

Chapitre 5

Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

Définition 1.0.1. Un espace E est muni de la loi $+$, c'est-à-dire d'une application :

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

et de la loi $\cdot$, c'est-à-dire d'une application :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

L'espace ainsi constitué $(E, +, \cdot)$ est un **espace vectoriel** si

1. (a) la loi $+$ est interne : $\forall (x, y) \in E^2, x + y \in E$
 (b) la loi $+$ est associative : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$
 (c) la loi $+$ possède un élément neutre noté 0_E : $\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$
 (d) tout élément de E possède un symétrique : $\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = 0_E$ et on le note $-x$.
 (e) la loi $+$ est commutative : $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$.
2. $\cdot$ est une loi externe :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda \cdot x \in E$$
3. (a) $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$
 (b) $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
 (c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
 (d) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \mu) \cdot x$

Exemple 1.0.1. Montrer que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1. a) Soient A et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $A + B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

b) Soient A, B et $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $(A + B) + C = A + (B + C)$.

c) Soit $0_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A + 0_E = 0_E + A = A$.

d) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $-A$ est telle que $-A + A = 0_E$

e) Soient A et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $A + B = B + A$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $\lambda A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $1 \cdot A = A$

b) Soient A et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

c) Soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$ et soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

d) Soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$, soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\lambda(\mu A) = (\lambda \mu)A$

Proposition 1.0.1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On a :

1. $\forall x \in E, 0.x = O_E$
2. $\forall a \in \mathbb{K}, a.O_E = O_E$
3. $\forall (a, x) \in \mathbb{K} \times E, a.x = O_E \iff a = 0 \text{ ou } x = O_E$

Exemple 1.0.2. $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois suivantes :

si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont des éléments de $\mathbb{K}^n$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :

- $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- $\lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

Exemple 1.0.3. $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois suivantes : l'addition dans $\mathbb{K}[X]$ est l'addition usuelle des polynômes, et la loi externe est le produit du polynôme par un scalaire.

Exemple 1.0.4. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois suivantes : l'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'addition usuelle des polynômes, et la loi externe est le produit d'une matrice par un scalaire.

Exemple 1.0.5. $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les lois suivantes :

si f et g sont des applications de l'ensemble I dans le corps $\mathbb{K}$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose

- $\forall x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $\forall x \in I, (\lambda.f)(x) = \lambda \times f(x)$.

2 Sous-espaces vectoriels.

Dans toute la suite du chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition 2.0.1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

On dit que $v \in E$ est une **combinaison linéaire** de $(u_1, \dots, u_n)$ si et seulement si :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

Exemple 2.0.1. 1. Montrer que $P = X + 2 \in \mathbb{R}[X]$ est une combinaison linéaire de $P_0 = 1$ et $P_1 = X$.

$$P = 2 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 \text{ donc } P \text{ est une combinaison linéaire de } P_0 \text{ et } P_1.$$

2. Déterminer l'ensemble des combinaisons linéaires de $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ combinaison linéaire de u et v .

Soient λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tq :

$$w = \lambda_1 u + \lambda_2 v \Leftrightarrow (x, y, z) = \lambda_1 (1, 1, 1) + \lambda_2 (1, -1, 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_1 - \lambda_2 \\ z = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2\lambda_1 - x \end{cases}$$

$$\text{donc } \text{Vect}(u, v) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = z \right\}.$$

Définition 2.0.2. Soit F une partie de E , un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On dit que F est un **sous espace vectoriel** de E si et seulement si $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Théorème 2.0.1. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $F \subset E$.
2. F est non vide : en particulier, $0_E \in F$,
3. F est stable par combinaison linéaire :

$$\forall (u, v) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F.$$

Méthode 2.1. Pour montrer qu'un espace F est un sous-espace vectoriel de E , on suit pas à pas les trois étapes du théorème 2.0.1 :

1. On montre que $F \subset E$.
2. On montre que $0_E \in F$:
 - (a) On se demande ce qui caractérise l'appartenance à F .
 - (b) On montre que 0_E vérifie cette condition.
3. On montre que F est stable par combinaison linéaire :

Soient u et $v \in F$, soient λ et $\mu \in \mathbb{K}$, on veut montrer que $\lambda.u + \mu.v \in F$.

