

TD 5 Correction - Espaces vectoriels

Compétences à acquérir :

- ▷ C1 : Connaître les règles de calcul dans un espace vectoriel et vocabulaire : combinaison linéaire de vecteurs, vecteur nul, scalaires, coordonnées...
- ▷ C2 : Démontrer qu'un espace est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel ou un espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs
- ▷ C3 : Déterminer une famille génératrice d'un espace vectoriel et connaître les propriétés liées
- ▷ C4 : Démontrer qu'une famille est libre et connaître les propriétés liées
- ▷ C5 : Déterminer une base *finie* d'un espace vectoriel (de dimension finie), déterminer les coordonnées d'un vecteur exprimé dans une base
- ▷ C6 : Déterminer la dimension d'un espace vectoriel et connaître les propriétés liées (en lien avec les familles libres ou génératrices notamment)
- ▷ C7 : Déterminer le rang d'une famille de vecteurs
- ▷ C8 : Connaître les propriétés propres aux espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Exercice 1 (C1-C2-C3-C4-C5-C6) Les trois questions sont indépendantes.

1. Soient P_1 et P_2 les plans de $\mathbb{R}^3$ d'équations cartésiennes :

$$2x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad x + y + z = 0$$

Montrer que P_1 , P_2 et $P_1 \cap P_2$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Pour chacun d'entre eux, en donner une base et la dimension.

— Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in P_1 &\iff 2x - y + z = 0 \iff y = 2x + z \iff (x, y, z) = (x, 2x + z, z) \\ &\iff (x, y, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1) \\ &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((1, 2, 0), (0, 1, 1)) \end{aligned}$$

Ainsi $P_1 = \text{Vect}((1, 2, 0), (0, 1, 1))$ et donc P_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, la famille $\mathcal{B}_1 = ((1, 2, 0), (0, 1, 1))$ est génératrice de P_1 et elle est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. Donc $\mathcal{B}_1$ est une base de P_1 . Enfin, $\dim(P_1) = \text{card}(\mathcal{B}_1) = 2$.

— Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in P_2 &\iff x + y + z = 0 \iff \dots \iff (x, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \\ &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Donc $P_2 = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. La famille $\mathcal{B}_2 = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est génératrice de P_2 et elle est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. Il s'agit donc d'une base de P_2 et on a $\dim(P_2) = \text{card}(\mathcal{B}_2) = 2$.

- L'ensemble $\boxed{P_1 \cap P_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$ comme l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in P_1 \cap P_2 &\iff \begin{cases} 2x - y + z = 0 & L_1 \\ x + y + z = 0 & L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2x - y + z = 0 & L_1 \\ 3y + z = 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 2y \\ z = -3y \end{cases} \\
 &\iff (x, y, z) = y(2, 1, -3) \\
 &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((2, 1, -3))
 \end{aligned}$$

Finalement $P_1 \cap P_2 = \text{Vect}((2, 1, -3))$ (on retrouve d'ailleurs le fait que $P_1 \cap P_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$). La famille $\mathcal{C} = ((2, 1, -3))$ est une famille génératrice de $P_1 \cap P_2$ et elle est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. Ainsi, une base de $P_1 \cap P_2$ est $\mathcal{C}$ et on a $\boxed{\dim(P_1 \cap P_2) = \text{card}(\mathcal{C}) = 1.}$

2. On pose :

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + 2t = 0 \text{ et } x + 2y + 2z - t = 0\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et la dimension. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors :

$$\begin{aligned}
 (x, y, z, t) \in E &\iff \begin{cases} x - y - z + 2t = 0 & L_1 \\ x + 2y + 2z - t = 0 & L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - y - z + 2t = 0 & L_1 \\ 3y + 3z - 3t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -t \\ y = t - z \end{cases} \\
 &\iff (x, y, z, t) = t(-1, 1, 0, 1) + z(0, -1, 1, 0) \\
 &\iff (x, y, z, t) \in \text{Vect}((-1, 1, 0, 1), (0, -1, 1, 0))
 \end{aligned}$$

On a alors $E = \text{Vect}((-1, 1, 0, 1), (0, -1, 1, 0))$ et donc $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4.}$

La famille $\mathcal{F} = ((-1, 1, 0, 1), (0, -1, 1, 0))$ est génératrice de E et elle est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. $\boxed{\text{Une base de } E \text{ est donc } \mathcal{F} \text{ et on a } \dim(E) = \text{card}(\mathcal{F}) = 2.}$

3. Soit $F = \{(\alpha + \beta, \alpha, \alpha - \beta) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et en donner une écriture cartésienne.

On a :

$$F = \{\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 0, -1) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(1, 1, 1), (1, 0, -1))$$

donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Déterminons une représentation cartésienne de F . Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z) = (\alpha + \beta, \alpha, \alpha - \beta) \\ &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \alpha + \beta = x & \text{L}_1 \\ \alpha = y & \text{L}_2 \\ \alpha - \beta = z & \text{L}_3 \end{cases} \\ &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \alpha + \beta = x & \text{L}_1 \\ -\beta = -x + y & \text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2 - \text{L}_1 \\ -2\beta = -x + z & \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 - \text{L}_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \alpha + \beta = x & \text{L}_1 \\ -\beta = -x + y & \text{L}_2 \\ = x - 2y + z & \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 - 2\text{L}_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Une représentation cartésienne de F est donc $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$.

Exercice 2 (C4)  Soient a et b deux nombres réels. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les trois vecteurs :

$$v_1 = (1, a, 2, 1), \quad v_2 = (3, a, 2, 3) \quad \text{et} \quad v_3 = (0, 1, b, 0)$$

1. Montrer que ces trois vecteurs forment une famille liée si et seulement si $ab = 2$.

La famille (v_1, v_2, v_3) est linéairement dépendantes (c'est-à-dire liée) si et seulement si son rang est strictement inférieur au nombre de vecteurs qui la compose, c'est-à-dire si et seulement si $\text{rg}(v_1, v_2, v_3) \leq 2$. Calculons le rang de (v_1, v_2, v_3) :

$$\begin{aligned} \text{rg}(v_1, v_2, v_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & a & 1 \\ 2 & 2 & b \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{L}_1 \\ \text{L}_2 \\ \text{L}_3 \\ \text{L}_4 \end{matrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2a & 1 \\ 0 & -4 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{L}_1 \\ \text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2 - a \text{L}_1 \\ \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 - 2 \text{L}_1 \\ \text{L}_4 \leftarrow \text{L}_4 - \text{L}_1 \end{matrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & b \\ 0 & -2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{L}_1 \\ \text{L}_2 \leftrightarrow \text{L}_3 \\ \text{L}_3 \leftrightarrow \text{L}_2 \\ \text{L}_4 \leftarrow \text{L}_4 - \text{L}_1 \end{matrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & b \\ 0 & 0 & 2 - ab \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{L}_1 \\ \text{L}_2 \\ \text{L}_3 \leftrightarrow 2 \text{L}_3 - a \text{L}_2 \\ \text{L}_4 \leftarrow \text{L}_4 - \text{L}_1 \end{matrix} \end{aligned}$$

Finalement :

$$(v_1, v_2, v_3) \text{ est liée} \iff 2 - ab = 0 \iff ab = 2$$

2. Dans ce cas, exprimer le vecteur v_2 en fonction de v_1 et v_3 .

On suppose que $ab = 2$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On résout :

$$\begin{aligned} v_2 = \alpha v_1 + \beta v_3 &\iff (3, a, 2, 3) = \alpha(1, a, 2, 1) + \beta(0, 1, b, 0) \\ &\iff \begin{cases} \alpha &= 3 & L_1 \\ a\alpha + \beta &= a & L_2 \\ 2\alpha + b\beta &= 2 & L_3 \\ \alpha &= 3 & L_4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha &= 3 & L_1 \\ \beta &= -2a & L_2 \\ \beta &= -\frac{4}{b} = -2a & L_3 \\ \alpha &= 3 & L_4 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{v_2 = 3v_1 - 2av_3}$.

