

Chapitre 6

Applications linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Application linéaire en dimension quelconque

1.1 Application linéaire

Définition 1.1.1. On considère E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.
Soit f une **application** de E dans F , on dit qu'elle est **linéaire** si :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Remarque 1.1.1. Cette caractérisation est équivalente à la suivante :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

Méthode 1.1. Pour montrer que $f : E \rightarrow F$ est linéaire, on considère $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, puis on montre que

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Exemple 1.1.1. Montrer que l'application suivante est linéaire

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, 3x - y)$$

Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On calcule } f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= ((\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y'), 3(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y')) \\ &= (\lambda(x + y), 3\lambda x - \lambda y) + \mu(x' + y', 3x' - y') \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire.

Proposition 1.1.1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors

$$f(0_E) = 0_F.$$

Démonstration.

Soit $x \in E$, on a $f(x-x) = f(0_E)$,
 or par linéarité de f , $f(x-x) = f(x) - f(x) = 0_F$

$$\text{donc } \boxed{f(0_E) = 0_F}.$$

□

Définition 1.1.2. Soit f une application linéaire de E dans F , deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- Si f est bijective, alors on dit que f est un **isomorphisme**.
- Si $E = F$, alors on dit que f est un **endomorphisme** et l'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Exemple 1.1.2. 1. Montrer que l'application suivante est un endomorphisme.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto P' + P \end{aligned}$$

→ Montrons que f est à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P' \in \mathbb{R}[X]$ donc par somme de polynômes $\boxed{f(P) \in \mathbb{R}[X]}$.

→ Montrons que f est une application linéaire.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on calcule

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)' + (\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda P' + \mu Q' + \lambda P + \mu Q \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda(P' + P) + \mu(Q' + Q) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

donc $\boxed{f \text{ est une application linéaire}}.$

Conclu. $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}.$

2. Montrer que l'application suivante est un endomorphisme et un isomorphisme.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

→ f est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par définition.

→ Montrons que f est une application linéaire.

Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on calcule

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= ((\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y')) \\ &= \lambda(x + y, x - y) + \mu(x' + y', x' - y') \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \text{ donc } f \text{ est une application linéaire.} \end{aligned}$$

Conclusion: f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

→ Montrons que f est bijective.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (\alpha, \beta)$.

$$\text{On a } f(x, y) = (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = \beta \end{cases} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \alpha + \beta \\ 2y = \alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ y = \frac{\alpha - \beta}{2} \end{cases}$$

Il y a donc existence et unicité de l'antécédent de (α, β) par f , donc

f est bijective.

Conclusion: f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.1.3. Soient E et F deux espaces vectoriels. Ces espaces sont dits **isomorphes** s'il existe un isomorphisme $f : E \rightarrow F$ ou un isomorphisme $g : F \rightarrow E$.

Exemple 1.1.3. Montrer que $\mathbb{R}^3$ est isomorphe à $\mathbb{R}_2[X]$.

On pose $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$.
 $(a, b, c) \mapsto aX^2 + bX + c$

→ Montrons que f est une application linéaire .

Soient $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on calcule :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c') \\ &= (\lambda a + \mu a')X^2 + (\lambda b + \mu b')X + \lambda c + \mu c' \\ &= \lambda(aX^2 + bX + c) + \mu(a'X^2 + b'X + c') \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire .

→ Montrons que f est une bijection .

On a $f^{-1} : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $aX^2 + bX + c \mapsto (a, b, c)$

→ ainsi, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ est un isomorphisme donc $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes.

Proposition 1.1.2. Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration.

Soit E un es de dimension n .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $x \in E$, par définition d'une base, $\exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

On pose $f : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ qui à x associe son unique jeu de coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
 $x \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

base $\mathcal{B}$.

On a $f^{-1} : \mathbb{K}^n \rightarrow E$. Alors f est un isomorphisme .
 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$

□

Proposition 1.1.3. Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $h \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

- $f + \lambda g \in \mathcal{L}(E, F)$;
- $h \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$;
- si f est un isomorphisme de E vers F , alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$;
- si h et f sont bijectives, alors $h \circ f$ est aussi bijective (de E vers G).

