Chapitre 5
Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

Définition 1.0.1. Un espace E est muni de la loi $+$, c'est-à-dire d'une application :

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned}$$

et de la loi . , c'est-à-dire d'une application :

$$\begin{aligned} . : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\lambda,x) &\mapsto \lambda.x \end{aligned}$$

L'espace ainsi constitué $\boldsymbol{(E,+,.)}$ est un **espace vectoriel** si

1. (a) la loi $+$ est interne : $\forall (x,y) \in E^2,\ x+y \in E$
   (b) la loi $+$ est associative : $\forall (x,y,z) \in E^3,\ (x+y)+z = x+(y+z)$
   (c) la loi $+$ possède un élément neutre noté 0_E : $\forall x \in E,\ x+0_E = 0_E+x = x$
   (d) tout élément de E possède un symétrique : $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ x+y = 0_E$ et on le note $-x$.
   (e) la loi $+$ est commutative : $\forall (x,y) \in E^2,\ x+y = y+x$.
2. . est une loi externe :
$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \lambda.x \in E$$
3. (a) $\forall x \in E,\ 1.x = x$
   (b) $\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
   (c) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$
   (d) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$

Exemple 1.0.1. Montrer que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition 1.0.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On a :

1. $\forall x \in E,\ 0.x = O_E$
2. $\forall a \in \mathbb{K},\ a.O_E = O_E$
3. $\forall (a, x) \in \mathbb{K} \times E,\ a.x = O_E \iff a = 0$ ou $x = O_E$

Exemple 1.0.2. $\mathbb{K}^{\boldsymbol{n}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois suivantes :
si $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont des éléments de $\mathbb{K}^n$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :

- $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
- $\lambda.(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

Exemple 1.0.3. $\mathbb{K}[\boldsymbol{X}]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois suivantes : l'addition dans $\mathbb{K}[X]$ est l'addition usuelle des polynômes, et la loi externe est le produit du polynôme par un scalaire.

Exemple 1.0.4. $\boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois suivantes : l'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'addition usuelle des polynômes, et la loi externe est le produit d'une matrice par un scalaire.

Exemple 1.0.5. $\boldsymbol{\mathcal{F}(I,}\mathbb{K}\boldsymbol{)}$, l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois suivantes :
si f et g sont des applications de l'ensemble I dans le corps $\mathbb{K}$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose

- $\forall x \in I,\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $\forall x \in I,\ (\lambda.f)(x) = \lambda \times f(x)$.

2 Sous-espaces vectoriels.

Dans toute la suite du chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 2.0.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.
On dit que $\boldsymbol{v} \in E$ est une **combinaison linéaire** de $\boldsymbol{(u_1, \dots, u_n)}$ si et seulement si :

$$\boldsymbol{\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n}$$

Exemple 2.0.1.

1. Montrer que $P = X + 2 \in \mathbb{R}[X]$ est une combinaison linéaire de $P_0 = 1$ et $P_1 = X$.

2. Déterminer l'ensemble des combinaisons linéaires de $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 2.0.2. Soit F une partie de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que $\boldsymbol{F}$ est un **sous espace vectoriel de** $\boldsymbol{E}$ si et seulement si $(F, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème 2.0.1. $\boldsymbol{F}$ **est un sous-espace vectoriel de** $\boldsymbol{E}$ si et seulement si :

1. $F \subset E$.
2. $\boldsymbol{F}$ **est non vide** : en particulier, $0_E \in F$,
3. $\boldsymbol{F}$ **est stable par combinaison linéaire** :

$$\forall (u, v) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda.u + \mu.v \in F.$$

Méthode 2.1. Pour montrer qu'un espace ***F* est un sous-espace vectoriel de *E***, on suit pas à pas les trois étapes du théorème 2.0.1 :

1. On montre que $F \subset E$.
2. On montre que $0_E \in F$:
   (a) On se demande ce qui caractérise l'appartenance à F.
   (b) On montre que 0_E vérifie cette condition.
3. On montre que F est stable par combinaison linéaire :
   Soient u et $v \in F$, soient λ et $\mu \in \mathbb{K}$, on veut montrer que $\lambda.u + \mu.v \in F$.
   (a) On écrit explicitement $\lambda.u + \mu.v$.
   (b) On se demande ce qui caractérise l'appartenance à F.
   (c) On montre que $\lambda.u + \mu.v$ vérifie cette condition.

