
Soutien - Séries numériques

Compétences à acquérir :

- ▷ C1 : Connaître les séries usuelles :
 - série géométrique et ses dérivées
 - série exponentielle (et ses variantes avec changements d'indices)
 - séries de terme général $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$
- ▷ C2 : Calculer la somme d'une série comme combinaison linéaire des séries usuelles.
- ▷ C3 : Démontrer la convergence d'une série et calculer sa somme à l'aide d'une somme télescopique.
- ▷ C4 : Démontrer la convergence ou la divergence d'une série à termes positifs par critère des équivalents ou de comparaison
- ▷ C5 : Utiliser la convergence absolue d'une série pour montrer sa convergence.

Exercice 1  Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants et calculer leur valeur quand c'est possible :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3 \times 2^n}{(n+1)!}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3n-1}{3^n}$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\cos(n)}{2^{n+1}}$

5. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\cos(n) + 1}{n!}$

6. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$

Séries numériques - Exercice supplémentaire

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose : $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2}$. On se propose de montrer que la série de terme général u_n converge et de calculer sa somme. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad w_n = v_n - \ln(n).$$

On rappelle que $v_n \sim \ln(n)$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
- 2.(a) On pose $f : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ définie pour $x \in [0, 1]$. Montrer que f est positive sur $[0, 1]$.
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n - w_{n+1} \geq 0$.
- 3.(a) On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 \leq \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{2}x^2$.
En déduire que $w_n - w_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$.
(b) Proposer un programme Python pour illustrer numériquement ce résultat.
- 4.(a) Montrer que la série de terme général $w_n - w_{n+1}$ est convergente.
(b) En déduire que la suite (w_n) converge. On note γ sa limite.
- 5.(a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

- (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \frac{1}{2}v_n - 1.$$

- (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \frac{6n}{n+1}.$$

6. En utilisant la convergence de la suite (w_n) vers γ , calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ en fonction de $\ln(2)$.