Exemple 1.1.4. Calculer $g \circ f$ puis montrer que c'est une application linéaire.

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\underline{x}, \underline{y}) \mapsto (\underline{x} + 2\underline{y}, \underline{y})$$

→ Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on calcule :

$$\begin{aligned} g \circ f(x, y, z) &= g(f(x, y, z)) = g(\underline{x+y+z}, \underline{x-y}) \\ &= ((\underline{x+y+z}) + 2(\underline{x-y}), \underline{x-y}) \\ &= (3x - y + z, x - y) \end{aligned}$$

On a donc

$$g \circ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (3x - y + z, x - y).$$

→ Montrons que $g \circ f$ est une application linéaire.

Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on calcule

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda u + \mu v) &= g \circ f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= (3(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y')) \\ &= \lambda(3x - y + z, x - y) + \mu(3x' - y' + z', x' - y') \\ &= \lambda g \circ f(u) + \mu g \circ f(v) \end{aligned}$$

dnc $g \circ f$ est une application linéaire.

Notation 1.1.4.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose : $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $f^0 = \text{Id}_E$.

Exemple 1.1.5. Calculer f^2 où

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (2x + y, -y)$$

Sait $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f^2(x, y) = f(f(x, y))$

$$= f(2x + y, -y)$$

$$= (2(2x + y) + (-y), -(-y))$$

$$= (4x + y, y)$$

donc $f^2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (4x + y, y).$$

1.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 1.2.1.

- On appelle **noyau** de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et on note :

$$\ker(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$$

- On appelle **image** de f et on note :

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{v \in F \mid \exists u \in E, f(u) = v\}$$

Méthode 1.2. Pour déterminer le noyau de $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on considère $x \in E$ et on résout l'équation (ou le système d'équations) $f(x) = 0_F$.

Exemple 1.2.1. On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x + y, 2x + 2y)$$

Déterminer le noyau de f .

Sait $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 - L_1 - 2L_1 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -y$$

$$\Leftrightarrow u = y(-1, 1) \text{ donc } \ker(f) = \text{Vect}((-1, 1)).$$

Théorème 1.2.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E
- $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration.

→ Montrons que $\ker(f)$ est un sev de E .

• $\ker(f) \subset E$ par définition.

• On a $f(0_E) = 0_F$ car f est une application linéaire donc $0_E \in \ker(f)$.

• Soit $(u, v) \in \ker(f)^2$ et soit $(\lambda, \mu) \in K^2$, on montre que $\lambda u + \mu v \in \ker(f)$.

$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ par linéarité de f

$$\begin{aligned} &= \lambda \cdot 0_F + \mu \cdot 0_F \text{ car } u \in \ker(f) \text{ donc } f(u) = 0_F \\ &\quad \text{et } v \in \ker(f) \text{ donc } f(v) = 0_F \\ &= 0_F \text{ donc } \lambda u + \mu v \in \ker(f) \end{aligned}$$

Ainsi $\ker(f)$ est stable par combinaison linéaire.

Conclusion : $\ker(f)$ est un sev de E .

→ Montrons que $\text{Im}(f)$ est un sev de F .

• $\text{Im}(f) \subset F$ par définition.

• On a $f(0_E) = 0_F$ car f est une application linéaire donc $0_F \in \text{Im}(f)$.

• Soient $(u, v) \in \text{Im}(f)^2$ et $(\lambda, \mu) \in K^2$.

On veut voir $\lambda u + \mu v \in \text{Im}(f)$.

Comme $u \in \text{Im}(f)$, on considère $a \in E$ tq $f(a) = u$.

Comme $v \in \text{Im}(f)$, on considère $b \in E$ tq $f(b) = v$.

On calcule alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda a + \mu b) &= \lambda f(a) + \mu f(b) \text{ par linéarité de } f \\ &= \lambda u + \mu v \end{aligned}$$

donc $\lambda u + \mu v$ a un antécédent par f , donc

$\lambda u + \mu v \in \text{Im}(f)$.

Ainsi $\text{Im}(f)$ est stable par combinaison linéaire.