3. Déterminer une représentation cartésienne du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs v_1, v_2 et v_3 (ici, a et b sont quelconques).

Posons $F(a, b) = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors :

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F(a, b) &\iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z, t) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \\ &\iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \alpha + 3\beta &= x & L_1 \\ a\alpha + a\beta + \gamma &= y & L_2 \\ 2\alpha + 2\beta + b\gamma &= z & L_3 \\ \alpha + 3\beta &= t & L_4 \end{cases} \\ &\iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \alpha + 3\beta &= x & L_1 \\ -2a\beta + \gamma &= y - ax & L_2 \leftarrow L_2 - a L_1 \\ -4\beta + b\gamma &= z - 2x & L_3 \leftarrow L_3 - 2 L_1 \\ 0 &= t - x & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \alpha + 3\beta &= x & L_1 \\ -4\beta + b\gamma &= z - 2x & L_3 \leftrightarrow L_2 \\ -2a\beta + \gamma &= y - ax & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ 0 &= t - x & L_4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha + 3\beta &= x & L_1 \\ -4\beta + b\gamma &= z - 2x & L_3 \\ (2 - ab)\gamma &= 2y - az & L_2 \leftarrow 2 L_3 - a L_2 \\ 0 &= t - x & L_4 \end{cases} \end{aligned}$$

On distingue ensuite deux cas (on obtient une ou deux équations de compatibilité suivant la valeur de $2 - ab$).

— **Premier cas :** $ab = 2$

Dans ce cas, $2 - ab = 0$ donc une représentation cartésienne de $F(a, b)$ est :

$$\boxed{F(a, b) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2y - az = 0 \text{ et } t - x = 0\}}$$

— **Deuxième cas :** $ab \neq 2$

On obtient alors :

$$\boxed{F(a, b) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t - x = 0\}}$$

Exercice 3 (C1-C2-C3-C4-C5-C6)  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose :

$$F_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (1 - \lambda)x + 2z = 0 \text{ et } x + (1 - \lambda)y + z = 0 \text{ et } 2x + (1 - \lambda)z = 0\}$$

Montrer que F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en donner une base et la dimension en fonction du paramètre λ .

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F_\lambda &\iff \begin{cases} x + (1 - \lambda)y + z = 0 & L_1 \\ (1 - \lambda)x + 2z = 0 & L_2 \\ 2x + (1 - \lambda)z = 0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + (1 - \lambda)y + z = 0 & L_1 \\ - (1 - \lambda)^2 y + (\lambda + 1)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - (1 - \lambda)L_1 \\ - 2(1 - \lambda)y + (-1 - \lambda)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + (1 - \lambda)y + z = 0 & L_1 \\ - 2(1 - \lambda)y + (-1 - \lambda)z = 0 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ - (1 - \lambda)^2 y + (\lambda + 1)z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + (1 - \lambda)y + z = 0 & L_1 \\ - 2(1 - \lambda)y + (-1 - \lambda)z = 0 & L_2 \\ + (\lambda + 1)(3 - \lambda)z = 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - (1 - \lambda)L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

On distingue ensuite quatre cas.

— **Premier cas :** $\lambda = 1$

Alors :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F_1 &\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ - 2z = 0 \\ - 6z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = y(0, 1, 0) \\ &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((0, 1, 0)) \end{aligned}$$

Donc $F_1 = \text{Vect}((0, 1, 0))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Une famille génératrice de F_1 est $((0, 1, 0))$ et cette famille est libre car constituée d'un unique vecteur *non nul*. On a de plus $\dim(F_1) = 1$.

— **Deuxième cas :** $\lambda = -1$

Alors :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F_{-1} &\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = z(-1, 0, 1) \\ &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((-1, 0, 1)) \end{aligned}$$

Donc $F_{-1} = \text{Vect}((-1, 0, 1))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Une famille génératrice de F_1 est cette fois $((-1, 0, 1))$. Celle-ci est libre car constituée d'un unique vecteur *non nul*. On a $\dim(F_{-1}) = 1$.

— **Troisième cas : $\lambda = 3$**

Alors :

$$(x, y, z) \in F_3 \iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -4y - 4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = z(-3, -1, 1) \\ \iff (x, y, z) \in \text{Vect}((-3, -1, 1))$$

Donc $F_3 = \text{Vect}((-3, -1, 1))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Une famille génératrice de F_3 est $((-3, -1, 1))$. Celle-ci est libre car constituée d'un unique vecteur *non nul*. On a $\dim(F_3) = 1$.

— **Quatrième et dernier cas : $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\}$**

Dans ce cas, $-2(1 - \lambda) \neq 0$ et $(\lambda + 1)(3 - \lambda) \neq 0$. Le système échelonné qui précède la disjonction de cas est donc triangulaire et homogène ; il admet donc une unique solution qui est $0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi, $F_\lambda = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. F_λ n'a pas de base et sa dimension est nulle.

Exercice 4 (C2-C4-C7-C8) ☞ Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$\vec{u} = (1, 1, 1, -1), \quad \vec{v} = (-2, 0, 1, 1) \quad \text{et} \quad \vec{w} = (1, -2, 1, 0)$$

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

On calcule le rang de la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et on trouve 3. Comme le rang coïncide avec le nombre de vecteurs de la famille, on peut conclure que :

la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre

2. Donner une équation ou un système d'équations cartésiennes du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Posons $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors :

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F &\iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z, t) = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} \\ &\iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z, t) = \alpha(1, 1, 1, -1) + \beta(-2, 0, 1, 1) + \gamma(1, -2, 1, 0) \\ &\iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma = x & L_1 \\ \alpha - 2\gamma = y & L_2 \\ \alpha + \beta + \gamma = z & L_3 \\ -\alpha + \beta = t & L_4 \end{cases} \\ &\iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma = x & L_1 \\ 2\beta - 3\gamma = y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3\beta = z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ -\beta + \gamma = t + x & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma = x & L_1 \\ 2\beta - 3\gamma = y - x & L_2 \\ 9\gamma = x + 2z - 3y & L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_2 \\ -\gamma = x + y + 2t & L_4 \leftarrow 2L_4 + L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma = x & L_1 \\ 2\beta - 3\gamma = y - x & L_2 \\ 9\gamma = x + 2z - 3y & L_3 \\ 0 = 10x + 6y + 2z + 18t & L_4 \leftarrow 9L_4 + L_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Une écriture cartésienne de F est donc :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 5x + 3y + z + 9t = 0\}$$

3. Compléter cette famille pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

Soit $\vec{x} = (1, 0, 0, 0)$. D'après la question 2., on a $\vec{x} \notin F$. Donc $\vec{x}$ ne s'écrit pas comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Par ailleurs, on sait que la famille $(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w})$ est libre donc la famille $(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}, \vec{x})$ est libre dans $\mathbb{R}^4$. Or elle contient quatre vecteurs et on sait que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ donc :

la famille $(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}, \vec{x})$ est une base de $\mathbb{R}^4$

Exercice 5 (C1-C2)  Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels :

1. de $\mathbb{R}[X]$?