 - (a) On écrit explicitement $\lambda.u + \mu.v$.
 - (b) On se demande ce qui caractérise l'appartenance à F .
 - (c) On montre que $\lambda.u + \mu.v$ vérifie cette condition.

Exemple 2.0.2. Montrer que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = z\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Notons $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = z\}$.

→ On a $F \subset \mathbb{R}^3$ par définition.

→ On a $0_F = (0, 0, 0)$ et $0 + 0 = 0$ donc $0_F \in F$.

→ Soient $u = (x, y, z) \in F$, $v = (x', y', z') \in F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il y a $\lambda u + \mu v \in F$.

$$\text{On a } \lambda u + \mu v = (\underbrace{\lambda x + \mu x'}_x, \underbrace{\lambda y + \mu y'}_y, \underbrace{\lambda z + \mu z'}_z).$$

$$\text{On calcule } x + y = \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y'$$

$$= \lambda(x + y) + \mu(x' + y')$$

$$= \lambda z + \mu z' \quad \begin{array}{l} \text{car } u \in F \text{ donc } x + y = z \\ v \in F \text{ donc } x' + y' = z' \end{array}$$

$$= z$$

donc $\lambda u + \mu v \in F$.

Ainsi F est stable par combinaison linéaire.

Conclusion : F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2.0.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n .
Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{K}_m[X]$.

→ On a $\mathbb{K}_m[X] \subset \mathbb{K}[X]$

→ 0_E est le polynôme nul. Par convention, $\deg(0_E) = -\infty \leq m$ donc $0_E \in \mathbb{K}_m[X]$.

→ Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}_m[X]$. On a $\deg(P) \leq m$ et $\deg(Q) \leq m$. On a $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(\lambda P + \mu Q) \leq \max(\deg(\lambda P), \deg(\mu Q))$

$$\leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

$$\leq m$$

donc $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_m[X]$.

$\mathbb{K}_m[X]$ est donc stable par combinaison linéaire.

Conclusion : $\mathbb{K}_m[X]$ est un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$.

□

Proposition 2.0.3. Une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. On pose F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

→ On a $F \subset E$ et $G \subset E$ donc $F \cap G \subset E$.

→ Comme F est un sous-espace de E , $0_E \in F$. De même, $0_E \in G$. Ainsi, $0_E \in F \cap G$.

→ Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(u, v) \in F \cap G$. Il y a $\lambda u + \mu v \in F \cap G$.

• On a $u \in F \cap G$ donc $u \in F$ et $v \in F \cap G$ donc $v \in F$.

Comme F est stable par combinaison linéaire, on en déduit que $\lambda u + \mu v \in F$.

• De même, $u \in G$ et $v \in G$ donc $\lambda u + \mu v \in G$.

Ainsi, $\lambda u + \mu v \in F \cap G$, donc $F \cap G$ est stable par combinaison linéaire.

Conclusion : $F \cap G$ est un sous-espace de E .

□

3 Familles de vecteurs

3.1 Familles libres

Définition 3.1.1. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit qu'elle est **libre** si et seulement si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Définition 3.1.2. Une famille qui n'est pas libre est **liée**.

Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

Cette relation est une relation de dépendance linéaire entre $u_1, \dots, u_n$.

Méthode 3.1. Pour déterminer si une famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre :

- Si $n = 1$: (u) avec $u \neq 0_E$ forme une famille libre.
- Si $n = 2$: (u_1, u_2) est libre si et seulement si u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.
- Sinon, on considère $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$.

La famille est libre si et seulement si $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Exemple 3.1.1. 1. La famille (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle libre ?

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\text{On a } \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

donc la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

2. La famille $P_1 = X^2 + X + 1$, $P_2 = X^2 - X + 1$ et $P_3 = X + 2$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est-elle libre ?

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Leftrightarrow \lambda_1 (X^2 + X + 1) + \lambda_2 (X^2 - X + 1) + \lambda_3 (X + 2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2) X^2 + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) X + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} l_2 \leftarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

donc la famille (P_1, P_2, P_3) est liée.

Proposition 3.1.1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Toute famille de E contenue dans une famille libre de E est libre.
2. Toute famille contenant une famille liée de E est liée.

Théorème 3.1.2. Si une famille est liée, alors un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

Exemple 3.1.2. On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est liée en écrivant l'un de ses vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres.

On remarque que $e_1 = e_2 + e_3$ donc la famille (e_1, e_2, e_3) est liée.