Exemple 2.0.2. Montrer que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = z\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2.0.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{K}_{\boldsymbol{n}}[\boldsymbol{X}]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n.
Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration.

$\square$

Proposition 2.0.3. Une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. On pose F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

$\square$

3 Familles de vecteurs

3.1 Familles libres

Définition 3.1.1. Soit $\boldsymbol{(u_1, \ldots, u_n)}$ **une famille de vecteurs** de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit qu'elle est **libre** si et seulement si :

$$\forall(\boldsymbol{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}) \in \mathbb{K}^{\boldsymbol{n}},\ \boldsymbol{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0}.$$

Définition 3.1.2. Une **famille** qui n'est pas libre est **liée**.
Il existe alors $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

Cette relation est une relation de dépendance linéaire entre $u_1, \ldots, u_n$.

Méthode 3.1. Pour **déterminer si une famille $\boldsymbol{(u_1, \ldots, u_n)}$ est libre** :
- Si $n = 1$: (u) avec $u \neq 0_E$ forme une famille libre.
- Si $n = 2$: (u_1, u_2) est libre si et seulement si u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.
- Sinon, on considère $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0_E$.
  La famille est libre si et seulement si $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Exemple 3.1.1. 1. La famille (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ est-elle libre ?

2. La famille $P_1 = X^2 + X + 1$, $P_2 = X^2 - X + 1$ et $P_3 = X + 2$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est-elle libre ?

Proposition 3.1.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Toute famille de E contenue dans une famille libre de E est libre.
2. Toute famille contenant une famille liée de E est liée.

Théorème 3.1.2. Si une famille est liée, alors un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

Exemple 3.1.2. On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ est liée en écrivant l'un de ses vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres.

3.2 Familles génératrices

3.2.1 Définition et propriétés

Définition 3.2.1. Soit $\boldsymbol{(u_1, \dots, u_n)}$ une famille d'éléments de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que cette **famille** est **génératrice de $\boldsymbol{E}$** si et seulement si :

$$\boldsymbol{\forall w \in E,\ \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n,\ w = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n}$$

c'est-à-dire si tout élément de E est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$.

Méthode 3.2. Pour **déterminer si une famille $\boldsymbol{(u_1, \dots, u_n)}$ est génératrice** :
On considère $w \in E$ et on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$w = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

On écrit le système correspondant à cette équation et on essaye de l'inverser, c'est-à-dire d'exprimer $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en fonction des coordonnées de w.

- Si on y parvient, alors la famille est génératrice et on a déterminé une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$ qui donne w.
- Si le système n'est pas inversible, alors la famille n'est pas génératrice.

Exemple 3.2.1. 1. Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que la famille constituée de $P_1 = 1$, $P_2 = X^2 - 1$, $P_3 = X^2 + X + 1$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}_2[X]$.

Proposition 3.2.1. Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.

Exemple 3.2.2. La famille $(1, X^2 - 1, X^2 + X + 1, 2iX)$ est-elle génératrice de $\mathbb{C}_2[X]$?

3.2.2 Sous espace engendré par une famille de vecteurs

Définition 3.2.2. Soit $u_1, \ldots, u_n$ une famille d'éléments de E. On note

$$F = \mathbf{Vect}(\boldsymbol{u_1, \ldots, u_n}) = \{\boldsymbol{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n} \mid (\boldsymbol{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}) \in \mathbb{K}^{\boldsymbol{n}}\}$$

donc, $v \in F$ si et seulement si v est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.
F est un sous espace de E et s'appelle **sous-espace vectoriel engendré par $\boldsymbol{u_1, \ldots, u_n}$**.

