}^{-x} = 0 &\iff (\mathrm{e}^x)^2 - \mathrm{e}^x - 2 = 0 \qquad \text{car } \mathrm{e}^x \neq 0 \\ &\iff X^2 - X - 2 = 0 \qquad \text{en posant } X = \mathrm{e}^x \\ &\iff X = -1 \text{ ou } X = 2 \\ &\iff \mathrm{e}^x = -1 \text{ ou } \mathrm{e}^x = 2 \\ &\iff x = \ln(2) \end{aligned}$$

car $\mathrm{e}^x > 0$ tandis que $-1 < 0$ (pour la première équation) et par stricte croissance de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$ (pour la seconde équation). Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \{\ln(2)\}}$.

8. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}} < \sqrt{x}$

Déterminons le domaine de validité $\mathcal{D}$ de l'inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x \neq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-2} \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in [0, +\infty[\cap (]-\infty, -1] \cup]2, +\infty[)$$
$$\iff x \in]2, +\infty[$$

donc $\mathcal{D} =]2, +\infty[$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Soit $x \in]2, +\infty[$. La fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}, \sqrt{x}\right) \in (\mathbb{R}_+)^2$ donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}} < \sqrt{x} \iff \dfrac{x+1}{x-2} < x &\iff x+1 < x(x-2) \qquad \text{car } x-2>0 \\ &\iff x^2 - 3x - 1 > 0 \\ &\iff x \in \left]-\infty, \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[\end{aligned}$$

On a donc $\mathcal{S} =]2, +\infty[\cap \left(\left]-\infty, \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[\right)$ et il reste à calculer cette intersection. On a $9 < 13$ donc $3 < \sqrt{13}$ (par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$) donc $\dfrac{3-\sqrt{13}}{2} < 0$. D'autre part, $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} > 2$ car :

$$\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} > 2 \iff 3 + \sqrt{13} > 4 \iff \sqrt{13} > 1 \quad \text{ce qui est vrai}$$

Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \left]\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[}$.

9. $5^{x^3} = 3^{\sqrt{x}}$

Le domaine de validité de l'équation est $\mathbb{R}_+$. On remarque que 0 est solution de l'équation puisque $5^0 = 3^0 = 1$. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\begin{aligned} 5^{x^3} = 3^{\sqrt{x}} &\iff \mathrm{e}^{x^3 \ln(5)} = \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln(3)} \\ &\iff x^3 \ln(5) = \sqrt{x}\ln(3) \qquad \text{par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R} \\ &\iff x^{5/2} = \dfrac{\ln(3)}{\ln(5)} \qquad \text{car } \ln(5) \neq 0 \text{ et } \sqrt{x} \neq 0 \\ &\iff x = \left(\dfrac{\ln(3)}{\ln(5)}\right)^{2/5} \end{aligned}$$

par stricte croissance de la fonction $t \longmapsto t^{2/5}$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{0, \left(\dfrac{\ln(3)}{\ln(5)}\right)^{2/5}\right\}}$.

Exercice 10 (C7) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier qu'il existe deux nombres réels m et M tels que :

$$\forall x \in [0,1], \qquad m \leqslant f(x) \leqslant M$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc continue sur le segment $[0,1]$ donc elle y est bornée ce qui signifie que :

$$\boxed{\exists\,(m,M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in [0,1], \qquad m \leqslant f(x) \leqslant M}$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un encadrement de u_n.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale u_n est bien définie car la fonction $x \longmapsto f(x)\,\mathrm{e}^{-nx}$ est continue sur le segment $[0,1]$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $m\,\mathrm{e}^{-nx} \leqslant f(x)\,\mathrm{e}^{-nx} \leqslant M\,\mathrm{e}^{-nx}$ car $\mathrm{e}^{-nx} > 0$ et d'après la question 1. Par croissance et linéarité de l'intégrale, il vient :

$$m\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \leqslant u_n \leqslant M\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

Or (puisque $n \neq 0$) :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \left[-\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}\right]_0^1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$$

donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad m\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n} \leqslant u_n \leqslant M\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}}$$

3. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} m\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n} = \lim_{n\to+\infty} M\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente de limite } 0}$$

Exercice 11 (C7) *Les quatre questions sont indépendantes.*

1. (a) Montrer que l'équation $x^2\cos(x) + x\sin(x) + 1 = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2\cos(x) + x\sin(x) + 1$. On a $f(0) = 1 > 0$ et $f(\pi) = -\pi^2 + 1 < 0$. De plus, la fonction f est continue sur l'intervalle $[0,\pi]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0,\pi]$ tel que $f(c) = 0$ ce qui signifie que :

$$\boxed{\text{l'équation } x^2\cos(x) + x\sin(x) + 1 = 0 \text{ admet au moins une solution dans } \mathbb{R}}$$

(b) Proposer un programme informatique qui fournisse un encadrement d'une solution de cette équation par une méthode de balayage, la précision étant choisie par l'utilisateur.
La fonction ci-dessous prend en entrée une précision `p`. Partant de 0, on ajoute p tant que l'image par f reste positive.

```
from math import *
def balayage(p) :
    x = 0
    while (x**2*cos(x)+x*sin(x)+1 > 0) :
        x = x + p
    return x-p, x
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $x^n + 2x^2 + x = 1$ a une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ et que cette solution appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \longmapsto x^n + 2x^2 + x$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = nx^{n-1} + 4x + 1 \geqslant 1 > 0$$

donc f est *strictement* croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
f	0 $\nearrow$	$+\infty$

On a de plus $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$ (car $n \geqslant 1$) donc $1 \in \mathbb{R}_+$. D'après le théorème de la bijection, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 1 \text{ (c'est-à-dire } x^n + 2x^2 + x = 1\text{) admet une unique solution dans } \mathbb{R}_+ \text{ (notée } x_n\text{)}}$$

Par ailleurs, on a $f(0) = 0 \leqslant 1$ et :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n} + 1 \geqslant 1$$

On a donc l'encadrement $f(0) \leqslant f(x_n) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$. Or la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc on a aussi $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$. Donc :

$$\boxed{\text{l'unique solution cherchée appartient en fait à l'intervalle } \left[0, \frac{1}{2}\right]}$$

3. Montrer que le polynôme $P = 5X^6 + X^4 + X^3 + 2X^2 - 1$ admet au moins deux racines réelles.
On remarque que $\mathrm{P}(0) = -1 < 0$ tandis que $\mathrm{P}(1) = 8 > 0$. Or P est continue sur $[0, 1]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, le polynôme P admet au moins une racine dans l'intervalle $[0, 1]$ (même $]0, 1]$ puisque $\mathrm{P}(0) \neq 0$).
De plus, $\mathrm{P}(-1) = 6 > 0$ (et $\mathrm{P}(0) = -1 < 0$) et P est continue sur $[-1, 0]$ donc le polynôme P admet au moins une racine dans l'intervalle $[-1, 0[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Finalement :

$$\boxed{\text{le polynôme P admet au moins deux racines réelles}}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$. Montrer que l'équation $x^n \, \mathrm{e}^{-x} = 1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}_+$, l'une dans l'intervalle $[0,n]$ et l'autre dans l'intervalle $[n,+\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$. La fonction $f : x \longmapsto x^n \, \mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = (nx^{n-1} - x^n)\,\mathrm{e}^{-x} = x^{n-1}(n-x)\,\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{qui est du signe de } n-x$$

On a le tableau de variations suivant :

x	0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$n^n \, \mathrm{e}^{-n}$	$\searrow$	0

La limite en $+\infty$ (qui est nulle) provient des croissances comparées. Montrons que $f(n) \geqslant 1$. On a :

$$f(n) = n^n \, \mathrm{e}^{-n} = \frac{n^n}{\mathrm{e}^n} = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \geqslant 1 \tag{2.1}$$

car $n \geqslant 3 \geqslant \mathrm{e}$.

- **Étude sur $[0, n]$**
  La fonction f est continue sur $[0,n]$ et elle y est strictement croissante (car pour tout $x \in]0,n[$, on a $f'(x) > 0$). De plus, $1 \in f([0,n]) = [0, f(n)]$ d'après (2.1). D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0,n]$.
- **Étude sur $[n, +\infty[$**
  La fonction f est continue sur $[n,+\infty[$ et elle y est strictement croissante (car pour tout $x \in]n,+\infty[$, on a $f'(x) > 0$). De plus, $1 \in f([n,+\infty[) =]0, f(n)]$ d'après (2.1). D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[n,+\infty[$.

Finalement :

$$\boxed{f \text{ prend exactement deux fois la valeur 1 dans } \mathbb{R}_+ \text{ (une fois dans } [0,n] \text{ et une fois dans } [n,+\infty[)}$$

(b) On rappelle le principe de dichotomie. Si une fonction f s'annule une unique fois sur un intervalle $[a,b]$, alors on construit la suite de segments $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n)f(c_n) < 0 \\ c_n & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{si } f(a_n)f(c_n) < 0 \\ b_n & \text{sinon} \end{cases}$$

où c_n est le milieu du segment $[a,b]$. Écrire une fonction `dichotomie` prenant un nombre strictement positif `eps` et renvoyant un encadrement de la solution appartenant à l'intervalle $[0,n]$ à `eps` près à l'aide de ce procédé.

On commence par générer la fonction que l'on étudie $x \longmapsto x^n \, \mathrm{e}^{-x} - 1$.