3.2 Familles génératrices

3.2.1 Définition et propriétés

Définition 3.2.1. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille d'éléments de E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit que cette famille est **génératrice de E** si et seulement si :

$$\forall w \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, w = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

c'est-à-dire si tout élément de E est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$.

Méthode 3.2. Pour **déterminer si une famille $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice :**

On considère $w \in E$ et on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$w = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n.$$

On écrit le système correspondant à cette équation et on essaye de l'inverser, c'est-à-dire d'exprimer $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en fonction des coordonnées de w .

- Si on y parvient, alors la famille est génératrice et on a déterminé une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$ qui donne w .
- Si le système n'est pas inversible, alors la famille n'est pas génératrice.

Exemple 3.2.1. 1. Montrer que la famille $((1 \ 0), (1 \ 1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on cherche $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$u = \lambda_1 (1, 0) + \lambda_2 (1, 1) \Leftrightarrow (x, y) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x - y \\ \lambda_2 = y \end{cases}$$

donc $u = (x - y) (1, 0) + y (1, 1)$, c'est bien une combinaison linéaire de $(1, 0)$ et $(1, 1)$.

Ainsi, la famille $((1, 0), (1, 1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que la famille constituée de $P_1 = 1$, $P_2 = X^2 - 1$, $P_3 = X^2 + X + 1$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}_2[X]$.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}_2(X)$, on cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \Leftrightarrow aX^2 + bX + c = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 (X^2 - 1) + \lambda_3 (X^2 + X + 1)$$

$$\Leftrightarrow aX^2 + bX + c = (\lambda_2 + \lambda_3)X^2 + \lambda_3 X + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \lambda_2 + \lambda_3 \\ b = \lambda_3 \\ c = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = a - b \\ \lambda_3 = b \\ \lambda_1 = a - 2b + c \end{cases}$$

donc $P = (a - 2b + c) P_1 + (a - b) P_2 + b P_3$ est une combinaison linéaire de (P_1, P_2, P_3) .

donc (P_1, P_2, P_3) forme une famille génératrice de $\mathbb{C}_2(X)$.

Proposition 3.2.1. Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.

Exemple 3.2.2. La famille $(1, X^2 - 1, X^2 + X + 1, 2iX)$ est-elle génératrice de $\mathbb{C}_2[X]$?

La famille (P_1, P_2, P_3) est une famille génératrice de $\mathbb{C}_2(X)$ et elle est incluse dans $(P_1, P_2, P_3, 2iX)$, donc la famille $(P_1, P_2, P_3, 2iX)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}_2(X)$.

3.2.2 Sous espace engendré par une famille de vecteurs

Définition 3.2.2. Soit $u_1, \dots, u_n$ une famille d'éléments de E . On note

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

donc, $v \in F$ si et seulement si v est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$.

F est un sous espace de E et s'appelle **sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \dots, u_n$** .

Exemple 3.2.3. Décrire l'espace vectoriel engendré par X et $X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

$$\begin{aligned} \text{Vect}(X, X^2+1) &= \{P \in \mathbb{C}[X], \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, P = \lambda_1 X + \lambda_2 (X^2+1)\} \\ &= \{P \in \mathbb{C}[X], \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, P = \lambda_2 X^2 + \lambda_1 X + \lambda_2\} \end{aligned}$$

Remarque 3.2.1. Un espace défini comme étant égal à $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs, c'est donc en particulier un sous-espace vectoriel, il n'est pas nécessaire de le prouver.

Proposition 3.2.2. Si un sous-espace vectoriel contient $u_1, \dots, u_n$, alors il contient $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Théorème 3.2.3. On a $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ si et seulement si F contient chaque u_i et

$$\forall w \in F, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, w = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

Exemple 3.2.4. Démontrer que $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((-1, 0), (1, 1))$.

Cela revient à montrer que la famille $((-1, 0), (1, 1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on cherche $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = \lambda_1 (-1, 0) + \lambda_2 (1, 1)$.

$$u = \lambda_1 (-1, 0) + \lambda_2 (1, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = y - x \\ \lambda_2 = y \end{cases}$$

donc $u = (y-x)(-1, 0) + y(1, 1)$ est combinaison linéaire de $(-1, 0)$ et $(1, 1)$.