(a) $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(2) = 0\}$

— Le polynôme nul appartient à A car $0'_{\mathbb{R}[X]} = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $0_{\mathbb{R}[X]}(2) = 0$.

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in A^2$. Montrons que $\lambda P + Q \in A$. Par linéarité de la dérivation, on a :

$$(\lambda P + Q)'(2) = \lambda P'(2) + Q'(2) = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

car $P \in A$ et $Q \in A$. Ainsi, on a bien $\lambda P + Q \in E$.

Donc :

A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$

(b) $B = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P - 2P' = 0\}$

On peut montrer de la même façon que B est un sous-espace vectoriel de E .

On propose une autre solution. L'équation différentielle $y' - \frac{1}{2}y = 0$ est linéaire du premier ordre à coefficients constants et homogène. Son ensemble de solutions est $\mathcal{S} = \{x \mapsto C e^{\frac{x}{2}} \mid C \in \mathbb{R}\}$. On a donc :

$$B = \mathcal{S} \cap \mathbb{R}[X] = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$$

Démontrons la dernière égalité. Soit $P \in \mathcal{S} \cap \mathbb{R}[X]$. Il existe alors $C \in \mathbb{R}$ tel que $P = C e^{\frac{x}{2}}$. Supposons que $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors la limite de P en $-\infty$ est soit égale à $+\infty$, soit égale à $-\infty$. Or $C \neq 0$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} C e^{\frac{x}{2}} = 0$$

ce qui est absurde. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. On a donc l'inclusion $B = \mathcal{S} \cap \mathbb{R}[X] \subset \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ et l'autre inclusion est immédiate (le polynôme nul appartient bien à B). Donc B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

(c) $C = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 2\}$

Le polynôme nul n'appartient pas à C (car il est de degré $-\infty$). Donc C n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

(d) $D = \{aX^2 + b(X + 1) + c \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

On a $D = \text{Vect}(X^2, X + 1, 1)$ donc D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ (de $\mathbb{R}_2[X]$ même).

2. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (i.e. de l'espace vectoriel des suites réelles) ?

(a) $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}\}$

— La suite nulle est convergente de limite 0, donc elle appartient à E .

— Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes (car elles appartiennent à E) et on sait qu'une combinaison linéaire de suites convergentes est convergente. Donc la suite $\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, c'est-à-dire $\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$.

Finalement, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(b) $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est arithmétique de raison } -1\}$

La suite nulle $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ est une suite arithmétique de raison 0 (donc pas de raison 1).

Autrement dit, $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \notin F$. Donc :

F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

(c) $G = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2\}$

La suite $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ (constante égale à 1) appartient à G (puisque $1^2 = 1$) mais la suite $2 \times (1)_{n \in \mathbb{N}} = (2)_{n \in \mathbb{N}}$ n'appartient pas à G car $2^2 \neq 2$. Donc G n'est pas stable pour la multiplication par les scalaires et donc :

G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

3. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (i.e. de l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles) ?

(a) l'ensemble H des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 1

On a $H = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$. Le même raisonnement que celui mené à la question 1.(a) permet de montrer que :

H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(b) l'ensemble I des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$

— La fonction nulle $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ vérifie l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$, c'est-à-dire $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in I$.

— Soient $(f, g) \in I^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda f + g \in I$. La fonction $\lambda f + g$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque f et g le sont (comme éléments de E) et :

$$(\lambda f + g)'' + 2(\lambda f + g)' + (\lambda f + g) = \lambda(f'' + 2f' + f) + (g'' + 2g' + g) = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

car $f \in E$ et $g \in E$.

Donc :

I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

COMMENTAIRE

Comme on sait résoudre l'équation différentielle qui caractérise I , on peut aussi écrire que :

$$I = \{x \mapsto (Ax + B)e^{-x} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(x \mapsto xe^{-x}, x \mapsto e^{-x})$$

et donc (on retrouve que) I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3.(c) l'ensemble J des fonctions paires sur $\mathbb{R}$

— Par définition :

$$J = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$$

La fonction nulle $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ est paire sur $\mathbb{R}$ donc elle appartient à J .

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in J^2$. Montrons que $\lambda f + g \in J$. Comme f et g sont paires (elles appartiennent à J), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$$

Donc $\lambda f + g \in J$.

Finalement :

$$\boxed{J \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

(d) l'ensemble des fonctions positives sur $\mathbb{R}$

On note K cet ensemble. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est positive sur $\mathbb{R}$, donc $f \in K$. Par contre, $-f \notin K$ car par exemple $(-f)(1) = -1 < 0$. Donc K n'est pas stable pour la multiplication par les scalaires et donc

$$\boxed{K \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

4. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

(a) l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques

— La matrice nulle $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est symétrique donc $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$. Montrons que $\lambda A + B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Par linéarité de la transposition, on a :

$${}^t(\lambda A + B) = \lambda {}^t A + {}^t B = \lambda A + B$$

car A et B sont symétriques.

Donc $\lambda A + B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Finalement :

$$\boxed{\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

(b) l'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles

La matrice nulle n'est pas inversible (son rang est nul donc n'est pas égal à $n \in \mathbb{N}^*$) donc $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Donc :

$$\boxed{\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

(c) l'ensemble E des matrices scalaires

On a :

$$E = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(I_n)$$

donc $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Exercice 6 (C3-C4-C5-C8)1. On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants :

$$P_1 = 1 + X + 2X^2, \quad P_2 = -2 - X - X^2, \quad P_3 = 1 - X + X^2 \quad \text{et} \quad P_4 = -X + 2X^2$$

La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle libre ? Si ce n'est pas le cas, donner une relation de dépendance linéaire entre les quatre polynômes de la famille.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$. Alors (on utilise à la troisième équivalence le fait que la famille $(1, X, X^2)$ est libre) :

$$\begin{aligned} \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 + \delta P_4 &= 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \iff \alpha(1 + X + 2X^2) + \beta(-2 - X - X^2) + \gamma(1 - X + X^2) + \delta(-X + 2X^2) &= 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \iff (\alpha - 2\beta + \gamma) + (\alpha - \beta - \gamma - \delta)X + (2\alpha - \beta + \gamma + 2\delta)X^2 &= 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \iff \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma &= 0 & \text{L}_1 \\ \alpha - \beta - \gamma - \delta &= 0 & \text{L}_2 \\ 2\alpha - \beta + \gamma + 2\delta &= 0 & \text{L}_3 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma &= 0 & \text{L}_1 \\ \beta - 2\gamma - \delta &= 0 & \text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2 - \text{L}_1 \\ 3\beta - \gamma + 2\delta &= 0 & \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 - 2\text{L}_1 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma &= 0 & \text{L}_1 \\ \beta - 2\gamma - \delta &= 0 & \text{L}_2 \\ \gamma + \delta &= 0 & \text{L}_3 \leftarrow \frac{1}{5}(\text{L}_3 - 3\text{L}_2) \end{cases} \\ \iff (\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= (-\delta, -\delta, -\delta, \delta) \end{aligned}$$

Le choix $\delta = 1$ (par exemple) fournit la relation $-P_1 - P_2 - P_3 + P_4 = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc :

la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est liée

COMMENTAIRE

En fait, (P_1, P_2, P_3, P_4) est une famille de quatre polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3 et que la famille comporte quatre vecteurs, cette famille est nécessairement liée. Par contre, cette observation ne permet pas de trouver une dépendance linéaire entre les quatre vecteurs.