```
from math import *
def f(x)
    return x**n*exp(-x)-1
```

On utilise une boucle `while` :

```
def dichotomie(n,eps) :
    a = 0
    b = n
    while (b-a > eps) :
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) < 0 :
            b = c
        else :
            a = c
    return a, b
```

Exercice 12 (C4) Déterminer un équivalent *simple* des expressions suivants aux points indiqués :

1. $\sqrt{x^2+x}-x$ en $+\infty$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$\sqrt{x^2+x}-x=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)$$
   car $|x|=x$ puisque $x \geqslant 0$. Or :
$$\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x} \qquad \text{car} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$
   donc (par produit) $\boxed{\sqrt{x^2+x}-x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}}$.

2. $x+\ln(x)$ en $+\infty$

   On a $\boxed{x+\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x}$ car :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln(x)}{x}\right)=1$$
   par croissances comparées.

3. $\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{1-\mathrm{e}^{2x}}$ en 0^+

   On a $x^2+\sqrt{x} \underset{x\to0^+}{\sim} \sqrt{x}$ tandis que $1-\mathrm{e}^{2x} \underset{x\to0^+}{\sim} -2x$ car $\lim\limits_{x\to0^+} 2x=0$. Par quotient, on obtient :
$$\boxed{\frac{x^2+\sqrt{x}}{1-\mathrm{e}^{2x}} \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{\sqrt{x}}{2x}=-\frac{\sqrt{x}}{2}}$$

4. $\ln(\cos(x))$ en 0

   On a :
$$\ln(\cos(x))=\ln\big(1+\cos(x)-1\big) \underset{x\to0}{\sim} \cos(x)-1 \qquad \text{car } \lim_{x\to0}(\cos(x)-1)=0$$
   et on sait que $1-\cos(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ donc $\boxed{\ln(\cos(x)) \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^2}{2}}$.

5. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\ln(x)}$ en $+\infty$

   On a $\boxed{\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}}$ car :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(x)}}{\frac{1}{\ln(x)}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}+1\right)=1$$
   par croissances comparées.

6. $2x\ln(x)-x\ln(x^2+1)$ en $+\infty$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$2x\ln(x)-x\ln(x^2+1)=2x\ln(x)-x\left(\underbrace{\ln(x^2)}_{=2\ln(x)}+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)=-x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ et donc, par produit, $\boxed{2x\ln(x)-x\ln(x^2+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}}$.

Exercice 13 (C1-C2-C7) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = \frac{(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})^2}{4} = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{0} + \mathrm{e}^{-2x} - (\mathrm{e}^{2x} - 2\,\mathrm{e}^{0} + \mathrm{e}^{-2x})}{4}$$

   et donc $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1}$.

2. (a) Démontrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
   La fonction sh est continue sur $\mathbb{R}$.
   Étudions les variations de la fonction sh sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} > 0$$

   Donc la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a le tableau de variation suivant (les limites sont immédiates) :

x	$-\infty$		$+\infty$
sh			$+\infty$
	$-\infty$	↗	

   Donc, d'après le théorème de la bijection :

$$\boxed{\text{la fonction sh réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x), \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x)\right[= \mathbb{R}}$$

   (b) Que peut-on dire de la fonction réciproque de sh (notée argsh) ? Déterminer notamment son tableau de variation.
   D'après le théorème de la bijection, la fonction argsh est continue sur $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et elle y est strictement croissante (car de même monotonie que sh).

x	$-\infty$		$+\infty$
argsh			$+\infty$
	$-\infty$	↗	

3. Déterminer l'expression de argsh.
Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout l'équation $y = \text{sh}(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\text{sh}(x) = y \iff \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = y &\iff e^{x} - e^{-x} = 2y \\
&\iff \left(e^{x}\right)^2 - 2y\, e^{x} - 1 = 0 \qquad \text{en multipliant par } e^{x} \neq 0 \\
&\iff X^2 - 2yX - 1 = 0 \qquad \text{en posant } X = e^{x} \\
&\iff X = y - \sqrt{y^2+1} \text{ ou } X = y + \sqrt{y^2+1}
\end{aligned}$$

On sait d'après la question 2.(a) que l'équation $\text{sh}(x) = y$ admet une unique solution x, ce qui revient à dire (par équivalence) que l'équation du second degré $X^2 - 2yX - 1 = 0$ admet une unique solution en la variable $X = e^{x}$. Cette solution X est positive (puisque $e^{x} > 0$). Or on remarque que $y - \sqrt{y^2+1} < y + \sqrt{y^2+1}$ dont la solution cherchée est nécessairement $y + \sqrt{y^2+1}$ (par existence et unicité de la solution). Ainsi :

$$\begin{aligned}
\text{sh}(x) = y &\iff X = y + \sqrt{y^2+1} \\
&\iff e^{x} = y + \sqrt{y^2+1} \\
&\iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \quad \text{par stricte croissance de la fonction ln sur } \mathbb{R}_+^*
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{argsh} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \end{array}\right.}$$

Commentaire

On peut se passer du théorème de la bijection pour conclure quant au *bon* antécédent parmi $X_1 = y - \sqrt{y^2+1}$ et $X_2 = y + \sqrt{y^2+1}$. En effet, par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a (puisque $y^2 + 1 > y^2$) :

$$\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sqrt{y^2+1} > |y|$$

Comme on a de plus $|y| \geqslant y$ et $|y| \geqslant -y$, on a :

$$\sqrt{y^2+1} > y \text{ et } \sqrt{y^2+1} > -y \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad X_1 < 0 \text{ et } X_2 > 0$$

Mais on sait que $X = e^{x} > 0$ donc...

Exercice 14 (C1-C8) Après avoir déterminé le domaine de définition et le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes, calculer leur dérivée.

On note $\mathcal{D}_{\text{lettre}}$ le domaine de définition de la fonction « lettre ».

1. $a : x \longmapsto e^{x^2-x+1}$
Les fonctions exponentielles et $x \longmapsto x^2 - x + 1$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc (par composition) la fonction a est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a'(x) = (2x-1)\, e^{x^2-x+1}$$

2. $b : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
$$x \in \mathcal{D}_b \iff \sin(x) \neq 0 \iff x \neq 0 \mod \pi \iff x \notin \pi\mathbb{Z}$$
   où on a posé $\pi\mathbb{Z} = \left\{ k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Donc $\mathcal{D}_b = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathcal{D}_b$ et la fonction sinus ne s'y annule pas donc (par quotient) la fonction b est dérivable sur $\mathcal{D}_b$ et :
$$\forall x \in \mathcal{D}_b, \qquad b'(x) = \frac{-\sin(x)^2 - \cos(x)^2}{\sin(x)^2} = -\frac{1}{\sin(x)^2}$$

3. $c : x \longmapsto \ln(\ln(x))$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
$$x \in \mathcal{D}_c \iff \left\{ \begin{array}{c} x > 0 \\ \ln(x) > 0 \end{array} \right. \iff x > 1$$
   par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\mathcal{D}_c =]1, +\infty[$.
   La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction c est donc dérivable en tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln(x) > 0$, c'est-à-dire tel que $x \in]1, +\infty[$. Donc la fonction c est dérivable sur $\mathcal{D}_c$ et :
$$\forall x \in \mathcal{D}_c, \qquad c'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

4. $d : x \longmapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   La fonction inverse est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ tandis que la fonction arctangente est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction d est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad d'(x) = -\frac{1}{x^2}\arctan'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{1}{x^2+1}$$

5. $e : x \longmapsto \cos(\sqrt{x})$
   La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ tandis que la fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ donc (par composition) la fonction e est définie sur $\mathcal{D}_e = \mathbb{R}_+$.
   Par ailleurs, on sait que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ tandis que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc (par composition) la fonction e est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad e'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

6. $f : x \longmapsto \tan\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$
Indication : pour la fonction f, montrer préalablement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{2x}{1+x^2} + 1 = \frac{x^2+2x+1}{1+x^2} = \frac{(x+1)^2}{1+x^2} \geqslant 0 \qquad \text{et donc} \qquad \frac{2x}{1+x^2} \geqslant -1$$

La deuxième inégalité se démontre de la même manière.
Déterminons le domaine de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \frac{2x}{1+x^2} \in \mathcal{D}_{\tan} \iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \frac{2x}{1+x^2} \in \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$$

D'après les inégalités préalablement établies, on sait que $\dfrac{2x}{1+x^2} \in [-1,1]$. Or $\dfrac{\pi}{2} > 1$ donc $\dfrac{2x}{1+x^2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Par conséquent, $x \in \mathcal{D}_{\tan}$ et donc $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R}$.
Par quotient, la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction tangente est dérivable sur son domaine de définition. Par composition, la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ (car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{2x}{1+x^2} \in \mathcal{D}_{\tan}$) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{2(1+x^2)-(2x)^2}{(1+x^2)^2}\tan'\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\left(1+\tan\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2\right)$$

7. $g : x \longmapsto \sqrt{\ln(x)}$
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D}_g \iff \left\{\begin{array}{c} x > 0 \\ \ln(x) \geqslant 0 \end{array}\right. \iff x \geqslant 1$$

par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{D}_g = [1, +\infty[$.
De plus, la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc (par composition) la fonction g est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln(x) > 0$. Donc g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \qquad g'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$$