Ainsi la famille $((-1, 0), (1, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ donc :

$$\boxed{\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((-1, 0), (1, 1))}.$$

Méthode 3.3. Pour déterminer une famille génératrice d'un espace vectoriel E :

1. On considère $w \in E$.
2. On caractérise l'appartenance de w à E : on en déduit des relations entre ses coefficients.
3. On écrit w comme combinaison linéaire de vecteurs constants de E : $e_1, \dots, e_p$.

Ces vecteurs forment une famille génératrice de E donc $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Exemple 3.2.5. Déterminer une famille génératrice de chacun des espaces vectoriels suivants :

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y = 0\}$

Soit $u = (x, y, z) \in E$, on a :

$$u \in E \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x \Leftrightarrow u = (x, -2x, z) \Leftrightarrow u = x(1, -2, 0) + z(0, 0, 1)$$

$$\text{donc } E = \text{Vect}((1, -2, 0), (0, 0, 1)).$$

2. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(2) = 0, P'(1) = 0\}$

Soit $P = aX^2 + bX + c \in F$, on a :

$$P \in F \Leftrightarrow \begin{cases} P = aX^2 + bX + c \\ P(2) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = aX^2 + bX + c \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow \begin{cases} P = aX^2 + bX + c \\ c = 0 \\ 2c + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = aX^2 + bX + c \\ c = 0 \\ b = -2a \end{cases} \Leftrightarrow P = aX^2 - 2aX + 0 \Leftrightarrow P = a(X^2 - 2X)$$

$$\text{donc } F = \text{Vect}(X^2 - 2X).$$

3.3 Bases

Définition 3.3.1. Une base de E est une famille libre et génératrice de E .

Méthode 3.4. Pour montrer qu'une famille est une base, on montre qu'elle est libre et génératrice.

Exemple 3.3.1. Démontrer que la famille $((-1 \ 0), (1 \ 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

On a montré que la famille $((-1, 0), (1, 1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Cette famille est composée de deux vecteurs non colinéaires donc elle forme une famille libre.

Cette famille est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 3.3.1. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de E . On a :

$$\forall w \in E, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, w = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Les nombres $(x_1, \dots, x_n)$ sont les **coordonnées** de w dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Définition 3.3.2.

- La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est $(e_1, \dots, e_n)$ où

$$e_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0), e_2 = (0 \ 1 \ \dots \ 0), \dots, e_n = (0 \ 0 \ \dots \ 1).$$

- La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est

$$(1, X, X^2, \dots, X^n).$$

- La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est

$$(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,p})$$

où $E_{i,j}$, avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, est la matrice qui n'a que des coefficients 0 sauf un coefficient 1 en ligne i colonne j .

Remarque 3.3.1. Les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie.

Exemple 3.3.2. On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire $\mathcal{B}_c = ((1 \ 0 \ 0), (0 \ 1 \ 0), (0 \ 0 \ 1))$. On pose $e_1 = (1 \ 1 \ 1)$, $e_2 = (1 \ -1 \ 1)$ et $e_3 = (1 \ 1 \ -1)$ puis $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\alpha = (1 \ 2 \ 3)$ dans la base $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$.

Les coordonnées de α sont $(1, 2, 3)$: $\alpha = 1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1)$.

2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

→ Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tq $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \lambda_1 (1, 1, 1) + \lambda_2 (1, -1, 1) + \lambda_3 (1, 1, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & l_1 \leftarrow l_1 - l_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & l_3 \leftarrow l_3 - l_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \text{ donc la famille } \mathcal{B} \text{ est libre.}$$

→ Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tq

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & l_1 \leftarrow l_1 - l_2 \\ y = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & l_3 \leftarrow l_1 - l_3 \\ z = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \frac{x-y}{2} \\ \lambda_1 = y + \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_3 = \frac{x-z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \frac{x-y}{2} \\ \lambda_1 = \frac{y+z}{2} \\ \lambda_3 = \frac{x-z}{2} \end{cases}$$

donc la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

→ Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer les coordonnées du vecteur α dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

On utilise les calculs précédents pour $x=1$, $y=2$ et $z=3$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \\ \lambda_2 = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} \\ \lambda_3 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

donc les coordonnées de α dans la base $\mathcal{B}$ sont : $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$,

ou encore $\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}}.$

Définition 3.3.3. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u_1, \dots, u_p$ une famille de vecteurs de E . Alors :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \exists ! (\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k}) \in \mathbb{K}^n, \quad u_k = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,k} e_i$$

On appelle **matrice des coordonnées de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$** :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \dots & \lambda_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \dots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

3.4 Le cas particulier de $\mathbb{K}[X]$

Théorème 3.4.1. Toute famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre.

