
TD 5 - Espaces vectoriels

Compétences à acquérir :

- ▷ C1 : Connaître les règles de calcul dans un espace vectoriel et le vocabulaire : combinaison linéaire de vecteurs, vecteur nul, scalaires, coordonnées...
- ▷ C2 : Démontrer qu'un espace est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel ou un espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs
- ▷ C3 : Déterminer une famille génératrice d'un espace vectoriel et connaître les propriétés liées
- ▷ C4 : Démontrer qu'une famille est libre et connaître les propriétés liées
- ▷ C5 : Déterminer une base *finie* d'un espace vectoriel (de dimension finie), déterminer les coordonnées d'un vecteur exprimé dans une base
- ▷ C6 : Déterminer la dimension d'un espace vectoriel et connaître les propriétés liées (en lien avec les familles libres ou génératrices notamment)
- ▷ C7 : Déterminer le rang d'une famille de vecteurs
- ▷ C8 : Connaître les propriétés propres aux espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Exercice 1 (C1-C2-C3-C4-C5-C6) Les trois questions sont indépendantes.

1. Soient P_1 et P_2 les plans de $\mathbb{R}^3$ d'équations cartésiennes :

$$2x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad x + y + z = 0$$

Montrer que P_1 , P_2 et $P_1 \cap P_2$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Pour chacun d'entre eux, en donner une base et la dimension.

2. On pose :

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + 2t = 0 \text{ et } x + 2y + 2z - t = 0\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et la dimension.

3. Soit $F = \{(\alpha + \beta, \alpha, \alpha - \beta) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et en donner une écriture cartésienne.

Exercice 2 (C4) Soient a et b deux nombres réels. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les trois vecteurs :

$$v_1 = (1, a, 2, 1), \quad v_2 = (3, a, 2, 3) \quad \text{et} \quad v_3 = (0, 1, b, 0)$$

1. Montrer que ces trois vecteurs forment une famille liée si et seulement si $ab = 2$.
2. Dans ce cas, exprimer le vecteur v_2 en fonction de v_1 et v_3 .
3. Déterminer une représentation cartésienne du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs v_1 , v_2 et v_3 (ici, a et b sont quelconques).

Exercice 3 (C1-C2-C3-C4-C5-C6) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose :

$$F_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (1 - \lambda)x + 2z = 0 \text{ et } x + (1 - \lambda)y + z = 0 \text{ et } 2x + (1 - \lambda)z = 0\}$$

Montrer que F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en donner une base et la dimension en fonction du paramètre λ .

Exercice 4 (C2-C4-C7-C8) ☐ Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$\vec{u} = (1, 1, 1, -1), \quad \vec{v} = (-2, 0, 1, 1) \quad \text{et} \quad \vec{w} = (1, -2, 1, 0)$$

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une équation ou un système d'équations cartésiennes du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
3. Compléter cette famille pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5 (C1-C2) ☐ Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels :

1. de $\mathbb{R}[X]$?
 - (a) $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(2) = 0\}$
 - (b) $B = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P - 2P' = 0\}$
 - (c) $C = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 2\}$
 - (d) $D = \{aX^2 + b(X+1) + c \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
2. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (*i.e.* de l'espace vectoriel des suites réelles) ?
 - (a) $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}\}$
 - (b) $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est arithmétique de raison } -1\}$
 - (c) $G = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2\}$
3. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (*i.e.* de l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles) ?
 - (a) l'ensemble H des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 1
 - (b) l'ensemble I des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$
 - (c) l'ensemble J des fonctions paires sur $\mathbb{R}$
 - (d) l'ensemble des fonctions positives sur $\mathbb{R}$
4. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
 - (a) l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques
 - (b) l'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles
 - (c) l'ensemble E des matrices scalaires

Exercice 6 (C3-C4-C5-C8) ☐ 1. On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants :

$$P_1 = 1 + X + 2X^2, \quad P_2 = -2 - X - X^2, \quad P_3 = 1 - X + X^2 \quad \text{et} \quad P_4 = -X + 2X^2$$

La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle libre ? Si ce n'est pas le cas, donner une relation de dépendance linéaire entre les quatre polynômes de la famille.

