Programme de colle S6

1 Remarque au colleurs

— Les lois usuelles infinies ne sont pas au programme cette semaine.

2 Chapitre 2 : Probabilités

— notations $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$
— notion de tribu $\mathcal{T}$, espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$
— notion de probabilité : définition, propriétés ($\mathrm{P}(\overline{A})$, $\mathrm{P}(A \cup B)$, croissance d'une probabilité,...), probabilité conditionnelle
— notion de probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{T})$:

1. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;
2. σ-additivité : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(A_n)$ est convergente de somme :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

— espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$
— expérience aléatoire, univers, événement, événement élémentaire, impossible, quasi-impossible (ou négligeable), certain, quasi-certain, événements incompatibles
— système complet d'événements, système quasi-complet d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$
— formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ est un système (quasi-)complet d'événements, alors pour tout $B \in \mathcal{T}$, la série de terme général $\mathrm{P}(B \cap A_n)$ est convergente de somme $\mathrm{P}(B)$ et :

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(B \cap A_n).$$

— probabilités conditionnelles
— formule des probabilités composées (généralisée), formule de Bayes, pour tout événement $A \in \mathcal{T}$ de probabilité non nulle, l'application P_A est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$
— indépendance deux à deux et indépendance mutuelle d'une famille d'évènements
— indépendance d'une famille infinie d'évènements

3 Chapitre 3 : Variables aléatoires réelles discrètes

— notations relatives à une variable aléatoire : $(X = a)$, $(a < X \leqslant b)$, $(X \geqslant a)$,...
— univers image $X(\Omega)$, loi d'une variable aléatoire discrète
— l'ensemble $\big\{(X = x) \,\big|\, x \in X(\Omega)\big\}$ est un système quasi-complet d'événements
— fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète et propriétés : croissance, limites en $\pm\infty$, fonction en escalier, lien avec la loi de probabilité de X
— *définition* : une variable aléatoire admet une espérance si la série $\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} k\,\mathrm{P}(X = k)$ est absolument convergente, notion de variable aléatoire centrée
— propriétés de l'espérance :

1. une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance admet une espérance et formule $\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \ldots$ (linéarité de l'espérance)

2. positivité et croissance de l'espérance
3. théorème de transfert : étant donnée une fonction $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, la variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\,\mathrm{P}(X = x)$ est absolument convergente et, dans ce cas, on a $\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\,\mathrm{P}(X = x)$

— *définition* : une variable aléatoire X admet une variance si $X - \mathrm{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2
— théorème de Kœnig-Huygens : X admet une variance si et seulement si X admet une espérance et un moment d'ordre 2 et, dans ce cas, $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$
— propriétés : positivité de la variance, variance de $aX + b$ si X admet une variance, la variance est nulle si et seulement si X est constante
— écart-type, variable aléatoire centrée réduite
— inégalité de Markov
— indépendance de deux variables aléatoires
— indépendance deux à deux de n variables aléatoires discrètes, indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes
— loi certaine (variable aléatoire constante), loi de Bernoulli, loi binomiale, loi uniforme

4 Python

— Travail sur les listes et les tableaux (TP1)
— Méthode d'Euler pour l'approximation des solutions d'une équation différentielle autonome (on résout une équation différentielle du type $y'(t) = f(y(t))$, il faut rappeler aux étudiants la formule $y_{k+1} = y_k + \mathrm{dt} \times f(y_k)$ où $y_k \approx y(k \times \mathrm{dt}.)$ (TP3)
— Simulation d'une expérience aléatoire grâce aux fonctions `random` et `randint`

5 La question de cours

Voici quelques exemples (liste non exhaustive) :

1. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, donner la définition de « $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements »
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, donner la définition de « $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'événements »
3. Énoncer la formule des probabilités totales
4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A_1, \ldots, A_n$ des évènements. Définir l'indépendance deux à deux et l'indépendance mutuelle de cette famille d'évènements
5. Définir un évènement quasi-certain
6. Énoncer le théorème de Kœnig-Huygens
7. Énoncer l'inégalité de Markov
8. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
9. Donner la définition de l'espérance d'une variable aléatoire d'univers image $\mathbb{N}$
10. Énoncer le théorème de transfert dans le cadre d'une variable aléatoire réelle discrète d'univers image égal à $\mathbb{N}$
11. Quand dit-on qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale ? Quelles sont alors les espérance et variance associées ?
12. Quand dit-on qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli ? Quelles sont alors les espérance et variance associées ?
13. Quand dit-on qu'une variable aléatoire X suit une loi de uniforme sur $[\![1, n]\!]$? Quelles sont alors les espérance et variance associées ?
14. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. Définir l'indépendance deux à deux et l'indépendance mutuelle de cette famille de variables aléatoires.
15. Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète. Dresser son tableau de variation.
16. ...