2. On pose $Q_1 = 1 + X + 2X^2 + X^3$,

$$Q_2 = -1 + X + 2X^2 + 3X^3, \quad Q_3 = 2 + X + 2X^3 \quad \text{et} \quad Q_4 = 3 + X^2 + X^3$$

(a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$. On résout (on utilise la liberté de la famille $(1, X, X^2, X^3)$ à la troisième équivalence) :

$$\begin{aligned} \alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 + \delta Q_4 &= 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \iff \alpha(1 + X + 2X^2 + X^3) + \beta(-1 + X + 2X^2 + 3X^3) + \gamma(2 + X + 2X^3) \\ &\quad + \delta(3 + X^2 + X^3) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \iff (\alpha - \beta + 2\gamma + 3\delta) + (\alpha + \beta + \gamma)X + (2\alpha + 2\beta + \delta)X^2 \\ &\quad + (\alpha + 3\beta + 2\gamma + \delta)X^3 = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \iff \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma + 3\delta = 0 & L_1 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 & L_2 \\ 2\alpha + 2\beta + \delta = 0 & L_3 \\ \alpha + 3\beta + 2\gamma + \delta = 0 & L_4 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma + 3\delta = 0 & L_1 \\ 2\beta - \gamma - 3\delta = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 4\beta - 4\gamma - 5\delta = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ 2\beta - \delta = 0 & L_4 \leftarrow \frac{1}{2}(L_4 - L_1) \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma + 3\delta = 0 & L_1 \\ 2\beta - \gamma - 3\delta = 0 & L_2 \\ -2\gamma + \delta = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ \gamma + 2\delta = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma + 3\delta = 0 & L_1 \\ 2\beta - \gamma - 3\delta = 0 & L_2 \\ -2\gamma + \delta = 0 & L_3 \\ 5\delta = 0 & L_4 \leftarrow 2L_4 + L_3 \end{cases} \\ \iff (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{B}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$ (les éléments de $\mathcal{B}$ sont bien des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 3). De plus, $\mathcal{B}$ comporte quatre vecteurs et on sait que $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$ donc :

la famille $\mathcal{B} = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

COMMENTAIRE

Comme on sait qu'il faut montrer que la famille est une base, on peut aussi calculer le rang de la famille $\mathcal{B}$ en explicitant les polynômes dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$\text{rg}(\mathcal{B}) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} = \dots = 4$$

On conclut comme dans le raisonnement précédent ($\text{rg}(\mathcal{B}) = \text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$).

- (b) Déterminer les coordonnées du vecteur $P = -1 + 3X + 3X^2 + 5X^3$ exprimées dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$. On résout (on utilise à la deuxième équivalence la liberté de la famille $(1, X, X^2, X^3)$) :

$$\begin{aligned}
 P &= \alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 + \delta Q_4 \\
 \Leftrightarrow & (\alpha - \beta + 2\gamma + 3\delta) + (\alpha + \beta + \gamma)X + (2\alpha + 2\beta + \delta)X^2 + (\alpha + 3\beta + 2\gamma + \delta)X^3 \\
 &= -1 + 3X + 3X^2 + 5X^3 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma + 3\delta = -1 & \text{L}_1 \\ \alpha + \beta + \gamma = 3 & \text{L}_2 \\ 2\alpha + 2\beta + \delta = 3 & \text{L}_3 \\ \alpha + 3\beta + 2\gamma + \delta = 5 & \text{L}_4 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma + 3\delta = -1 & \text{L}_1 \\ 2\beta - \gamma - 3\delta = 4 & \text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2 - \text{L}_1 \\ 4\beta - 4\gamma - 5\delta = 5 & \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 - 2\text{L}_1 \\ 2\beta - \delta = 3 & \text{L}_4 \leftarrow \frac{1}{2}(\text{L}_4 - \text{L}_1) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma + 3\delta = -1 & \text{L}_1 \\ 2\beta - \gamma - 3\delta = 4 & \text{L}_2 \\ -2\gamma + \delta = -3 & \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 - 2\text{L}_2 \\ \gamma + 2\delta = -1 & \text{L}_4 \leftarrow \text{L}_4 - \text{L}_2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma + 3\delta = -1 & \text{L}_1 \\ 2\beta - \gamma - 3\delta = 4 & \text{L}_2 \\ -2\gamma + \delta = -3 & \text{L}_3 \\ 5\delta = -5 & \text{L}_4 \leftarrow 2\text{L}_4 + \text{L}_3 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 1, 1, -1)
 \end{aligned}$$

Ainsi :

la matrice des coordonnées de P exprimées dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

COMMENTAIRE

Ceci signifie bien sûr que :

$$P = Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4$$

Exercice 7 (C3-C4-C5-C8)

1. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

La famille $\mathcal{B}$ est constituée de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ qui sont de degrés deux à deux distincts donc cette famille est libre. De plus, $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \text{card}(\mathcal{B}) = 3$ donc :

$\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

2. Déterminer les coordonnées d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminons les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On résout :

$$\begin{aligned} P = \alpha + \beta X + \gamma X(X-1) &\iff aX^2 + bX + c = \gamma X^2 + (\beta - \gamma)X + \alpha \\ &\iff \begin{cases} \gamma &= a \\ \beta - \gamma &= b \\ \alpha &= c \end{cases} \quad (\text{car la famille } (1, X, X^2) \text{ est libre}) \\ &\iff \begin{cases} \gamma &= a \\ \beta &= a + b \\ \alpha &= c \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la matrice des coefficients de $P = aX^2 + bX + c$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} c \\ a+b \\ a \end{pmatrix}$.

3. En déduire la nature et la somme éventuelle de la série :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{3n^2 - 4n + 6}{2^n}$$

D'après la question 2., on sait que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(3X^2 - 4X + 6) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Autrement dit :

$$3X^2 - 4X + 6 = 6 - X + 3X(X-1)$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3n^2 - 4n + 6 = 6 - n + 3n(n-1)$$

Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, en multipliant par $\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$$\begin{aligned} \frac{3n^2 - 4n + 6}{2^n} &= 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \times n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{3}{4} \times n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, les séries géométrique $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, géométrique dérivée première

$\sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et géométrique dérivée seconde $\sum_{n \geq 2} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ sont convergentes.