8. $h : x \longmapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D}_h \iff \begin{cases} x \neq -1 \\ \dfrac{1-x}{1+x} \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in]-1,1]$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{1-x}{1+x}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

donc $\mathcal{D}_h = [-1,1[$.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ tandis que la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition la fonction $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ tel que $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$ c'est-à-dire est dérivable sur $]-1,1[$. Ensuite, la fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc (par composition) la fonction h est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) = \frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \times \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2} &= -\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \times \frac{1+x}{2} \\ &= -\frac{1}{2(1+x)} \times \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

9. $i : x \longmapsto \ln\left(\sqrt{1-x}\right)$
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D}_i \iff \begin{cases} 1-x \geqslant 0 \\ \sqrt{1-x} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leqslant 1 \\ x < 1 \end{cases} \iff x \in]-\infty, 1[$$

et donc $\mathcal{D}_i =]-\infty, 1[$. Pour tout $x \in \mathcal{D}_i$, on a $1-x > 0$ donc on a l'égalité $i(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{2}$. La fonction $x \longmapsto 1-x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc (par composition) la fonction i est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $1-x > 0$. Autrement dit, i est dérivable sur $\mathcal{D}_i$ et :

$$\forall x \in \mathcal{D}_i, \qquad i'(x) = -\frac{1}{2(1-x)}$$

Exercice 15 (C9) Soient a un nombre réel et f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0. On considère la fonction g définie par $g(0) = a$ et par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2x}$$

Étudier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.

On étudie séparément la continuité de g sur $\mathbb{R}^*$ et en 0.

- **Étude de la continuité sur $\mathbb{R}^*$**
  La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Comme la fonction $x \longmapsto -x$ l'est également, la fonction $x \longmapsto f(-x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composition. Par différence, la fonction $x \longmapsto f(x) - f(-x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}^*$. Comme $x \longmapsto x$ est aussi continue sur $\mathbb{R}^*$ et ne s'annule pas, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$ par quotient.
- **Étude de la continuité en 0**
  Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors :

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = \frac{(f(x) - f(0)) - (f(-x) - f(0))}{2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x) - f(0)}{x} + \frac{f(-x) - f(0)}{-x}\right)$$

  On sait que f est dérivable en 0 donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$ et de même, puisque $\lim\limits_{x \to 0}(-x) = 0$, on a par composition des limites :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(-x) - f(0)}{-x} = \lim_{y \to 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = f'(0)$$

  La fonction g admet donc une limite en 0 qui vaut :

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \frac{1}{2}(f'(0) + f'(0)) = f'(0)$$

Comme $g(0) = a$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est continue en 0 (et donc sur } \mathbb{R}) \text{ si et seulement si } a = f'(0)}$$

Exercice 16 (C13) Déterminer les développements limités suivants :

1. $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\sin(x)^2$
   On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(2x) = 1 - 2\sin(x)^2$ donc $\sin(x)^2 = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$, on a :

$$\cos(2x) \underset{0}{=} 1 - \frac{(2x)^2}{2\,!} + \frac{(2x)^4}{4\,!} + \mathrm{o}(x^5) \underset{0}{=} 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \mathrm{o}(x^5)$$

   et donc $\boxed{\sin(x)^2 \underset{0}{=} x^2 - \dfrac{x^4}{3} + \mathrm{o}(x^5)}$.

Commentaire

La méthode standard consiste bien sûr à écrire le développement limité du sinus puis de l'élever au carré (il est donc inutile de ruser).

2. $\mathrm{DL}_4(\pi/4)$ de $\cos(x)$

Posons $x = \dfrac{\pi}{4} + h$. On cherche le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+h\right)$ (en la variable h) :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(h) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(h) &\underset{0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(h)+\cos(h)) \\ &\underset{0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + \mathrm{o}(h^4)\right) \\ &\underset{0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}h - \frac{\sqrt{2}}{4}h^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}h^3 + \frac{\sqrt{2}}{48}h^4 + \mathrm{o}(h^4)\end{aligned}$$

Or $h = x - \dfrac{\pi}{4}$ donc :

$$\boxed{\cos(x) \underset{\frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{48}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 + \mathrm{o}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right)}$$

3. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\mathrm{e}^{\frac{\sin(x)}{x}}$

On sait que $\sin(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)$ donc :

$$\mathrm{e}^{\frac{\sin(x)}{x}} \underset{0}{=} \mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\mathrm{o}(x^4)} \underset{0}{=} \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\mathrm{o}(x^4)}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + \mathrm{o}(x^4)\right) = 0$ et $\mathrm{e}^u \underset{0}{=} 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\mathrm{o}(x^4)} &\underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)^2 + \mathrm{o}(x^4) \\ &\underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{72} + \mathrm{o}(x^4) \\ &\underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{45} + \mathrm{o}(x^4)\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\frac{\sin(x)}{x}} \underset{0}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{6}x^2 + \frac{\mathrm{e}}{45}x^4 + \mathrm{o}(x^4)}$$

Commentaire

- La division par « x » dans « $\frac{\sin(x)}{x}$ » fait tomber l'ordre du développement limité d'une unité. C'est pourquoi il faut développer le sinus à l'ordre 5.
- L'*ordre de grandeur* de $-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathrm{o}(x^4)$ est « x^2 » donc il suffit de développer l'exponentielle à l'ordre 2.

4. $\mathrm{DL}_2(3)$ de $\dfrac{1}{x}$

Posons $x = 3 + h$. On cherche le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\dfrac{1}{3+h}$ (en la variable h). On a :

$$\frac{1}{3+h} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+\frac{h}{3}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{h}{3} = 0$$

donc :

$$\frac{1}{3+h} \underset{0}{=} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{h}{3} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 + \mathrm{o}(h^2)\right) \underset{0}{=} \frac{1}{3} - \frac{h}{9} + \frac{h^2}{27} + \mathrm{o}(h^2)$$

Or $h = x - 3$ donc :

$$\boxed{\frac{1}{x} \underset{3}{=} \frac{1}{3} - \frac{x-3}{9} + \frac{(x-3)^2}{27} + \mathrm{o}\big((x-3)^2\big)}$$

5. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{x-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ tandis que la fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc (par composition) la fonction $x \longmapsto \arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ (notée f) est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad f'(x) = \frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2 + x^2} = -\frac{1}{1 + 2x^2 - 2x}$$

Déterminons le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f'. Comme $\lim\limits_{x \to 0} (2x^2 - 2x) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &\underset{0}{=} -\big(1 - (2x^2 - 2x) + (2x^2 - 2x)^2 + \mathrm{o}(x^2)\big) \underset{0}{=} -\big(1 - 2x^2 + 2x + 4x^2 + \mathrm{o}(x^2)\big) \\ &\underset{0}{=} -1 - 2x - 2x^2 + \mathrm{o}(x^2) \end{aligned}$$

Finalement, $f(x) \underset{0}{=} f(0) - x - x^2 - \dfrac{2}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$. Comme $f(0) = \arctan(0) = 0$, on a finalement :

$$\boxed{f(x) \underset{0}{=} -x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3)}$$

6. $\mathrm{DL}_2(1)$ de $\sqrt{x + \sqrt{x}}$

Soit $f : x \longmapsto \sqrt{1 + \sqrt{x}}$. Posons $x = 1 + h$. On cherche le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(1+h)$. On sait que :

$$\sqrt{1+h} \underset{0}{=} 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \mathrm{o}(h^2)$$

donc :

$$f(1+h) = \sqrt{1 + h + \sqrt{1+h}} \underset{0}{=} \sqrt{2 + \frac{3h}{2} - \frac{h^2}{8} + \mathrm{o}(h^2)} \underset{0}{=} \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{3h}{4} - \frac{h^2}{16} + \mathrm{o}(h^2)}$$

Comme $\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{3h}{4} - \dfrac{h^2}{16} + \mathrm{o}(h^2)\right) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{3h}{4} - \frac{h^2}{16} + \mathrm{o}(h^2)} &\underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3h}{4} - \frac{h^2}{16}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{3h}{4} - \frac{h^2}{16}\right)^2 + \mathrm{o}(h^2) \\ &\underset{0}{=} 1 + \frac{3h}{8} - \frac{h^2}{32} - \frac{9h^2}{128} + \mathrm{o}(h^2) \\ &\underset{0}{=} 1 + \frac{3h}{8} - \frac{13h^2}{128} + \mathrm{o}(h^2) \end{aligned}$$

Ainsi, $f(1+h) \underset{0}{=} \sqrt{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{8}h - \dfrac{13\sqrt{2}}{128}h^2 + \mathrm{o}(h^2)$ et comme $h = x - 1$, on a finalement :

$$\boxed{\sqrt{x + \sqrt{x}} \underset{1}{=} \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{8}(x-1) - \frac{13\sqrt{2}}{128}(x-1)^2 + \mathrm{o}\big((x-1)^2\big)}$$

Exercice 17 (C12) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan(x) \leqslant x$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction arctangente est continue sur le segment $[0, x$ et dérivable sur $]0, x$ (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$). D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc $c \in]0, x[$ tel que :
   $$\arctan(x) - \arctan(0) = \arctan'(c)(x-0) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \arctan(x) = \frac{x}{1+c^2}$$
   Or $c \in [0, x]$ donc $1 \leqslant 1 + c^2 \leqslant 1 + x^2$ puis $1 \leqslant \dfrac{1}{1+c^2} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. En multipliant par $x \geqslant 0$, on obtient :
   $$\frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{x}{1+c^2} \leqslant x$$