Conclusion : $\text{Im}(f)$ est un sev de F .

□

Théorème 1.2.2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est **injective** si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
2. f est **surjective** si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

Démonstration.

- 1) f injective $\Leftrightarrow (\forall (u, u') \in E^2, f(u) = f(u') \Leftrightarrow u = u')$
 $\Leftrightarrow (\forall (u, u') \in E^2, f(u) - f(u') = 0_F \Leftrightarrow u - u' = 0_E)$
 $\Leftrightarrow (\forall (u, u') \in E^2, f(u - u') = 0_F \Leftrightarrow u - u' = 0_E)$ car f est linéaire
 $\Leftrightarrow \forall v \in E, f(v) = 0_F \Leftrightarrow v = 0_E$
 $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0_E\}$
- 2) C'est la définition de surjectivité.

□

2 Application linéaire en dimension finie

2.1 Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base

Théorème 2.1.1. Soient E et F des espaces vectoriels de **dimension finie**.

Soient $f : E \rightarrow F$ une **application linéaire** et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base de E** .

L'application f est entièrement définie par la donnée des vecteurs $f(e_i)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

En effet, pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.

On a alors

$$f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n).$$

Démonstration.

Soit $x \in E$, comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , on considère les coordonnées

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ de x dans cette base : $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.

$$\text{Alors } f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) \text{ car } f \text{ est une application linéaire}$$

donc si on connaît $f(e_1), \dots, f(e_n)$, on connaît $f(x)$.

Exemple 2.1.1. Calculer $f(1, 2)$ sachant que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une application linéaire avec $f(1, 0) = (2, 3, 1)$ et $f(0, 1) = (-2, 0, 1)$.

On remarque que $(1, 2) = 1 \times (1, 0) + 2 \times (0, 1)$

$$\begin{aligned} \text{dnc } f(1, 2) &= f(1 \times (1, 0) + 2 \times (0, 1)) \\ &= 1 \times f(1, 0) + 2 \times f(0, 1) \text{ par linéarité de } f \\ &= (2, 3, 1) + (-4, 0, 2) \\ &= (-2, 3, 3) \end{aligned}$$

Théorème 2.1.2. Soient E et F des espaces vectoriels de **dimension finie**.
Soient $f : E \rightarrow F$ une **application linéaire** et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base de E** .
Alors on a

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Méthode 2.1. Pour déterminer l'image de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie, on calcule les images des vecteurs d'une base de E , puis $\text{Im}(f)$ est l'espace vectoriel engendré par ces images.

Exemple 2.1.2. Calculer $\text{Im}(f)$ pour

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (3x - y, x, -y) \end{aligned}$$

On considère la base canonique de $\mathbb{R}^2$: $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.

On calcule $f(e_1) = (3, 1, 0)$ et $f(e_2) = (-1, 0, -1)$.

Ainsi $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}((3, 1, 0), (-1, 0, -1))}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une base de $\text{Im}(f)$.

Corollaire 2.1.3. Soient E et F des espaces vectoriels de **dimension finie**.
Soient $f : E \rightarrow F$ une **application linéaire** et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base de E** .
Alors f est une application linéaire **injective** si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F .

Exemple 2.1.3. Montrer que l'application linéaire de l'exemple 2.1.2 est injective.

La famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires donc l'application $\boxed{f \text{ est injective}}$.

Corollaire 2.1.4. Soient E et F des espaces vectoriels de **dimension finie**.
 Soient $f : E \rightarrow F$ une **application linéaire** et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base de E** .
 Alors f est un **isomorphisme** si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une **base de F**

Remarque 2.1.1. Autrement dit, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme si et seulement si l'image par f d'une base de E est une base de F .

Exemple 2.1.4. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base quelconque de $\mathbb{R}^n$. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f(\varepsilon_k) = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j$$

1. Justifier que la famille $(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), \dots, f(\varepsilon_n))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

On écrit la matrice des coordonnées de la famille $(f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n))$ dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est échelonnée et de rang n , donc la famille $(f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n))$ est de $\text{rg } n$.