Comme l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{3n^2 - 4n + 6}{2^n}$

converge de la somme égale à (par linéarité de la somme) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^2 - 4n + 6}{2^n} &= 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{3}{4} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ &= \frac{6}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} \\ &= 12 - 2 + 12 \\ &= 22\end{aligned}$$

Finalement :

la série $\sum_{n \geq 0} \frac{3n^2 - 4n + 6}{2^n}$ est convergente de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^2 - 4n + 6}{2^n} = 22$

Exercice 8 (C4)  On note E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

1. On considère les fonctions :

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto \cos(x), \quad f_3 : x \mapsto \cos(2x) \quad \text{et} \quad f_4 : x \mapsto \cos(x)^2$$

La famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est-elle libre ?

On sait par formule de duplication du cosinus que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_3(x) = 2f_4(x) - f_1(x)$$

Ceci se réécrit :

$$f_3 = 2f_4 - f_1 \quad (\text{ce que l'on peut réécrire : } f_1 + 0 \times f_2 + f_3 - 2f_4 = 0_E)$$

Donc :

la famille $\mathcal{F}$ est liée

COMMENTAIRE

L'égalité $f_3 = 2f_4 - f_1$ nous dit même que la sous-famille (f_1, f_3, f_4) de $\mathcal{F}$ est liée.

2. On considère les fonctions :

$$g_1 : x \mapsto 1, \quad g_2 : x \mapsto x^3 + 1 \quad \text{et} \quad g_3 : x \mapsto |x^3|$$

La famille $\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3)$ est-elle libre ?

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $\alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3 = 0_E$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha g_1(x) + \beta g_2(x) + \gamma g_3(x) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha + \beta(x^3 + 1) + \gamma|x|^3 = 0 \quad (1)$$

- Le choix $x = 0$ dans (1) fournit $\alpha + \beta = 0$ (c'est-à-dire $\beta = -\alpha$).
 - En choisissant maintenant $x = 1$, on a $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$.
 - On choisit enfin $x = -1$ ce qui nous donne $\alpha + \gamma = 0$ (c'est-à-dire $\gamma = -\alpha$).
- En remplaçant les valeurs de β et γ dans la deuxième équation, on obtient :

$$\alpha + 2(-\alpha) + (-\alpha) = 0 \quad \text{et donc} \quad \alpha = 0$$

ce qui implique que $\beta = \gamma = 0$. Ainsi :

la famille $\mathcal{G}$ est libre

COMMENTAIRE

On peut bien sûr choisir d'autres valeurs pour x que 0, 1 et -1 .

Exercice 9 (C1-C2-C3-C4-C5-C8)  Étant donnés deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on dit que Q *divise* P (ou que P est *factorisable* par Q) s'il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QR$. Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ et G l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ divisibles par $X^2 - 3X + 2$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

- Le polynôme nul appartient à G car celui-ci est divisible par $X^2 - 3X + 2$. En effet, on a l'égalité :

$$0_{\mathbb{R}_4[X]} = (X^2 - 3X + 2) \times 0_{\mathbb{R}_4[X]}$$

- Soient $(P, Q) \in G^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda P + Q \in G$. Comme P et Q sont des éléments de G , il existe $(R, S) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $P = (X^2 - 3X + 2)R$ et $Q = (X^2 - 3X + 2)S$. Donc :

$$\lambda P + Q = \lambda(X^2 - 3X + 2)R + (X^2 - 3X + 2)Q = (X^2 - 3X + 2)(\underbrace{\lambda R + S}_{\in \mathbb{R}[X]})$$

en factorisant par $X^2 - 3X + 2$. Donc $\lambda P + Q \in G$.

Finalement :

G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$

COMMENTAIRE

On peut en fait directement chercher une écriture vectorielle de G , comme cela est fait dans la question 2. Cela permet de traiter en même temps une partie de la question 2. !

2. Déterminer une base de F et de G .

On sait que :

$$\boxed{\text{une base de } F \text{ est } (1, X)}$$

Déterminons une base de G . Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} P \in G &\iff \exists Q \in \mathbb{R}[X], \quad P = (X^2 - 3X + 2)Q \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad P = (X^2 - 3X + 2)Q \quad \text{car } \deg(P) \leq 4 \text{ et } \deg(X^2 - 3X + 2) = 2 \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad P = (X^2 - 3X + 2)(aX^2 + bX + c) \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad P = c(X^2 - 3X + 2) + bX(X^2 - 3X + 2) + aX^2(X^2 - 3X + 2) \\ &\iff P \in \text{Vect}(X^2 - 3X + 2, X(X^2 - 3X + 2), X^2(X^2 - 3X + 2)) \end{aligned}$$

Autrement dit, $G = \text{Vect}(X^2 - 3X + 2, X(X^2 - 3X + 2), X^2(X^2 - 3X + 2))$. La famille :

$$\mathcal{B} = (X^2 - 3X + 2, X(X^2 - 3X + 2), X^2(X^2 - 3X + 2))$$

est génératrice de G et elle est libre car les polynômes de cette famille sont de degrés deux à deux distincts. Donc :

$$\boxed{\text{une base de } G \text{ est } \mathcal{B} = (X^2 - 3X + 2, X(X^2 - 3X + 2), X^2(X^2 - 3X + 2))}$$

3. En déduire une base de $\mathbb{R}_4[X]$ constituée de vecteurs de F et de G .

Juxtaposons les bases de F et de G obtenues ; la famille :

$$\mathcal{C} = (1, X, X^2 - 3X + 2, X(X^2 - 3X + 2), X^2(X^2 - 3X + 2))$$

est constituée de vecteurs de $\mathbb{R}_4[X]$ de degrés deux à deux distincts donc cette famille est libre. Comme elle contient 5 polynômes et que $\dim(\mathbb{R}_4[X]) = 5$, on peut conclure que

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}_4[X]}$$

4. Déterminer les coordonnées du polynôme X^4 exprimées dans cette base.

Comme $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ et puisque $X^4 \in \mathbb{R}_4[X]$, il existe (un unique) quintuplet $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tel que :

$$X^4 = a + bX + c(X^2 - 3X + 2) + dX(X^2 - 3X + 2) + eX^2(X^2 - 3X + 2)$$

En remplaçant X par 0, 1 et 2 on obtient les équations $a + 2c = 0$, $a + b = 1$ et $a + 2b = 16$ ce qui fournit $b = 15$, $a = -14$ et $c = 7$. Il reste :

$$X^4 = -14 + 15X + 7(X^2 - 3X + 2) + dX(X^2 - 3X + 2) + eX^2(X^2 - 3X + 2)$$

c'est-à-dire :

$$X^4 - 7X^2 + 6X = dX(X^2 - 3X + 2) + eX^2(X^2 - 3X + 2)$$

soit encore, en factorisant :

$$X(X^2 - 3X + 2)(X + 3) = X(X^2 - 3X + 2)(d + eX)$$

ce qui implique que $X + 3 = eX + d$ et donc, comme la famille $(1, X)$ est libre, on a $e = 1$ et $d = 3$. Finalement :

$$\boxed{\text{la matrice des coordonnées de } X^4 \text{ exprimée dans la base } \mathcal{C} \text{ est } \text{Mat}_{\mathcal{C}}(X^4) = \begin{pmatrix} -14 \\ 15 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 10 (C1-C2-C3-C4-C5-C6-C7)  On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose :

$$F(a) = \{P \in E \mid P(a) = 0\}$$

1. Montrer que $F(a)$ est un sous-espace vectoriel de E .

- Le polynôme nul appartient à $F(a)$ puisque $0_{\mathbb{R}_n[X]}(a) = 0$.
- Soient $(P, Q) \in F(a)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda P + Q \in F(a)$. Alors :

$$\begin{aligned} (\lambda P + Q)(a) &= \lambda P(a) + Q(a) = \lambda \times 0 + 0 && \text{car } P \in F(a) \text{ et } Q \in F(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\lambda P + Q \in F(a)$.