   Finalement :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan(x) \leqslant x}$$

2. Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $|\tan(x)| \geqslant |x|$
   Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. L'inégalité étant évidente pour $x = 0$, on se place dans le cas où $x \neq 0$. La fonction tangente est continue sur le segment $[\min(0, x), \max(0, x)]$ et dérivable sur $]\min(0, x), \max(0, x)[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]\min(0, x), \max(0, x)[$ tel que :
   $$\tan(x) - \tan(0) = \tan'(c)(x-0) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \tan(x) = (1 + \tan(c)^2)x$$
   Comme $1 + \tan(c)^2 \geqslant 0$, on a :
   $$|\tan(x)| = (1 + \tan(c)^2)|x|$$
   Or $1 + \tan(c)^2 \geqslant 1$ et $|x| \geqslant 0$ donc $(1 + \tan(c)^2)|x| \geqslant |x|$. Ainsi :
   $$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad |\tan(x)| \geqslant |x|}$$

3. Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_-)^2$, $|\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b| \leqslant |a - b|$
   Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_-)^2$. L'inégalité à établir est claire pour $a = b$. On suppose maintenant que $a \neq b$. La fonction exponentielle est continue sur le segment $[\min(a, b), \max(a, b)]$ et dérivable sur $]\min(a, b), \max(a, b)[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc $c \in]\min(a, b), \max(a, b)[$ tel que $\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^c(a - b)$. En prenant les valeurs absolues, on obtient (puisque $\mathrm{e}^c \geqslant 0$) :
   $$|\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b| = \mathrm{e}^c\,|a - b|$$
   Or $c \in]\min(a, b), \max(a, b)[$ et $(a, b) \in (\mathbb{R}_-)^2$ donc $c \leqslant 0$. Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^c \leqslant 1$. En multipliant par $|a - b| \geqslant 0$, il vient $\mathrm{e}^c\,|a - b| \leqslant |a - b|$. Finalement :
   $$\boxed{\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_-)^2, \qquad |\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b| \leqslant |a - b|}$$

Exercice 18 (C2-C6-C8-C9-C10) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Par la suite, on notera encore f ce prolongement.
   La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ (car il s'agit de la fonction nulle). Par ailleurs, la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction f est donc continue sur $]0, +\infty[$.
   On a $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{-1/x} = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ par composition des limites. De plus $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$. On en déduit que f admet une limite en 0 qui vaut 0. On peut donc prolonger la fonction f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Finalement :

$$\boxed{\text{en posant } f(0)=0, \text{ la fonction } f \text{ est alors continue sur } \mathbb{R}}$$

2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? La courbe représentative de f admet-elle une tangente au point d'abscisse 0 ? Si oui, en donner une équation.
La fonction nulle est dérivable sur $]-\infty,0[$ (elle l'est sur $\mathbb{R}$) donc f est dérivable sur $]-\infty,0[$. De plus, les fonctions $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ et exponentielle sont dérivables sur $]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}$ respectivement donc (par composition) la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$. On obtient donc que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et il reste à étudier la dérivabilité de f en 0.
Par composition des limites et croissances comparées on a (puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}(1/x)=0$) :
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x}=\lim_{X\to+\infty}X\,\mathrm{e}^{-X}=0$$
On en déduit que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0)=0$. Par ailleurs, comme f est la fonction nulle sur $]-\infty,0[$, on a :
$$\forall x\in]-\infty,0[,\qquad \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0 \qquad \text{et donc} \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}0=0$$
Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=0=f'_d(0)$. On en conclut donc que f est dérivable en 0 avec $f'(0)=f'_g(0)=f'_d(0)=0$. Finalement :
$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ (et } f'(0)=0)}$$
Comme f est dérivable en 0 :
$$\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C}_f \text{ présente une tangente au point d'abscisse 0 d'équation } y=f'(0)x+f(0)=x}$$

3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^2} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$ et $f'(0)=0$. Par composition et produit, f' est continue sur $]0,+\infty[$. De même, f' est continue sur $]-\infty,0[$ (en tant que fonction nulle). Il reste à étudier la continuité de f' en 0. On a $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}0=0=f'(0)$ et (par composition des limites et croissances comparées) :
$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^2}=\lim_{X\to+\infty}X^2\,\mathrm{e}^{-X}=0=f'(0)$$
Comme f' est continue à droite et à gauche en 0, elle est continue en 0. Finalement :
$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

Exercice 19 (C2-C8) On considère la fonction :

$$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin(x)$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = 2^n \,\mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$$

On sait que les fonctions sinus, exponentielle et $x \longmapsto x\sqrt{3}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par composition et produit, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$. Déterminons les expressions des dérivées successives de f à l'aide d'un raisonnement par récurrence (simple). Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f^{(n)}(x) = 2^n \,\mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$ ».

- **Initialisation :** on sait que $f^{(0)} = f$ et la formule proposée correspond à l'expression de f donc la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$. Comme $\mathcal{P}_n$ est vraie, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = 2^n \,\mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$$

Or $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$ donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n+1)}(x) &= 2^n\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right) + 2^n \,\mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \cos\left(x + \frac{n\pi}{6}\right) \\ &= 2^n \,\mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)\right)\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{6}\right) &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\sin\left(x + \frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

donc on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1} \,\mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{6}\right)$$

ce qui établit la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$.

- **Conclusion :** pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple.

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = 2^n \,\mathrm{e}^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)}$$

Exercice 20 (C2-C8) On considère la fonction $G : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n de degré n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n(x)G(x)$$

On utilise un raisonnement par récurrence. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « il existe un polynôme P_n de degré n tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $G^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n(x)G(x)$ ».

- **Initialisation :** on a $G^{(0)} = G$. En notant P_0 le polynôme constant égale à 1, alors P_0 est de degré 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $G^{(0)}(x) = \mathrm{P}_0(x)G(x)$. La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $G^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n(x)G(x)$ où P_n est un polynôme de degré n. Par produit et composition, la fonction $G^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G^{(n+1)}(x) = \left(G^{(n)}\right)'(x) = \mathrm{P}_n'(x)G(x) - 2x\,\mathrm{P}_n(x)G(x) &= (\mathrm{P}_n'(x) - 2x\,\mathrm{P}_n(x))G(x)\\ &= \mathrm{P}_{n+1}(x)G(x)\end{aligned}$$

  en posant $\mathrm{P}_{n+1} = -2X\,\mathrm{P}_n + \mathrm{P}_n'$. On sait que la dérivée d'un polynôme et que le produit et une somme de polynômes sont des polynômes donc P_{n+1} est un polynôme. Par ailleurs :

$$\deg(\mathrm{P}_n') \leqslant \deg(\mathrm{P}_n) - 1 = n - 1 \qquad \text{tandis que} \qquad \deg(-2X\,\mathrm{P}_n) = \deg(-2X) + \deg(\mathrm{P}_n) = n + 1$$

  En particulier $\deg(\mathrm{P}_n') \neq \deg(-2X\,\mathrm{P}_n)$ donc :

$$\deg(\mathrm{P}_{n+1}) = \max(\deg(\mathrm{P}_n'), \deg(-2X\,\mathrm{P}_n)) = n + 1$$

  La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.
- **Conclusion :** pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple.

Finalement :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe } \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré } n \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on ait } G^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n(x)G(x)}$$

Exercice 21 (C7-C11) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

   La fonction f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ comme l'inverse d'une fonction continue (la fonction cosinus) qui ne s'annule pas.

   Étudions les variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. La fonction f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \qquad f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$$

   donc :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right], \qquad f'(x) > 0 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 0$$

   La fonction f est donc strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$
f	1 $\nearrow$	$\sqrt{2}$

   D'après le théorème de la bijection :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur l'intervalle } J = \left[1, \sqrt{2}\right]}$$

2. Que peut-on dire de f^{-1} ? Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.

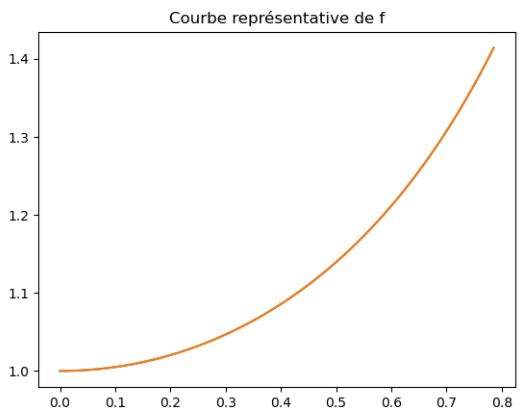
D'après le théorème de la bijection, la fonction f^{-1} est continue et strictement croissante sur J.

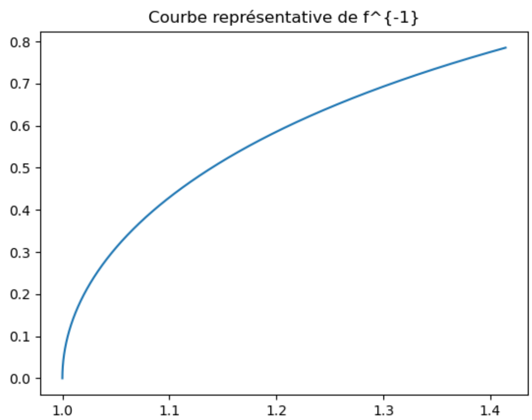
x	1		$\sqrt{2}$
f^{-1}	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$

On sait que les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On trace la courbe représentative de f sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ puis avec `plot(Y,X)` la courbe représentative de f^{-1} :