Exemple 3.2.3. Décrire l'espace vectoriel engendré par X et $X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Remarque 3.2.1. Un espace défini comme étant égal à $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ est le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs, c'est donc en particulier un sous-espace vectoriel, il n'est pas nécessaire de le prouver.

Proposition 3.2.2. Si un sous-espace vectoriel contient $u_1, \ldots, u_n$, alors il contient $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

Théorème 3.2.3. On a $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ si et seulement si F contient chaque u_i et

$$\forall w \in F, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n,\ w = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

Exemple 3.2.4. Démontrer que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\right)$.

Méthode 3.3. Pour **déterminer une famille génératrice d'un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$** :

1. On considère $w \in E$.
2. On caractérise l'appartenance de w à E : on en déduit des relations entre ses coefficients.
3. On écrit w comme combinaison linéaire de vecteurs constants de E : $e_1, \ldots, e_p$.

Ces vecteurs forment une famille génératrice de E donc $E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

Exemple 3.2.5. Déterminer une famille génératrice de chacun des espaces vectoriels suivants :

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y = 0\}$

2. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(2) = 0, P'(1) = 0\}$

3.3 Bases

Définition 3.3.1. Une **base de $\boldsymbol{E}$** est une **famille libre et génératrice de $\boldsymbol{E}$**.

Méthode 3.4. Pour **montrer qu'une famille est une base**, on montre qu'elle est libre et génératrice.

Exemple 3.3.1. Démontrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 3.3.1. Soit $\boldsymbol{e_1, \ldots, e_n}$ **une base de E**. On a :

$$\forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{E},\ \exists! (\boldsymbol{x_1, \ldots, x_n}) \in \mathbb{K}^{\boldsymbol{n}},\ \boldsymbol{w = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n}$$

Les nombres $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les **coordonnées** de w dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Définition 3.3.2.

- La **base canonique de** $\mathbb{K}^{\boldsymbol{n}}$ est $(\boldsymbol{e_1, \ldots, e_n})$ où

$$e_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & \ldots & 0\end{pmatrix},\ \ldots, e_n = \begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}.$$

- La **base canonique de** $\mathbb{K}_{\boldsymbol{n}}[\boldsymbol{X}]$ est

$$(\boldsymbol{1, X, X^2, \ldots, X^n}).$$

- La **base canonique de** $\boldsymbol{\mathcal{M}_{n,p}}(\mathbb{K})$ est

$$(\boldsymbol{E_{1,1}, E_{1,2}, \ldots, E_{n,p}})$$

  où $E_{i,j}$, avec $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, est la matrice qui n'a que des coefficients 0 sauf un coefficient 1 en ligne i colonne j.

Remarque 3.3.1. Les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie.

Exemple 3.3.2. On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire $\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$. On pose $e_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ puis $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\alpha = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer les coordonnées du vecteur α dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.3.3. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u_1, \ldots, u_p$ une famille de vecteurs de E. Alors :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ \exists!\, (\lambda_{1,k}, \ldots, \lambda_{n,k}) \in \mathbb{K}^n, \qquad u_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,k} e_i$$

On appelle **matrice des coordonnées de la famille** $(u_1, \ldots, u_p)$ **dans la base** $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \ldots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \ldots & \lambda_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \ldots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

3.4 Le cas particulier de $\mathbb{K}[X]$

Théorème 3.4.1. Toute famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre.

Exemple 3.4.1. La famille $(X, 1 + X + X^2, X^3)$ d'élèments de $\mathbb{C}[X]$ est-elle libre ?

Théorème 3.4.2. Toute famille de $n + 1$ polynômes de degrés deux à deux distincts de $\mathbb{K}_n[X]$ constitue une base de cet espace.

Exemple 3.4.2. Donner une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (différente de la base canonique).