Ainsi, $F(a)$ est un sous-espace vectoriel de E .

COMMENTAIRE

En fait, $F(a)$ est le noyau de l'application linéaire :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \longmapsto P(a) \end{cases}$$

Or on sait que le noyau d'une application linéaire a une structure d'espace vectoriel.

2. Montrer que la famille $(X^i(X - a))_{0 \leq i \leq n-1}$ est une famille libre de E . En déduire une base puis la dimension de $F(a)$.

- Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, le polynôme $X^i(X - a)$, noté P_i est de degré $i+1 \leq n$. Donc $(P_0, \dots, P_{n-1})$ est donc une famille de polynômes de $E = \mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés. C'en est donc une famille libre.
- Remarquons par ailleurs que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $P_i(a) = 0$ donc $P_i \in F(a)$. Comme $F(a)$ est un sous-espace vectoriel de E , on a les inclusions :

$$\text{Vect}(P_1, \dots, P_n) \subset F(a) \subset E$$

et donc les inégalités :

$$\dim(\text{Vect}(P_1, \dots, P_n)) \leq \dim(F(a)) \leq \dim(E)$$

D'après ce qui précède, $\dim(\text{Vect}(P_1, \dots, P_n)) = n$ donc :

$$n \leq \dim(F(a)) \leq n+1$$

De plus, le polynôme constant égal à 1 appartient à E mais pas à $F(a)$ (puisque'il ne s'annule pas en a). Il s'ensuit donc que $F(a) \neq E$ (et donc nécessairement $\dim(F(a)) \neq n+1$). On déduit des inégalités précédentes que $\dim(F(a)) = n$. Donc :

$$\begin{cases} \text{Vect}(P_1, \dots, P_n) \subset F(a) \\ \dim(\text{Vect}(P_1, \dots, P_n)) = \dim(F(a)) \end{cases}$$

ce qui implique que $F(a) = \text{Vect}(P_1, \dots, P_n)$.

Finalement :

une base de $F(a)$ est $(P_1, \dots, P_n)$

puisque cette famille est libre et génératrice de $F(a)$.

3. Montrer que la famille $((X - a)^i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $F(a)$. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $F(a)$ dans cette base ?

La famille $((X - a)^i)_{1 \leq i \leq n}$ est constituée de polynômes de $F(a)$ (puisque'ils sont de degré inférieurs ou égaux à n et car ils s'annulent en a). Elle est de plus libre car les polynômes sont échelonnés en degré. Comme cette famille est composée de n vecteurs et que $\dim(F(a)) = n$, on peut conclure que :

la famille $((X - a)^i)_{1 \leq i \leq n}$, notée $\mathcal{B}$, est une base de $F(a)$

Soient $P \in F(a)$. Il existe alors un unique $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \sum_{k=1}^n \alpha_k (X - a)^k$.

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors :

$$P^{(j)} = \sum_{k=j}^n k(k-1) \dots (k-j+1) \alpha_k (X - a)^{k-j}$$

On a donc $P^{(j)}(a) = j! \alpha_j$ puis $\alpha_j = \frac{P^{(j)}(a)}{j!}$. Ainsi :

la matrice des coordonnées de $P \in F(a)$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} \frac{P'(a)}{1!} \\ \frac{P''(a)}{2!} \\ \vdots \\ \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \end{pmatrix}$

4. Soient a_1 et a_2 deux nombres réels distincts. On pose $F = F(a_1) \cap F(a_2)$.

- (a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E .

D'après la question 1., on sait que $F(a_1)$ et $F(a_2)$ est des sous-espaces vectoriels de E . On l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E donc :

F est un sous-espace vectoriel de E

- (b) Donner une base de F . Quelle est sa dimension ?

Un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ est tel que $P(a_1) = P(a_2) = 0$ si et seulement s'il est divisible par $X - a_1$ et par $X - a_2$, c'est-à-dire si et s'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - a_1)(X - a_2)Q$. Considérons alors la famille $\mathcal{C} = (X^i(X - a_1)(X - a_2))_{0 \leq i \leq n-2}$. Pour tout $i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, on a :

$$\deg((X^i(X - a_1)(X - a_2))) = \deg(X^i) + \deg(X - a_1) + \deg(X - a_2) = i + 2 \leq n$$

donc $X^i(X - a_1)(X - a_2) \in E$ et comme ce polynôme s'annule en a_1 et en a_2 , il appartient aussi à $F(a)$. La famille $\mathcal{C}$ est de plus libre (car les polynômes de la famille sont échelonnés en degrés) et est constituée de $n - 1$ vecteurs. Ceci implique que $\dim(F) \geq n - 1$. Par ailleurs, on sait que $F \subset F(a_1)$ et que $F \neq F(a_1)$ (en effet, $X - a_1 \in F(a_1)$ mais $X - a_1 \notin F$ puisqu'il ne s'annule pas en a_2 car $a_1 \neq a_2$). On en déduit donc que $\dim(F) < \dim(F(a_1))$, c'est-à-dire $\dim(F) < n - 1$. Finalement, $\dim(F) = n - 1$ et la famille $\mathcal{C}$ est donc une base de F .

Exercice 11 (C1-C2-C3-C4-C5-C6)  On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a-b+c & b-c & c \\ c & a-c & b+c \\ b & -b & a+b \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et la dimension.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} M(a, b, c) &= \begin{pmatrix} a-b+c & b-c & c \\ c & a-c & b+c \\ b & -b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ b & -b & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -c & c \\ c & -c & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= aI_3 + b \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En posant $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a alors :

$$E = \{aI_3 + bA + cB \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(I_3, A, B)$$

Donc :

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

dont une famille génératrice est (I_3, A, B) . On étudie ensuite la liberté de cette famille.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} \alpha I_3 + \beta A + \gamma B = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} &\iff \begin{pmatrix} a-b+c & b-c & c \\ c & a-c & b+c \\ b & -b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \dots \\ &\iff (a, b, c) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Donc la famille (I_3, A, B) est libre. Finalement :

$$\boxed{\text{une base de } E \text{ est } (I_3, A, B) \text{ et on a } \dim(E) = 3}$$

2. Montrer que E est stable par produit (c'est-à-dire que le produit de deux éléments de E appartient à E).

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} M(a, b, c)M(a', b', c') &= \begin{pmatrix} a-b+c & b-c & c \\ c & a-c & b+c \\ b & -b & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'-b'+c' & b'-c' & c' \\ c' & a'-c' & b'+c' \\ b' & -b' & a'+b' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa' - ab' + ac' - ba' + bb' + ca' & ba' + ab' - (ac' + ca' + bb') & ca' + ac' + bb' \\ ca' + ac' + bb' & aa' - (a'c + ac' + bb') & ba' + ab' + a'c + ac' + bb' \\ ba' + ab' & -ba' - ab' & aa' + ba' + ab' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En posant $A = aa'$, $B = ba' + ab'$ et $C = ca' + ac' + bb'$, on a montré que

$$M(a, b, c)M(a', b', c') = M(A, B, C)$$

donc l'espace vectoriel E est stable par produit.