```
from math import *
def f(x) :
        return 1/cos(x)
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X=np.linspace(0,pi/4,1000)
Y=[f(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.title("Courbe représentative de f")
plt.show()
```





3. Justifier que :

$$\forall x \in J, \qquad \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Soit $x \in J$. On sait que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$ donc en particulier $f(f^{-1}(x)) = x$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{\cos(f^{-1}(x))}$ et donc $\cos(f^{-1}(x)) = \dfrac{1}{x}$. De plus :

$$\sin(f^{-1}(x))^2 = 1 - \cos(f^{-1}(x))^2 = 1 - \frac{1}{x^2} \qquad \text{et donc} \qquad |\sin(f^{-1}(x))| = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Or $f^{-1}(x) \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ donc $\sin(f^{-1}(x)) \geqslant 0$ et $|\sin(f^{-1}(x))| = \sin(f^{-1}(x))$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in J, \qquad \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Soit $y \in J$. Il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$. D'après le théorème de dérivabilité d'une réciproque, on sait que :

$$\begin{aligned} f^{-1} \text{ est dérivable en } y \iff \left\{ \begin{array}{c} f \text{ est dérivable en } x \\ f'(x) \neq 0 \end{array} \right. & \iff f'(x) \neq 0 \qquad \text{car on sait que } f \text{ est dérivable sur } I \\ & \iff x \neq 0 \\ & \iff y \neq 1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \setminus \{1\} = \left]1, \sqrt{2}\right]}$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in J \setminus \{1\}, \qquad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{\cos(f^{-1}(x))^2}{\sin(f^{-1}(x))} &= \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} \times |x| \\ &= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{car } x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \in J \setminus \{1\}, \text{ on a } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$.

Exercice 22 (C2-C8) *Les questions* 1. *et* 2. *sont indépendantes.*

1. Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \arctan(x) + 2\arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$$

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.

La fonction $x \longmapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2+1 > 0$, ce qui est toujours vérifié. Autrement dit, cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme les fonctions $x \longmapsto -x$ et arctangente sont dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut conclure par sommes et composition que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 2 \times \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1}{1 + \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2} &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{2\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(2x^2+2-2x\sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= \frac{1}{x^2+1} + \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1-x\sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= \frac{1}{x^2+1} + \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} \\ &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } f'(x) = 0}$.

(b) En déduire une expression plus simple de f.

La dérivée de f est nulle sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$. Comme :

$$f(0) = \arctan(0) + 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$$

on peut conclure que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \arctan(x) + 2\arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \frac{\pi}{2}}$$

2. On veut montrer que :
$$\forall x \in]-1,1[, \qquad 2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

(a) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, on a $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan(x)^2}$.

Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$. Alors $(x, 2x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[^2$ donc en particulier $(x, 2x) \in \mathcal{D}_{\tan}^2$ ce qui implique que les nombres $\tan(x)$ et $\tan(2x)$ sont bien définis. De plus :
$$\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)^2 - \sin(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 \times \frac{2\sin(x)}{\cos(x)}}{\cos(x)^2\left(1 - \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2\right)} = \frac{2\tan(x)}{1-\tan(x)^2}$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[, \text{ on a } \tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan(x)^2}}$.

(b) En déduire l'égalité annoncée.

Soit $x \in]-1,1[$. La fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\arctan(x) \in]\arctan(-1), \arctan(1)[$, c'est-à-dire $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$. On peut donc appliquer la question 2.(a) au nombre $\arctan(x)$ et on a :
$$\tan(2\arctan(x)) = \frac{2\tan(\arctan(x))}{1-\tan(\arctan(x))^2} = \frac{2x}{1-x^2}$$
car $\tan \circ \arctan = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Or $\arctan \circ \tan = \mathrm{Id}_{]-\pi/2, \pi/2[}$ donc on obtient en composant par arctan :
$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad 2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)}$$

Exercice 23 (C1-C2-C7-C8-C11) On considère la fonction *cosinus hyperbolique*, notée ch, définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1. (a) La fonction ch est-elle bijective si on choisit $\mathbb{R}$ comme domaine de définition ? Montrer que ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à préciser. Sa fonction réciproque est notée dans la suite argch.

On remarque que la fonction ch est paire sur $\mathbb{R}$ (car $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$). On a en particulier $\mathrm{ch}(-1) = \mathrm{ch}(1)$ et $-1 \neq 1$ donc ch n'est pas une fonction injective sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle n'y est donc pas bijective.

La fonction ch est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont.

Étudions les variations de ch sur $\mathbb{R}_+$. La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \mathrm{ch}'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$
donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a en utilisant la stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\begin{aligned} \mathrm{ch}'(x) > 0 \iff \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} > 0 \iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 0 &\iff \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^{-x} \\ &\iff x > -x \\ &\iff 2x > 0 \iff x > 0 \end{aligned}$$

La dérivée de la fonction ch est donc strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ sauf en 0 où elle s'annule donc la fonction ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a le tableau de variations suivant (la limite en $+\infty$ est immédiate).

x	0	$+\infty$
ch	1	$+\infty$

D'après le théorème de la bijection :

$$\boxed{\text{la fonction ch réalise une bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ sur } \mathrm{ch}(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[}$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathrm{ch}'(x)^2 = \mathrm{ch}(x)^2 - 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a d'une part :

$$\mathrm{ch}'(x)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} - 2}{4}$$

et d'autre part :

$$\mathrm{ch}(x)^2 - 1 = \left(\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2}{4} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} - 2}{4}$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \mathrm{ch}'(x)^2 = \mathrm{ch}(x)^2 - 1}$$

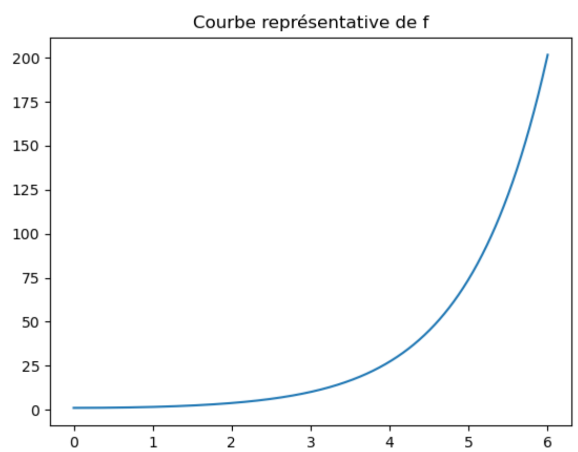
2. Déterminer le tableau de variations de argch et proposer une représentation graphique de cette fonction.

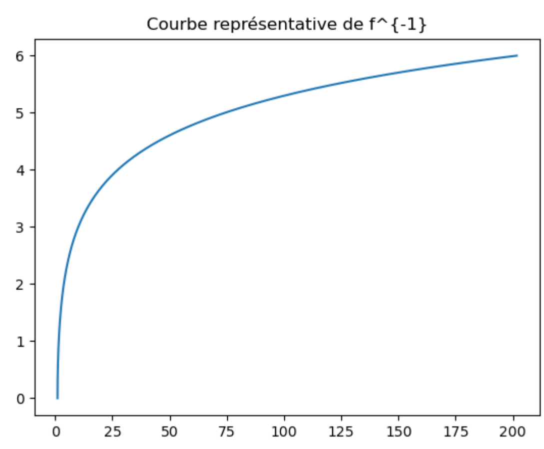
D'après le théorème de la bijection, on sait que la fonction argch est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

x	1	$+\infty$
argch	0 $\nearrow$	$+\infty$

On sait de plus que les courbes représentatives des fonctions ch et argch sont symétriques par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire par rapport à la droite d'équation $y = x$), donc on commence par tracer la courbe représentative de ch, puis on demande `plot(Y,X)` pour avoir la courbe représentative de argch.