4 Dimension d'un espace vectoriel

4.1 Définition de la dimension

Théorème 4.1.1. De toute famille génératrice de $E \neq \{O_E\}$ **on peut extraire une base**.

Exemple 4.1.1. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par

$$P_1(X) = 1,\ P_2(X) = X,\ P_3(X) = X + 1,\ P_4(X) = 1 + X^3,\ P_5(X) = X - X^3.$$

Déterminer une base de E.

Théorème 4.1.2. Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même nombre d'éléments.

Définition 4.1.1.
- Si E possède une base finie, alors on dit que ***E* est de dimension finie**. Sa **dimension** est le **nombre d'éléments d'une base**, notée $\dim(E)$.
- Sinon, on dit que E est de dimension infinie.

Méthode 4.1. Pour déterminer la dimension d'un ev *F* on détermine une base de F et la dimension de F est le nombre d'éléments de cette base.

Exemple 4.1.2.

1. Montrer que $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

2. Montrer que $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.

3. Montrer que $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Théorème 4.1.3. Soit E un espace de dimension n. 0n a :

- **Propriétés des familles libres** :
  - — Toute famille libre de vecteurs de E comporte au plus n éléments.
  - — Toute famille libre de vecteurs de E comportant exactement n éléments est une base de E.
- **Propriétés des familles génératrices** :
  - — Toute famille génératrice de vecteurs de E comporte au moins n éléments.
  - — Toute famille génératrice de vecteurs de E comportant exactement n éléments est une base de E.

Méthode 4.2. Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base de E, on procède par étapes :

1. On montre que la famille $\mathcal{F}$ est libre.
2. On calcule la dimension de E.
3. On conclut en constatant que la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre de E qui a $\dim(E)$ éléments, donc c'est une base de E.

On peut faire exactement le même raisonnement en remplaçant "famille libre" par "famille génératrice".

Exemple 4.1.3. On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.2 Dimension et sous-espaces vectoriels

Proposition 4.2.1. Soit $\boldsymbol{F}$ un **sous-espace vectoriel de** $\boldsymbol{E}$ avec $\mathbf{dim}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{n}$.
- — F est de dimension finie et $\mathbf{dim}(\boldsymbol{F}) \leq \mathbf{dim}(\boldsymbol{E})$.
- — On a $\dim(F) = n$ si et seulement si $F = E$

Méthode 4.3. Pour démontrer l'égalité de deux espaces vectoriels E et F

1. On détermine la dimension de E.
2. On détermine la dimension de F.
3. On montre que $F \subset E$.
4. On conclut : comme $F \subset E$ et $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Exemple 4.2.1. On considère les sous-espace vectoriels $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(X) = 0\}$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ X \text{ divise } P\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. A-t-on $E = F$?

4.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 4.3.1. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille d'éléments de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. **Le rang de la famille** est **la dimension du sous-espace qu'elle engendre** :

$$\mathbf{rang}(\boldsymbol{e_1, \dots, e_p}) = \mathbf{dim}\left(\mathbf{Vect}(\boldsymbol{e_1, \dots, e_p})\right).$$

Méthode 4.4. Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$:

1. Méthode 1 : On détermine si la famille $\mathcal{F}$ est libre.
   - Si oui, le rang de la famille est son nombre d'éléments.
   - Si non, on considère la famille privée d'un élément et on recommence le raisonnement.
2. Méthode 2 : On pose A la matrice constituée des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ et on détermine le rang de A (on échelonne A grâce à un pivot de Gauss et on compte le nombre de pivots non nuls).

Exemple 4.3.1. Déterminer le rang de la famille de vecteurs suivante : $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 4.3.1. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille d'éléments de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. $\mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_p) = p$ si et seulement la famille est libre.
2. $\mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_p) = n$ si et seulement si la famille est génératrice.
3. Si $n = p$, alors la famille est une base si et seulement si $\mathrm{rg}(e_1, \ldots, e_n) = n$.

Exemple 4.3.2. La famille $(2, X^2 - X + 1, X^2)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$?