Exercice 12 (C1-C3-C4-C5)  On considère les quatre matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

1. La famille $\mathcal{F} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ est-elle libre ? Si non, déterminer une relation de dépendance linéaire entre ces quatre matrices.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$. On résout :

$$\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 + \delta M_4 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

$$\iff \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + \gamma + \delta & \beta + \gamma + \delta \\ \alpha + \beta - \gamma - 2\delta & -\alpha + 2\beta - \gamma - 5\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma + \delta = 0 & \text{L}_1 \\ \beta + \gamma + \delta = 0 & \text{L}_2 \\ \alpha + \beta - \gamma - 2\delta = 0 & \text{L}_3 \\ -\alpha + 2\beta - \gamma - 5\delta = 0 & \text{L}_4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma + \delta = 0 & \text{L}_1 \\ \beta + \gamma + \delta = 0 & \text{L}_2 \\ -\beta - 2\gamma - 3\delta = 0 & \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 - \text{L}_1 \\ \beta - \delta = 0 & \text{L}_4 \leftarrow \frac{1}{4}(\text{L}_4 + \text{L}_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma + \delta = 0 & \text{L}_1 \\ \beta + \gamma + \delta = 0 & \text{L}_2 \\ -\gamma - 2\delta = 0 & \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 + \text{L}_2 \\ -\gamma - 2\delta = 0 & \text{L}_4 \leftarrow \text{L}_4 - \text{L}_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta = \delta \\ \gamma = -2\delta \end{cases}$$

$$\iff (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-\delta, \delta, -2\delta, \delta)$$

Par exemple, pour $\delta = 1$, on obtient que :

$$\boxed{-M_1 + M_2 - 2M_3 + M_4 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}; \text{ la famille } (M_1, M_2, M_3, M_4) \text{ est donc liée}}$$

2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ du sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{F}$ ainsi que la dimension de F .

On a :

$$F = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3, M_4) = \text{Vect}(M_2, M_3, M_4)$$

puisque $M_1 = M_2 - 2M_3 + M_4$ d'après la question précédente. Ainsi, $\mathcal{B} = (M_2, M_3, M_4)$ est une famille génératrice de F . Calculons le rang de cette famille de vecteurs en écrivant les vecteurs M_2, M_3 et M_4 dans la base canonique :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\text{rg}(\mathcal{B}) = \text{rg}(M_2, M_3, M_4) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{L}_1 \\ \text{L}_2 \\ \text{L}_3 \\ \text{L}_4 \end{matrix} = \dots = 3$$

Comme $\mathcal{B}$ est composée de 3 vecteurs, cette famille est donc libre. Ainsi :

une base de F est $\mathcal{B} = (M_2, M_3, M_4)$ et on a $\dim(F) = 3$

3. Justifier que $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ appartient à F et déterminer les coordonnées de A exprimées dans la base $\mathcal{B}$ de F .

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On résout :

$$\begin{aligned} A = \alpha M_2 + \beta M_3 + \gamma M_4 &\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma = 3 \\ 2\alpha - \beta - 5\gamma = 2 \end{cases} \\ &\iff \dots \\ &\iff (\alpha, \beta, \gamma) = (2, -3, 1) \end{aligned}$$

Ainsi :

le vecteur A appartient à F

et :

la matrice des coordonnées de A dans la base $\mathcal{B}$ de F est $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 13 (C4)

1. Pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer l'intégrale $\int_0^\pi \sin(px) \sin(qx) dx$.

Soient $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En linéarisant $\sin(px) \sin(qx)$ (...) on obtient :

$$\sin(px) \sin(qx) = \frac{\cos((p-q)x)}{2} + \frac{\cos((p+q)x)}{2}$$

On distingue ensuite deux cas.

- **Premier cas :** $p = q$

Alors :

$$\int_0^\pi \sin(px) \sin(qx) dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2px)}{2} \right) dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2px)}{4p} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

- **Deuxième cas :** $p \neq q$

Ici $p - q \neq 0$ (et $p + q \neq 0$) donc :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(px) \sin(qx) dx &= \int_0^\pi \left(\frac{\cos((p-q)x)}{2} + \frac{\cos((p+q)x)}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{\sin((p-q)x)}{2(p-q)} + \frac{\sin((p+q)x)}{2(p+q)} \right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \int_0^\pi \sin(px) \sin(qx) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } p = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la fonction f_p par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x) = \sin(px)$$

Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Indication : il n'est pas nécessaire de raisonner par récurrence ici.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \quad (2)$$

Montrons que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\alpha_k = 0$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En multipliant par f_k dans l'égalité (2), il vient :

$$\alpha_1 f_1 f_k + \dots + \alpha_n f_n f_k = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

Les fonctions mises en jeu dans cette égalité sont continues sur $[0, \pi]$ donc, en intégrant cette égalité entre 0 et π et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\alpha_1 \int_0^\pi f_1(x) f_k(x) dx + \dots + \alpha_n \int_0^\pi f_n(x) f_k(x) dx = \int_0^\pi 0 dx = 0$$

ce qui se réécrit :

$$\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \alpha_\ell \int_0^\pi f_\ell(x) f_k(x) dx + \alpha_k \int_0^\pi f_k(x)^2 dx = 0 \quad (3)$$

Or on sait d'après la question 1. que :

$$\forall \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \int_0^\pi f_\ell(x) f_k(x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } \ell = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans (3), il reste donc $\alpha_k \times \frac{\pi}{2} = 0$, c'est-à-dire $\alpha_k = 0$. Finalement :

la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Exercice 14 (C1-C2-C3-C4-C5-C6)  On considère les ensembles de suites suivants :

- E est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n$$

- F est l'ensemble des suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 2v_n$$

- G est l'ensemble des suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = -w_{n+1} - w_n$$

1. Montrer que E , F et G sont des espaces vectoriels.

— Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$\begin{aligned} (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F &\iff (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } 2 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 2^n \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$F = \{ \lambda (2^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}((2^n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Donc

F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

— Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors :

$$(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G \iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} + w_{n+1} + w_n = 0$$

$$\iff \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, w_n = A \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + B \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

car $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrence linéaire d'ordre deux d'équation caractéristique $x^2 + x + 1 = 0$ dont les racines sont $e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$a_n = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$$

Alors :

$$G = \{A(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + B(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

— Il reste à montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite nulle $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ appartient bien à E puisque $0 = 6 \times 0 + 11 \times 0 - 6 \times 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in E^2$. Montrons que $\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Tout d'abord :

$$\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} 6(\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) + 11(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) - 6(\lambda u_n + v_n) &= \lambda(6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n) + (6v_{n+2} + 11v_{n+1} - 6v_n) \\ &= \lambda u_{n+3} + v_{n+3} \end{aligned}$$

car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Ainsi, $\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Finalement :

E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

COMMENTAIRE

On peut démontrer également que F et G sont des espaces vectoriels *à la main* (c'est-à-dire comme on l'a fait pour E).