```
from math import *
def f(x) :
        return (exp(x)+exp(-x))/2
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X=np.linspace(0,6,1000)
Y=[f(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.title("Courbe représentative de ch")
plt.show()
```





3. Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}$ de argch et montrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \qquad \operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Soit $y \in [1, +\infty[$. Il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \operatorname{ch}(x)$. D'après le théorème de dérivabilité d'une réciproque, on sait que :

$$\begin{aligned} \text{la fonction argch est dérivable en } y &\iff \begin{cases} \text{la fonction ch est dérivable en } x \\ \operatorname{ch}'(x) \neq 0 \end{cases} \\ &\iff x \in \mathbb{R}_+^* \\ &\iff y \in]1, +\infty[\end{aligned}$$

car on sait que la fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que sa dérivée est nulle en 0 uniquement. Ainsi :

$$\boxed{\text{le domaine de dérivabilité de la fonction argch est } \mathcal{D} =]1, +\infty[}$$

Soit $y \in]1, +\infty[$. Alors :

$$\operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{argch}(y))}$$

D'après la question 1.(b), on a $\operatorname{ch}'(\operatorname{argch}(y))^2 = \operatorname{ch}(\operatorname{argch}(y))^2 - 1 = y^2 - 1$ car $\operatorname{ch} \circ \operatorname{argch} = \mathrm{Id}_{[1,+\infty[}$. En prenant la racine carrée, on obtient $|\operatorname{ch}'(\operatorname{argch}(y))| = \sqrt{y^2-1}$. Or la fonction ch' est positive ou nulle (*cf.* question 1.(a)) donc $|\operatorname{ch}'(\operatorname{argch}(y))| = \operatorname{ch}'(\operatorname{argch}(y))$. Finalement :

$$\boxed{\forall y \in \mathcal{D}, \qquad \operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}}$$

4. Montrer enfin que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad \operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

La fonction $x \longmapsto x^2 - 1$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ tandis que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition (et somme), la fonction $x \longmapsto x + \sqrt{x^2-1}$ est dérivable en tout $x \in [1, +\infty[$ tel que $x^2 - 1 > 0$ c'est-à-dire sur $]1, +\infty[$. Cette fonction est alors à valeurs dans $]1, +\infty[$ où la fonction ln est dérivable donc (par composition) la fonction $f : x \longmapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \qquad f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

On a donc :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \qquad f'(x) = \operatorname{argch}'(x)$$

On en déduit donc que la fonction $f - \operatorname{argch}$ est constante sur l'intervalle $]1, +\infty[$:

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]1, +\infty[, \qquad f(x) = \operatorname{argch}(x) + C \tag{2.2}$$

Or $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \ln(1) = 0$ et :

$$\lim_{x \to 1^+} \operatorname{argch}(x) = 0 \qquad \text{car} \qquad \lim_{y \to 0} \operatorname{ch}(y) = 1$$

En faisant tendre x vers 1^+ dans (2.2), on obtient $C = 0$. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a donc $f(x) = \operatorname{argch}(x)$ et la formule reste valable pour $x = 1$ car $f(1) = \operatorname{argch}(1) = 0$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[, \qquad \operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}$$

Commentaire

Pour répondre à cette dernière question, on peut aussi (mais c'est plus long) chercher directement l'expression de argch en résolvant (pour $y \in [1, +\infty[$ fixé) l'équation $y = \mathrm{ch}(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 24 (C7-C11-C13) Soit f l'application définie sur $]-1, +\infty[$ d'expression $f(x) = x^2 + \ln(x+1)$.

1. Montrer que f est une application bijective de $]-1, +\infty[$ sur un intervalle à préciser. On note φ l'application réciproque. Déterminer le tableau de variation de φ.
   La fonction f est continue sur $]-1, +\infty[$ par somme et composition de fonctions continues.
   Par comme et composition, la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et :

   $$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad f'(x) = 2x + \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x+1}$$

   Le trinôme $2x^2 + 2x + 1$ a un discriminant strictement négatif et son coefficient dominant est positif. Ce trinôme est donc toujours strictement positif, de même que la dérivée de f sur l'intervalle $]-1, +\infty[$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$. On a le tableau de variation suivant (les limites sont immédiates) :

x	-1		$+\infty$
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

   D'après le théorème de la bijection, on peut conclure que :

   $$\boxed{\text{la fonction } f \text{ réalise une bijection de l'intervalle }]-1, +\infty[\text{ sur } f(]-1, +\infty[) = \mathbb{R}}$$

   et le tableau de variations de $\varphi = f^{-1}$ est :

x	$-\infty$		$+\infty$
φ	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $f'(x) \neq 0$ (même $f'(x) > 0$). D'après le théorème de dérivabilité d'une réciproque, on sait que :

   $$\boxed{\text{la fonction } \varphi = f^{-1} \text{ est dérivable sur } f(]-1, +\infty[) = \mathbb{R}}$$

3. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f puis en déduire celui de φ.

On sait que $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$ donc :

$$\boxed{\text{le } \mathrm{DL}_3(0) \text{ de } f \text{ est } f(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)}$$

On commence par justifier l'existence d'un $\mathrm{DL}_3(0)$ pour la fonction φ en montrant qu'elle est de classe $\mathcal{C}^3$ dans un voisinage de 0 (et en appliquant le théorème de Taylor-Young). On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi'(x) = \dfrac{1}{f'(\varphi(x))}$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1,+\infty[$ où la fonction f' est dérivable (la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition). De plus, la fonction $f' \circ \varphi$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc (par composition et quotient) la fonction φ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'' = -\dfrac{\varphi' \times f'' \circ \varphi}{(f' \circ \varphi)^2}$. On observe à nouveau que la fonction φ'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par produit, quotient et composition) et que φ''' est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, le théorème de Taylor-Young implique l'existence d'un $\mathrm{DL}_3(0)$ pour la fonction φ. Il existe donc $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\varphi(y) \underset{0}{=} a + by + cy^2 + dy^3 + \mathrm{o}(y^3) \tag{2.3}$$

On remarque que $f(0) = 0$ donc $\varphi(0) = 0$. D'après le théorème de Taylor-Young, on a donc $a = f(0) = 0$. On sait que $\varphi \circ f = \mathrm{Id}_{]-1,+\infty[}$ donc comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, on peut remplacer y par $f(x)$ dans (2.3) et on obtient :

$$x \underset{0}{=} bf(x) + cf(x)^2 + df(x)^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

et donc, en utilisant le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f précédemment obtenu, il vient :

$$\begin{aligned} x &\underset{0}{=} b\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + c\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2 + d\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^3 + \mathrm{o}(x^3) \\ &\underset{0}{=} b\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + c\left(x^2 + x^3\right) + dx^3 + \mathrm{o}(x^3) \\ &\underset{0}{=} bx + \left(\frac{b}{2} + c\right)x^2 + \left(\frac{b}{3} + c + d\right)x^3 + \mathrm{o}(x^3) \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a donc :

$$\begin{cases} b = 1 \\ \dfrac{b}{2} + c = 0 \\ \dfrac{b}{3} + c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 \\ c = -\dfrac{1}{2} \\ d = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{\text{le } \mathrm{DL}_3(0) \text{ de } \varphi \text{ est } \varphi(y) \underset{0}{=} y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \mathrm{o}(y^3)}$$

4. Montrer que $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{t}$.

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}\right) = 1$$

par croissances comparées. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$ donc (par composition des limites), il vient :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(\varphi(t))}{\varphi(t)^2} = 1 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\varphi(t)^2} = 1$$

Autrement dit $\varphi(t)^2 \underset{t\to+\infty}{\sim} t$. Comme la fonction φ est à valeurs positives au voisinage de $+\infty$, on obtient finalement :

$$\boxed{\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{t}}$$

Exercice 25 (C14) 1. Soit la fonction :

$$f : x \longmapsto \sqrt{x^2+3x+2}$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f puis le $\mathrm{DL}_1(+\infty)$ de f. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ et préciser les positions relatives.

Notons $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff x^2+3x+2 \geqslant 0 \iff x \in]-\infty, -2] \cup [-1, +\infty[$$

On donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, -2] \cup [-1, +\infty[}$.

On pose $x = \dfrac{1}{h}$ et on cherche le $\mathrm{DL}_1(0^+)$ de $f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ (en la variable h). On a :

$$\forall h > 0, \qquad f\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{\frac{1}{h^2}+\frac{3}{h}+2} = \frac{\sqrt{1+3h+2h^2}}{|h|} = \frac{\sqrt{1+3h+2h^2}}{h} \tag{2.4}$$

puisque $h > 0$. Comme $\lim\limits_{h\to 0}(3h+h^2) = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+3h+2h^2} &\underset{0}{=} 1+\frac{1}{2}\left(3h+2h^2\right)-\frac{1}{8}\left(3h+2h^2\right)^2+\mathrm{o}(h^2)\\ &\underset{0}{=} 1+\frac{3}{2}h+h^2-\frac{9}{8}h^2+\mathrm{o}(h^2)\\ &\underset{0}{=} 1+\frac{3}{2}h-\frac{h^2}{8}+\mathrm{o}(h^2)\end{aligned}$$

et donc (d'après (2.4)) $f\left(\dfrac{1}{h}\right) \underset{0}{=} \dfrac{1}{h}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{h}{8}+\mathrm{o}(h)$. Or $h = \dfrac{1}{x}$ donc :

$$\boxed{f(x) \underset{+\infty}{=} x+\frac{3}{2}-\frac{1}{8x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

On a $f(x)-\left(x+\dfrac{3}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{8x}$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(x+\frac{3}{2}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{8x} = 0$$

La droite Δ d'équation $y = x+\dfrac{3}{2}$ est donc asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. Comme de plus $-\dfrac{1}{8x} < 0$ pour tout $x > 0$, on en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de la droite Δ au voisinage de $+\infty$.

(b) La courbe $\mathcal{C}_f$ présente-t-elle une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$? Si oui, préciser les positions relatives.

On reprend le calcul précédent. Dans (2.4), on a $|h| = -h$ (car si x tend vers $-\infty$, alors x tend vers 0^-). On obtient alors le $\mathrm{DL}_1(-\infty)$ de f suivant :

$$f(x) \underset{-\infty}{=} -x-\frac{3}{2}+\frac{1}{8x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On obtient donc que la droite Δ' d'équation $y = -x-\dfrac{3}{2}$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et que $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de Δ' dans ce voisinage (car $1/(8x) < 0$ si $x < 0$).

2. Reprendre la question 1. avec la fonction $g : x \longmapsto x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

On note $\mathcal{D}_g$ le domaine de définition de g. L'expression de g est $\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathcal{D}_g \iff 1+\frac{1}{x} > 0 \iff \frac{x+1}{x} > 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x+1}{x}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_g =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[}$.

Déterminons maintenant le $\mathrm{DL}_1(+\infty)$ de g. On pose $x = \frac{1}{h}$ et on cherche le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $g\left(\frac{1}{h}\right)$ (en la variable h). On a :

$$\forall h > 0, \qquad g\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h}(1+h)^{1+h} = \frac{1}{h}\,\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+h)}{h}}$$

On sait que $\ln(1+h) \underset{0}{=} h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \mathrm{o}(h^3)$ donc :

$$g\left(\frac{1}{h}\right) \underset{0}{=} \frac{1}{h}\,\mathrm{e}^{1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+\mathrm{o}(h^2)} \underset{0}{=} \frac{\mathrm{e}}{h}\,\mathrm{e}^{-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+\mathrm{o}(h^2)}$$

Or $\lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+\mathrm{o}(h^2)\right)$ et $\mathrm{e}^u \underset{0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+\mathrm{o}(u^2)$ donc :

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{h}\right) &\underset{0}{=} \frac{\mathrm{e}}{h}\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+\frac{1}{2}\left(-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}\right)^2+\mathrm{o}(h^2)\right) \underset{0}{=} \frac{\mathrm{e}}{h}\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+\frac{h^2}{8}+\mathrm{o}(h^2)\right) \\ &\underset{0}{=} \frac{\mathrm{e}}{h} - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{11\,\mathrm{e}}{24}h + \mathrm{o}(h) \end{aligned}$$

Comme $h = \frac{1}{x}$, on a finalement le $\mathrm{DL}_1(+\infty)$ de f :

$$\boxed{g(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{e}\,x - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{11\,\mathrm{e}}{24x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad \text{et de même} \qquad \boxed{f(x) \underset{-\infty}{=} \mathrm{e}\,x - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{11\,\mathrm{e}}{24x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