Exemple 3.4.1. La famille $(X, 1 + X + X^2, X^3)$ d'éléments de $\mathbb{C}[X]$ est-elle libre ?

C'est une famille de polynômes de degrés 2 à 2 distincts donc elle est libre .

Théorème 3.4.2. Toute famille de $n + 1$ polynômes de degrés deux à deux distincts de $\mathbb{K}_n[X]$ constitue une base de cet espace.

Exemple 3.4.2. Donner une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (différente de la base canonique).

La famille $(2, x-1, x^2+x, x^3-x+3)$ est une base de $\mathbb{R}_3(x)$ car c'est une famille de 4 polynômes de degrés 2 à 2 distincts de $\mathbb{R}_3(x)$.

4 Dimension d'un espace vectoriel

4.1 Définition de la dimension

Théorème 4.1.1. De toute famille génératrice de $E \neq \{0_E\}$ on peut extraire une base.

Exemple 4.1.1. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par

$$P_1(X) = 1, P_2(X) = X, P_3(X) = X + 1, P_4(X) = 1 + X^3, P_5(X) = X - X^3.$$

Déterminer une base de E .

On remarque que $P_3 = P_1 + P_2$ et $P_5 = -P_4 + 2P_2$.

Montrons que (P_1, P_2, P_4) est une base de E .

→ La famille (P_1, P_2, P_4) est libre car les polynômes ont des degrés 2 à 2 distincts.

→ Soit $u \in E$, on considère $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$ tq :

$$u = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 + \lambda_5 P_5 \Leftrightarrow u = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 (P_1 + P_2) + \lambda_4 P_4 + \lambda_5 (-P_4 + 2P_2)$$

$$\Leftrightarrow u = (\lambda_1 + \lambda_3) P_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_5) P_2 + (\lambda_4 - \lambda_5) P_4$$

$$\text{donc } u \in \text{Vect}(P_1, P_2, P_4), \text{ donc } E \subset \text{Vect}(P_1, P_2, P_4).$$

$$\text{Ainsi, } E = \text{Vect}(P_1, P_2, P_4).$$

→ La famille (P_1, P_2, P_4) est donc une base de E .

Théorème 4.1.2. Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même nombre d'éléments.

Définition 4.1.1.

- Si E possède une base finie, alors on dit que E est de dimension finie. Sa dimension est le nombre d'éléments d'une base, notée $\dim(E)$.
- Sinon, on dit que E est de dimension infinie.

Méthode 4.1. Pour déterminer la dimension d'un sev F on détermine une base de F et la dimension de F est le nombre d'éléments de cette base.

Exemple 4.1.2. 1. Montrer que $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

Pour tout $i \in [1, n]$, on note $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{position } i}}{1}, 0, \dots, 0)$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ donc $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

2. Montrer que $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.

La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n(X)$ donc $\dim(\mathbb{K}_n(X)) = n + 1$.

3. Montrer que $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

On pose pour $(i,j) \in \{1,n\} \times \{1,p\}$, $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice nulle partout sauf en ligne i colonne j où elle possède un 1.

La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donc $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Théorème 4.1.3. Soit E un espace de dimension n . On a :

• **Propriétés des familles libres :**

- Toute famille libre de vecteurs de E comporte au plus n éléments.
- Toute famille libre de vecteurs de E comportant exactement n éléments est une base de E .

• **Propriétés des familles génératrices :**

- Toute famille génératrice de vecteurs de E comporte au moins n éléments.
- Toute famille génératrice de vecteurs de E comportant exactement n éléments est une base de E .

Méthode 4.2. Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base de E , on procède par étapes :

1. On montre que la famille $\mathcal{F}$ est libre.
2. On calcule la dimension de E .
3. On conclut en constatant que la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre de E qui a $\dim(E)$ éléments, donc c'est une base de E .

On peut faire exactement le même raisonnement en remplaçant "famille libre" par "famille génératrice".

