

Soutien Séries - Correction de l'exercice supplémentaire

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on pose :

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2}.$$

On se propose de montrer que la série de terme général  $u_n$  converge et de calculer sa somme.

On pose, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1 :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad w_n = v_n - \ln(n).$$

On rappelle que  $v_n \sim \ln(n)$ .

1. Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge.

Comme  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , on a

$$u_n = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} \sim \frac{3}{n^3}.$$

On remarque que pour tout  $n \geq 1$ , on a  $0 \leq \frac{3}{n^3} \leq \frac{3}{n^2}$  par décroissance de la fonction inverse sur  $]0, +\infty[$ .

La série de  $\text{tg } \frac{3}{n^2}$  converge comme série usuelle, donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de  $\text{tg } \frac{3}{n^3}$  converge. De plus,  $\forall n \geq 1$ ,  $u_n \geq 0$  donc par critère des équivalents des séries à termes positifs, la série de  $\text{tg } u_n$  converge.

2. (a) On pose  $f : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$  définie pour  $x \in [0, 1]$ . Montrer que  $f$  est positive sur  $[0, 1]$ .

On pose  $f : x \mapsto -\frac{1}{x+1} + \ln(x+1) - \ln(x)$  sur  $]0, +\infty[$ .  $f$  est continue et dérivable sur  $]0, +\infty[$  comme somme et quotient de fonctions qui le sont, avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

On a pour  $x \in ]0, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x + x(x+1) - (x+1)^2}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{x + x^2 + x - (x^2 + 2x + 1)}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{-1}{x(x+1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est donc décroissante sur  $]0, +\infty[$ , or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0,$$

donc  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $f(x) \geq 0$ .

(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n - w_{n+1} \geq 0$ .

Soit  $n \geq 1$ , on calcule

$$\begin{aligned} w_n - w_{n+1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \ln(n+1) \\ &= -\frac{1}{n+1} - \ln(n) + \ln(n+1) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1/n}{1 + 1/n} \\ &= f\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

3. (a) On admet que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 \leq \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{2}x^2$ .

En déduire que  $w_n - w_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$ .

Soit  $n \geq 1$ , on a montré que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = w_n - w_{n+1}$$

donc par la question précédente appliquée avec  $x = \frac{1}{n}$  :

$$\frac{1}{2n^2} + \frac{2}{3n^3} \leq w_n - w_{n+1} \leq \frac{1}{2n^2}$$

et en divisant par  $\frac{1}{2n^2} > 0$  :

$$1 - \frac{4}{3n} \leq 2n^2(w_n - w_{n+1}) \leq 1$$

le théorème d'encadrement montre alors que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2(w_n - w_{n+1}) = 1,$$

donc  $w_n - w_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$ .

(b) Proposer un programme Python pour illustrer numériquement ce résultat.

On crée un programme qui calcule  $2n(w_n - w_{n+1})$  et on montre que pour  $n$  grand les valeurs sont proches de 1.

4. (a) Montrer que la série de terme général  $w_n - w_{n+1}$  est convergente.

La série est à terme général positif et équivalent au terme général d'une série de Riemann convergente car d'indice 2, donc par le critère des équivalents elle converge.

(b) En déduire que la suite  $(w_n)$  converge. On note  $\gamma$  sa limite.

On en déduit que la suite des sommes partielles définie par  $S_n = \sum_{k=1}^n (w_k - w_{k+1})$  converge, or on a :

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1}) = w_1 - w_n \Rightarrow w_n = w_1 - S_{n-1}$$

et la suite  $(w_n)$  converge.

5. (a) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

Par identification, on trouve :

$$u_n = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}$$

- (b) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \frac{1}{2}v_n - 1$ .

On a

$$\frac{1}{2}v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2}v_n = \sum_{i=2}^{2n+1} \frac{1}{i} = v_{2n+1} - 1$$

En effet, on a ajouté la somme des inverses des entiers pairs compris entre 2 et  $2n$  et la somme des inverses des entiers impairs compris entre 3 et  $2n+1$ , donc on a la somme des inverses de tous les entiers compris entre 2 et  $2n+1$ .

- (c) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \frac{6n}{n+1}$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{6}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{24}{2k+1} \right) \text{ par question 5a} \\ &= 6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 6 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 24 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \\ &= 6v_n + 6(v_{n+1} - 1) - 24(v_{2n+1} - \frac{1}{2}v_n - 1) \text{ par question 5b} \\ &= 12v_n + \frac{6}{n+1} - 6 - 24v_{2n+1} + 12v_n + 24 \\ &= 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \frac{6n}{n+1} \end{aligned}$$

6. En utilisant la convergence de la suite  $(w_n)$ , calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  en fonction de  $\ln 2$ .

En utilisant  $(w_n)$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - v_{2n+1}) = \lim \left( w_n - w_{2n+1} + \ln \left( \frac{n}{2n+1} \right) \right) = \gamma - \gamma - \ln 2 = -\ln 2$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -24 \ln 2 + 18.$$