On a $g(x) - \left(\mathrm{e}\,x - \frac{\mathrm{e}}{2}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{11\,\mathrm{e}}{24x}$. Donc :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(g(x) - \left(\mathrm{e}\,x - \frac{\mathrm{e}}{2}\right)\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{11\,\mathrm{e}}{24x} = 0$$

donc la droite Δ d'équation $y = \mathrm{e}\,x - \frac{\mathrm{e}}{2}$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_g$ au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$. De plus $\frac{11\,\mathrm{e}}{24x} > 0$ si $x > 0$ et $\frac{11\,\mathrm{e}}{24x} < 0$ si $x < 0$ donc Δ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$ au voisinage de $+\infty$ et au-dessus au voisinage de $-\infty$.

Exercice 26 (C4-C6-C8) 1. Justifier que la fonction $g : t \longmapsto \dfrac{t^2}{t^2+\sin(t)^2}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ puis montrer qu'elle est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note encore g la fonction ainsi prolongée.

Montrons que la domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :

$$t \in \mathcal{D}_g \iff t^2 + \sin(t)^2 \neq 0$$

On sait qu'une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun des nombres de la somme est nul donc :

$$t^2+\sin(t)^2 = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} t^2 = 0 \\ \sin(t)^2 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ \sin(t) = 0 \end{array}\right. \iff t = 0$$

On a donc :

$$t \in \mathcal{D}_g \iff t \neq 0 \iff t \in \mathbb{R}^*$$

Par conséquent, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions qui le sont. Déterminons maintenant la limite de la fonction g en 0. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$g(t) = \frac{t^2}{t^2\left(1+\frac{\sin(t)^2}{t^2}\right)} = \frac{1}{1+\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2}$$

On sait que $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$. On en déduit donc que $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = \dfrac{1}{2}$. On en déduit donc que :

$$\boxed{\text{on peut prolonger la fonction } g \text{ par continuité en 0 (et donc sur } \mathbb{R}\text{) en posant } g(0) = \frac{1}{2}}$$

2. On considère la fonction $G : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} g(t)\,\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction g est continue sur le segment $[\min(x,x^2), \max(x,x^2)]$ donc l'intégrale $G(x)$ est bien définie.

   En notant F la primitive de g s'annulant en 0, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad G(x) = F(x^2) - F(x)$$

   d'après la relation de Chasles. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$, de même pour la fonction carrée donc (par différence et composition) la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xg(x^2) - g(x)$$

   Les fonctions g, $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto 2x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc (par composition, produit et différence) la fonction G' est continue sur $\mathbb{R}$. Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } G \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

   (b) Démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \qquad g(t) \geqslant \frac{t^2}{t^2+1}$$

   Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Alors $\sin(t)^2 \leqslant 1$ donc $t^2 + \sin(t)^2 \leqslant t^2+1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient $\dfrac{1}{t^2+\sin(t)^2} \geqslant \dfrac{1}{t^2+1}$. En multipliant par $t^2 \geqslant 0$, on obtient le résultat souhaité :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^*, \qquad g(t) \geqslant \frac{t^2}{t^2+1}}$$

(c) En déduire que G admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.
Soit $x \in [1,+\infty[$. Alors $x \leqslant x^2$ (puisque $x^2 - x = x(x-1)$ et $x \geqslant 0$ et $x-1 \geqslant 0$). Pour tout $t \in [x, x^2]$, on a bien $t \neq 0$ donc (d'après la question 2.(b)), on a $g(t) \geqslant \dfrac{t^2}{t^2+1}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient (puisque $x \leqslant x^2$) :

$$\int_x^{x^2} g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{x^2} \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad G(x) \geqslant \int_x^{x^2} \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \tag{2.5}$$

Or :

$$\int_x^{x^2} \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \Big[t - \arctan(t)\Big]_x^{x^2} = x^2 - x - \arctan(x^2) + \arctan(x)$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, on a par composition des limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x^2) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$. Par somme, on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = +\infty$. D'après l'inégalité (2.5) et le théorème de comparaison, on peut conclure que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty}$$

Exercice 27 (C2-C4-C7-C8-C12) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \mathrm{e}$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n) \qquad \text{où} \qquad f : x \longmapsto \frac{x}{\ln(x)+1}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [1, \mathrm{e}]$.
On utilise un raisonnement par récurrence simple. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « $u_n \in [1,\mathrm{e}]$ ».
   - **Initialisation :** par hypothèse, on a $u_0 = \mathrm{e} \in [1,\mathrm{e}]$ donc la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$. La fonction f est dérivable sur $[1,\mathrm{e}]$ et :
   $$\forall x \in [1,\mathrm{e}], \qquad f'(x) = \frac{\ln(x) + 1 - x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x)+1)^2} = \frac{\ln(x)}{(\ln(x)+1)^2} \geqslant 0$$
   La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[1,\mathrm{e}]$. Par hypothèse de récurrence, on a $u_n \in [1,\mathrm{e}]$ donc :
   $$f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(\mathrm{e}) \qquad \text{donc} \qquad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2} \leqslant \mathrm{e}$$
   On a ainsi $u_{n+1} \in [1,\mathrm{e}]$ ce qui établit la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$.
   - **Conclusion :** pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple.

   Finalement, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \text{ on a } u_n \in [1,\mathrm{e}]}$.
2. Déterminer le maximum de la fonction $|f'|$ sur l'intervalle $[1,\mathrm{e}]$.
D'après la question 1., la fonction f' est positive ou nulle sur $[1,\mathrm{e}]$ donc :
$$\forall x \in [1,\mathrm{e}], \qquad |f'(x)| = f'(x) = \frac{\ln(x)}{(\ln(x)+1)^2}$$
La fonction f' est dérivable sur $[1,\mathrm{e}]$ et :
$$\begin{aligned}\forall x \in [1,\mathrm{e}], \qquad f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (\ln(x)+1)^2 - \frac{2\ln(x)}{x}(\ln(x)+1)}{(\ln(x)+1)^4} &= \frac{\ln(x) + 1 - 2\ln(x)}{x(\ln(x)+1)^3} \\ &= \frac{1 - \ln(x)}{x(\ln(x)+1)^3} \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$
car $x(\ln(x)+1)^3 > 0$ et $1 - \ln(x) \geq 0$ (puisque $x \in [1,\mathrm{e}]$ et par croissance de la fonction ln sur $[1,\mathrm{e}]$). On en déduit donc que la fonction $|f'| = f'$ est croissante sur $[1,\mathrm{e}]$. Donc :

$$\boxed{\text{le maximum de } |f'| \text{ sur } [1,\mathrm{e}] \text{ est atteint en e et vaut } f'(\mathrm{e}) = \frac{1}{4}}$$

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - 1|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est continue sur le segment $[1, u_n]$ et dérivable sur $]1, u_n[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]1, u_n[$ tel que :

$$f(u_n) - f(1) = f'(c)(u_n - 1) \qquad \text{et donc (puisque } f(1) = 1) \qquad u_{n+1} - 1 = f'(c)(u_n - 1)$$

En prenant les valeurs absolues, il vient $|u_{n+1} - 1| = |f'(c)|\,|u_n - 1|$. Or on sait que $c \in [1, \mathrm{e}]$ et que la fonction $|f'|$ est majorée par $\frac{1}{4}$ sur ce segment. En particulier, $|f'(c)| \leqslant \frac{1}{4}$. Or $|u_n - 1| \geqslant 0$ donc :

$$|f'(c)|\,|u_n - 1| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - 1|$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{|u_n - 1|}{4}}$$

4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
Un raisonnement par récurrence simple fournit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - 1| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - 1|$$

soit encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad -\left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - 1| \leqslant u_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - 1|$$

et enfin :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - 1| \leqslant u_n \leqslant 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - 1|$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 \pm \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 1$ (car $1/4 \in]-1, 1[$) donc (d'après le théorème des gendarmes) :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente de limite } 1}$$

Exercice 28 (C1-C7-C11) Soit t un nombre réel positif ou nul. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathrm{P}_t(x) = x^3 + tx - 1$$

1. Montrer que le polynôme P_t admet une unique racine réelle $u(t)$.
La fonction P_t est continue sur $\mathbb{R}$ (en tant que polynôme).
Étudions la monotonie stricte de P_t sur $\mathbb{R}$. La fonction P_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{P}_t'(x) = 3x^2 + t$$

Si $t > 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{P}_t'(x) \geqslant t > 0$ et si $t = 0$, alors la dérivée de P_t est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ et elle s'annule en 0. Dans les deux cas, la dérivée de P_t est strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points ou elle s'annule. Donc la fonction P_t est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Dressons le tableau de variation de P_t sur $\mathbb{R}$ (les limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont immédiates) :

x	$-\infty$	$+\infty$
P_t	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

On a de plus $0 \in \mathrm{P}_t(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection :

$$\boxed{\text{le polynôme } \mathrm{P}_t \text{ admet une unique racine } u(t) \text{ dans } \mathbb{R}}$$

2. On note u l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ qui, à tout nombre réel positif ou nul t, associe $u(t)$.

(a) Montrer que $u(\mathbb{R}_+) \subset]0,1]$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrons que $u(t) \in]0,1]$. On a $\mathrm{P}_t(0) = -1 < 0$ et $\mathrm{P}_t(1) = t \geqslant 0$. Par conséquent, $\mathrm{P}_t(0) < \mathrm{P}_t(u(t)) \leqslant \mathrm{P}_t(1)$ puisque $\mathrm{P}_t(u(t)) = 0$ par définition de $u(t)$. Comme la fonction P_t est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a bien $0 < u(t) \leqslant 1$. Autrement dit :

$$\boxed{u(\mathbb{R}_+) \subset]0,1]}$$

(b) Démontrer que la fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $(s,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $s < t$. Montrons que $u(s) > u(t)$. Pour tout $x \in]0,1]$, on a :

$$\mathrm{P}_t(x) - \mathrm{P}_s(x) = x^3 + tx - 1 - (x^3 + sx - 1) = (t-s)x > 0$$

car $t - s > 0$ et $x > 0$. Comme $u(s) \in]0,1]$, on obtient (en évaluant en $u(s)$) :

$$\mathrm{P}_t(u(s)) - \mathrm{P}_s(u(s)) > 0$$

Or $\mathrm{P}_s(u(s)) = 0$ donc $\mathrm{P}_t(u(s)) > 0$. Comme de plus $\mathrm{P}_t(u(t)) = 0$, on obtient :

$$\mathrm{P}_t(u(s)) > \mathrm{P}_t(u(t))$$

La fonction P_t est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $u(s) > u(t)$. Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+}$$

(c) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)$.

Indication : utiliser l'expression de $\mathrm{P}_t(u(t))$.

D'après la question 2.(a) et 2.(b), la fonction u est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et elle est minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, la fonction u admet une limite en $+\infty$. Notons ℓ cette limite, c'est-à-dire $\ell = \lim\limits_{t \to +\infty} u(t)$. On sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad 0 = \mathrm{P}_t(u(t)) = u(t)^3 + tu(t) - 1$$

et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad u(t) = \frac{1 - u(t)^3}{t}$$

Or la fonction $t \longmapsto 1 - u(t)^3$ admet une limite finie en $+\infty$ (qui vaut $1 - \ell^3$). D'après les propriétés sur les limites, on a donc :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0}$$

(d) Montrer que l'application u est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $]0,1]$, de réciproque la fonction :

$$v : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & \dfrac{1-y^3}{y} \end{array} \right.$$

La fonction v est bien définie car si $y \in]0,1]$, le nombre $\dfrac{1-y^3}{y}$ est bien défini et est positif ou nul car $y^3 \in]0,1]$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. On résout l'équation $v(y) = t$ d'inconnue $y \in]0,1]$:

$$\begin{aligned} v(y) = t \iff \frac{1-y^3}{y} = t \iff 1 - y^3 = ty &\iff y^3 + ty - 1 = 0 \\ &\iff \mathrm{P}_t(y) = 0 \\ &\iff y = u(t) \end{aligned}$$

d'après la question 1. et on a bien $u(t) \in]0,1]$ d'après la question 2.(a) car $t \in \mathbb{R}_+$. Donc t admet un unique antécédent par l'application v dans l'intervalle $]0,1]$ qui est $u(t)$. Par conséquent, la fonction v est bijective de réciproque la fonction $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow]0,1]$. Autrement dit :

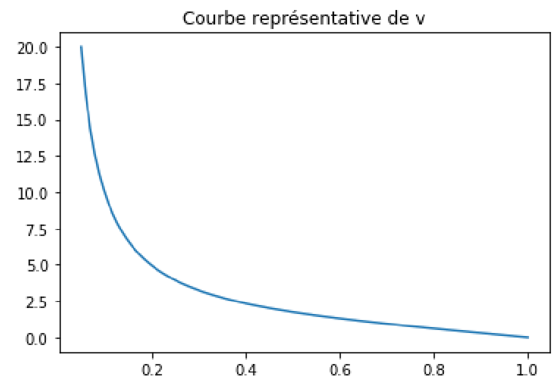
$\boxed{\text{l'application } u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow]0,1] \text{ est bijective de réciproque l'application } v}$

(e) Représenter graphiquement grâce au langage **python** la fonction v sur $]0,1]$.
En déduire la représentation graphique de la fonction u.
On commence par générer la fonction v.

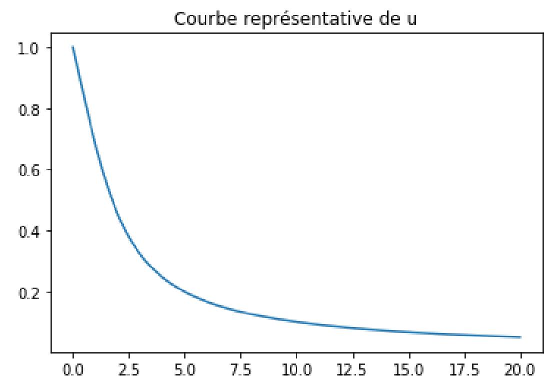
```
def v(y) :
    return (1-y**3)/y