Exemple 4.1.3. On pose $e_1 = (1 \ 1 \ 1)$, $e_2 = (1 \ 0 \ -1)$ et $e_3 = (1 \ 1 \ 0)$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

→ Montrons que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tq $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \lambda_1 (1, 1, 1) + \lambda_2 (1, 0, -1) + \lambda_3 (1, 1, 0) = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = -\lambda_2 \\ \lambda_2 = \lambda_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

donc la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

→ Cette famille libre possède 3 éléments et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.2 Dimension et sous-espaces vectoriels

Proposition 4.2.1. Soit F un sous-espace vectoriel de E avec $\dim(E) = n$.

- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
- On a $\dim(F) = n$ si et seulement si $F = E$

Méthode 4.3. Pour démontrer l'égalité de deux espaces vectoriels E et F

1. On détermine la dimension de E .
2. On détermine la dimension de F .
3. On montre que $F \subset E$.
4. On conclut : comme $F \subset E$ et $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Exemple 4.2.1. On considère les sous-espaces vectoriels $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = 0\}$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], X \text{ divise } P\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. A-t-on $E = F$?

→ Déterminons une famille génératrice de E .

Soit $P \in E$, on pose $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tq $P = aX^2 + bX + c$.

$$P \in E \Leftrightarrow \begin{cases} P(0) = 0 \\ P = aX^2 + bX + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ P = aX^2 + bX + c \end{cases} \Leftrightarrow P = aX^2 + bX$$

donc $E = \text{Vect}(X, X^2)$.

La famille (X, X^2) est composée de deux polynômes de degrés distincts donc c'est une famille libre.
Ainsi, c'est une base de E et $\dim(E) = 2$.

→ Déterminons la dimension de F .

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $P \in F \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_1[X]$ tq $P = XQ$

donc $\dim(F) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$

→ Soit $P \in F$, $\exists Q \in \mathbb{R}_1[X]$ tq $P = XQ$ donc $P(0) = 0 \times Q(0) = 0$ donc $P \in E$.

Ainsi, $F \subset E$

→ Conclusion : Comme $F \subset E$ et que $\dim(F) = \dim(E) = 2$, on a $F = E$.

4.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 4.3.1. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille d'éléments de E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. **Le rang** de la famille est la dimension du sous-espace qu'elle engendre :

$$\text{rang}(e_1, \dots, e_p) = \dim(\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)).$$

Méthode 4.4. Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$:

1. Méthode 1 : On détermine si la famille $\mathcal{F}$ est libre.
 - Si oui, le rang de la famille est son nombre d'éléments.
 - Si non, on considère la famille privée d'un élément et on recommence le raisonnement.
2. Méthode 2 : On pose A la matrice constituée des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ et on détermine le rang de A (on échelonne A grâce à un pivot de Gauss et on compte le nombre de pivots non nuls).

Exemple 4.3.1. Déterminer le rang de la famille de vecteurs suivante : $x_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$, $x_2 = (1 \ -1 \ 1 \ -1)$ et $x_3 = (1 \ 0 \ 1 \ 1)$.

Méthode 1 : On détermine si la famille est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tq $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0_{\mathbb{R}^4(x)}$

$$(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L_3 &\leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - L_2 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ 0 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

donc la famille (x_1, x_2, x_3) est libre.

donc $\boxed{\text{rg}(x_1, x_2, x_3) = 3}$.

Méthode 2 : On échelonne la matrice des coordonnées.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftrightarrow L_4 \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{\text{rg}(x_1, x_2, x_3) = 3}$.

Théorème 4.3.1. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille d'éléments de E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

1. $\text{rg}(e_1, \dots, e_p) = p$ si et seulement si la famille est libre.
2. $\text{rg}(e_1, \dots, e_p) = n$ si et seulement si la famille est génératrice.
3. Si $n = p$, alors la famille est une base si et seulement si $\text{rg}(e_1, \dots, e_n) = n$.

Exemple 4.3.2. La famille $(2, X^2 - X + 1, X^2)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$?

On détermine le rang de cette famille.

On écrit les polynômes selon leurs coordonnées dans la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$P_0 = (2, 0, 0) \quad P_1 = (0, -1, 1) \quad P_2 = (0, 0, 1)$$

On écheleonne la matrice des coordonnées associée :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \text{rg}(P_0, P_1, P_2) = 3.$$

La famille (P_0, P_1, P_2) est donc une famille cardinal 3 et de rang 3, c'est donc une famille libre.

Comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, c'est même une base de $\mathbb{R}_2[X]$.