2. Déterminer une base et la dimension de F et G .

— D'après la question 1., la famille $((2^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est génératrice de F . Elle est de plus libre car constituée d'un unique vecteur non nul. Donc :

une base de F est $((2^n)_{n \in \mathbb{N}})$ et $\dim(F) = 1$

- De la même manière, une famille génératrice de G est $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Montrons qu'elle est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\alpha(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha a_n + \beta b_n = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = 0$$

Pour $n = 0$, on trouve $\alpha = 0$ et pour $n = 1$, on obtient $\alpha \frac{\sqrt{3}}{2} + \beta \frac{1}{2} = 0$ d'où $\beta = 0$. La famille $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est donc libre. Ainsi :

la famille $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une base de G et $\dim(G) = 2$

3. Montrer que l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \quad \varphi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_0, u_1, u_2)$$

est linéaire et bijective. En déduire la dimension de E .

Définition : si E et F sont des espaces vectoriels (*quelconques*), alors une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in E^2, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in E^2$. Montrons que $\varphi(\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \lambda\varphi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) + \varphi((v_n)_{n \in \mathbb{N}})$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) &= \varphi((\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \\ &= (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1, \lambda u_2 + v_2) \\ &= \lambda(u_0, u_1, u_2) + (v_0, v_1, v_2) \\ &= \lambda\varphi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) + \varphi((v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \end{aligned}$$

Donc $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^3)$.

On étudie ensuite la surjectivité et l'injectivité de φ .

• **Surjectivité de φ .**

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}$. Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $u_2 = c$ et par $u_{n+3} = 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ et $\varphi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (a, b, c)$. L'application φ est donc surjective.

• **Injectivité de φ .**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Alors :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ker}(\varphi) \iff (u_0, u_1, u_2) = (0, 0, 0)$$

On montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 0$ (propriété $\mathcal{P}_n$) à l'aide d'une récurrence *forte* et en exploitant le fait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ (c'est-à-dire en utilisant la relation de récurrence qui caractérise E). On obtient donc $\text{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$. L'application φ est donc injective.

Finalement, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E dans $\mathbb{R}^3$. On en déduit donc que :

$$\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

- 4.(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \in E &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda^{n+3} = 6\lambda^{n+2} + 11\lambda^{n+1} - 6\lambda^n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda^n(\lambda^3 - 6\lambda^2 - 11\lambda + 6) = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda^3 - 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0 \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda^3 - 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0}$$

- (b) En déduire une base de E .

Réolvons l'équation $\lambda^3 - 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$ dans $\mathbb{R}$. On remarque que $\lambda = 1$ est racine. On peut donc factoriser le polynôme de degré 3 par $\lambda - 1$. On a :

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Les racines cherchées sont donc 1, 2 et 3. D'après la question 4.(a), la suite $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ constante égale à 1 et les suites $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à E .

Montrons maintenant que la famille $\mathcal{B} = ((1)_{n \in \mathbb{N}}, (2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(1)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(2^n)_{n \in \mathbb{N}} + \gamma(3^n)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$. Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha + \beta 2^n + \gamma 3^n = 0$$

Les choix $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ (par exemple) permettent de déterminer α , β et γ . On résout :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & L_1 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 & L_2 \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma = 0 & L_3 \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & L_1 \\ \beta + 2\gamma = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3\beta + 8\gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & L_1 \\ \beta + 2\gamma = 0 & L_2 \\ \gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases} \\ &\iff (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Finalement, la famille $\mathcal{B}$ est libre dans E . Cette famille comporte de plus trois vecteurs et on sait que $\dim(E) = 3$. Donc :

$$\boxed{\text{une base de } E \text{ est } \mathcal{B} = ((1)_{n \in \mathbb{N}}, (2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}})}$$

5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de E telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 2$. Déterminer l'expression de cette suite.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E dont une base est $((1)_{n \in \mathbb{N}}, (2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}})$. Il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \alpha(1)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(2^n)_{n \in \mathbb{N}} + \gamma(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha + \beta 2^n + \gamma 3^n$$

On détermine les valeurs de α , β et γ à l'aide des valeurs de u_0 , u_1 et u_2 . On résout :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 & L_1 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 & L_2 \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma = 2 & L_3 \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 & L_1 \\ \beta + 2\gamma = -1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3\beta + 8\gamma = 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 & L_1 \\ \beta + 2\gamma = -1 & L_2 \\ 2\gamma = 4 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases} \\ &\iff (\alpha, \beta, \gamma) = (4, -5, 2) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4 - 5 \times 2^n + 2 \times 3^n$$

Exercice 15 (C1-C4)  On considère un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

Pour tout entier $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^n e_i - e_j$.

1. On suppose ici que $n = 3$. Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E.

On a :

$$\varepsilon_1 = e_2 + e_3, \quad \varepsilon_2 = e_1 + e_3 \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = e_1 + e_2$$

La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est composée de 3 vecteurs et l'espace vectoriel E est de dimension 3. Pour démontrer que cette famille est une base de E, il suffit donc de montrer que son rang est égal à 3. On calcule le rang de cette famille en explicitant chacun de ses vecteurs dans la base (e_1, e_2, e_3) de E :

$$\text{rg}(\mathcal{B}) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \dots = 3$$

Ainsi :

$$\text{la famille } (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ est une base de E}$$

COMMENTAIRE

On peut tout à fait commencer par établir la liberté de la famille en utilisant la définition de la liberté.

2. On revient maintenant au cas général (*i.e.* que n est quelconque supérieur ou égal à 2).

- (a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E.

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i = 0_E$. Montrons que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $a_i = 0$. En explicitant les vecteurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, on obtient :

$$(a_2 + \dots + a_n)e_1 + (a_1 + a_3 + \dots + a_n)e_2 + \dots + (a_1 + \dots + a_{n-1})e_n = 0_E$$

Or la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre (puisqu'il s'agit d'une base de E donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_2 + \dots + a_n = 0 & L_1 \\ a_1 + a_3 + \dots + a_n = 0 & L_2 \\ \vdots & \\ a_1 + \dots + a_{n-1} = 0 & L_n \end{array} \right.$$

Soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$. L'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - L_1$ fournit l'égalité $a_i = a_1$. En remplaçant dans L_1 , on obtient $na_1 = 0$ et donc $a_1 = 0$ puisque $n \neq 0$. Finalement, $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ donc :

$$\text{la famille } \mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \text{ est libre}$$

- (b) Déterminer la matrice P des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{C}$ exprimées dans la base $\mathcal{B}$. Les vecteurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont exprimés en fonction de $e_1, \dots, e_n$ donc la matrice P cherchée est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Déterminer de même la matrice Q des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimées dans la base $\mathcal{C}$.

Indication : on commencera par calculer $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$.

Il s'agit d'exprimer les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ en fonction des vecteurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n e_i - e_j \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n e_i - \sum_{j=1}^n e_j = \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) \sum_{j=1}^n 1 - \sum_{j=1}^n e_j \\ &= n \sum_{j=1}^n e_j - \sum_{j=1}^n e_j \\ &= (n-1) \sum_{j=1}^n e_j \end{aligned}$$

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par définition de ε_j , on a :

$$e_j = \sum_{i=1}^n e_i - \varepsilon_j = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i - \varepsilon_j$$

La matrice Q cherchée est donc :

$$Q = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2-n \end{pmatrix}$$