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(0.05,1,100)
y = v(x)
plt.plot(x,y)
plt.title("Courbe représentative de v")
plt.show
```

On obtient ainsi la courbe représentative de v :



Comme u est la réciproque de la fonction v, on sait que leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Pour obtenir la courbe représentative de u, il suffit donc de remplacer `plt.plot(x,y)` par `plt.plot(y,x)`. On obtient la courbe suivante :



(f) Justifier que la fonction u est continue sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction v est continue sur l'intervalle $]0,1]$ comme quotient de fonctions continues sur $]0,1]$. On sait d'après la question 2.(d) que sa réciproque est la fonction $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow]0,1]$. D'après le théorème de la bijection :

$\boxed{\text{la fonction } u \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$

(g) Démontrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis déterminer une expression de $u'(t)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}_+$ et $u(t)$.

La fonction $v :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est dérivable sur $]0,1]$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0,1]$ et :

$$\forall y \in]0,1], \qquad v'(y) = \frac{-3y^3 - (1-y^3)}{y^2} = \frac{-2y^3 - 1}{y^2} \neq 0$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{la fonction réciproque } u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow]0,1] \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et : } \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad u'(t) = \frac{1}{v'(u(t))} = \frac{u(t)^2}{-2u(t)^3 - 1}}$$