2. On pose $Q_1 = 1 + X + 2X^2 + X^3$,

$$Q_2 = -1 + X + 2X^2 + 3X^3, \quad Q_3 = 2 + X + 2X^3 \quad \text{et} \quad Q_4 = 3 + X^2 + X^3$$

- (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
- (b) Déterminer les coordonnées du vecteur $P = -1 + 3X + 3X^2 + 5X^3$ exprimées dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 7 (C3-C4-C5-C8) ☐ 1. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer les coordonnées d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. En déduire la nature et la somme éventuelle de la série :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{3n^2 - 4n + 6}{2^n}$$

Exercice 8 (C4) ☞ On note E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

1. On considère les fonctions :

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto \cos(x), \quad f_3 : x \mapsto \cos(2x) \quad \text{et} \quad f_4 : x \mapsto \cos(x)^2$$

La famille $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est-elle libre ?

2. On considère les fonctions :

$$g_1 : x \mapsto 1, \quad g_2 : x \mapsto x^3 + 1 \quad \text{et} \quad g_3 : x \mapsto |x^3|$$

La famille $\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3)$ est-elle libre ?

Exercice 9 (C1-C2-C3-C4-C5-C8) ☞ Étant donnés deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on dit que Q *divise* P (ou que P est *factorisable* par Q) s'il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QR$. Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ et G l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ divisibles par $X^2 - 3X + 2$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Déterminer une base de F et de G .
3. En déduire une base de $\mathbb{R}_4[X]$ constituée de vecteurs de F et de G .
4. Déterminer les coordonnées du polynôme X^4 exprimées dans cette base.

Exercice 10 (C1-C2-C3-C4-C5-C6-C7) ☞ On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose :

$$F(a) = \{P \in E \mid P(a) = 0\}$$

1. Montrer que $F(a)$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que la famille $(X^i(X - a))_{0 \leq i \leq n-1}$ est une famille libre de E . En déduire une base puis la dimension de $F(a)$.
3. Montrer que la famille $((X - a)^i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $F(a)$. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $F(a)$ dans cette base ?
4. Soient a_1 et a_2 deux nombres réels distincts. On pose $F = F(a_1) \cap F(a_2)$.
 - (a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E .
 - (b) Donner une base de F . Quelle est sa dimension ?

Exercice 11 (C1-C2-C3-C4-C5-C6) ☞ On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a - b + c & b - c & c \\ c & a - c & b + c \\ b & -b & a + b \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et la dimension.
2. Montrer que E est stable par produit (c'est-à-dire que le produit de deux éléments de E appartient à E).

Exercice 12 (C1-C3-C4-C5) ☞ On considère les quatre matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

1. La famille $\mathcal{F} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ est-elle libre ? Si non, déterminer une relation de dépendance linéaire entre ces quatre matrices.

2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ du sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{F}$ ainsi que la dimension de F .
3. Justifier que $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ appartient à F et déterminer les coordonnées de A exprimées dans la base $\mathcal{B}$ de F .

Exercice 13 (C4)  1. Pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer l'intégrale $\int_0^\pi \sin(px) \sin(qx) dx$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la fonction f_p par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x) = \sin(px)$$

Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Indication : il n'est pas nécessaire de raisonner par récurrence ici.

Exercice 14 (C1-C2-C3-C4-C5-C6)  On considère les ensembles de suites suivants :

- E est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n$$

- F est l'ensemble des suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 2v_n$$

- G est l'ensemble des suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = -w_{n+1} - w_n$$

1. Montrer que E , F et G sont des espaces vectoriels.
2. Déterminer une base et la dimension de F et G .
3. Montrer que l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \quad \varphi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_0, u_1, u_2)$$

est linéaire et bijective. En déduire la dimension de E .

- 4.(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$.
- (b) En déduire une base de E .
5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de E telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 2$. Déterminer l'expression de cette suite.

Exercice 15 (C1-C4)  On considère un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .

Pour tout entier $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^n e_i - e_j$.

1. On suppose ici que $n = 3$. Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E .
2. On revient maintenant au cas général (*i.e.* que n est quelconque supérieur ou égal à 2).
 - (a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E .
 - (b) Déterminer la matrice P des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{C}$ exprimées dans la base $\mathcal{B}$.
 - (c) Déterminer de même la matrice Q des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimées dans la base $\mathcal{C}$.

Indication : on commencera par calculer $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$.