C'est donc une famille libre de cardinal n dans $\mathbb{R}^n$ et $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Ainsi, la famille $(f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

2. Que peut-on en déduire ?

On en déduit que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

2.2 Rang d'une application linéaire

Définition 2.2.1. Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie.
Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.
La dimension de $\text{Im}(f)$ est appelée le **rang de f** et notée $\text{rg}(f)$.

Exemple 2.2.1. Calculer le rang de l'application linéaire f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - y, 2x - 2y) \end{aligned}$$

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

On calcule $f(e_1) = (1, 2)$, $f(e_2) = (-1, -2)$, $f(e_3) = (0, 0)$

$$\begin{aligned} \text{donc } \text{Im}(f) &= \text{Vect}((1, 2), (-1, -2), (0, 0)) \\ &= \text{Vect}((1, 2)) \end{aligned}$$

De plus, $(1, 2) \neq 0$, il donc il forme une famille libre, et donc une base de $\text{Im}(f)$. Ainsi $\boxed{\text{rg}(f) = 1}$.

2.3 Théorème du rang

Théorème 2.3.1 (Théorème du rang).

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et E de dimension finie.

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\ker(f)).$$

Exemple 2.3.1. 1. Un exemple dans lequel on calcule d'abord le rang puis on en déduit des informations sur le noyau.

(a) Calculer la dimension du noyau de l'application définie dans l'exemple 2.2.1.

Par théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^3) = \text{rg}(f) + \dim(\ker(f))$

$$\Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{rg}(f)$$

$$\Leftrightarrow \dim(\ker(f)) = 3 - 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dim(\ker(f)) = 2}.$$

(b) Déterminer une base du noyau.

On remarque que $f(e_1) = -f(e_2) \Leftrightarrow f(e_1 + e_2) = 0_{\mathbb{R}^2}$ et $f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^2}$
 donc $e_1 + e_2 \in \ker(f)$ et $e_3 \in \ker(f)$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de cardinal 2 d'éléments de $\ker(f)$, or $\dim(\ker(f)) = 2$, donc $\boxed{(e_1 + e_2, e_3) \text{ forme une base de } \ker(f)}$
 et $\ker(f) = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_3)$.

2. Un exemple dans lequel on calcule d'abord la dimension du noyau puis on en déduit des informations sur le rang et $\text{Im}(f)$.

(a) Déterminer le noyau de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y)$.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x - y \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = x(1, -2, 1)$$

$$\text{donc } \boxed{\ker(f) = \text{Vect}((1, -2, 1))}.$$

(b) En déduire le rang de f .

Comme $(1, -2, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, la famille $((1, -2, 1))$ est une famille libre, et donc une base de $\ker(f)$. Ainsi, $\dim(\ker(f)) = 1$.

$$\text{Par thm du rang, } \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$$

$$\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f))$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{rg}(f) = 3 - 1 = 2}.$$

(c) Donner une base de l'image de f .

Il suffit de trouver deux vecteurs linéairement indépendants de $\text{Im}(f)$ pour avoir une base de $\text{Im}(f)$.

On considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{On calcule } f(1,0,0) = (1,2)$$

$$f(0,1,0) = (1,1).$$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de cardinal 2 de $\text{Im}(f)$, et $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = 2$ donc ils forment une base de $\text{Im}(f)$.

$$\text{Ainsi: } \boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}((1,2), (1,1))}.$$

Théorème 2.3.2. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire avec $\dim(E) = \dim(F)$.
On a alors f injective $\iff f$ surjective $\iff f$ bijective.

Démonstration.

$$f \text{ injective} \iff \ker(f) = \{0_E\}$$

$$\iff \dim(\ker(f)) = 0$$

$$\iff \text{rg}(f) = \dim(E) \quad \downarrow \text{Thm du rang}$$

$$\iff \text{rg}(f) = \dim(F) \quad \downarrow \dim(E) = \dim(F)$$

$$\iff \text{Im}(f) = F$$

$$\iff f \text{ est surjective}$$

$$\iff f \text{ est bijective.}$$

□

Corollaire 2.3.3. Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme de E .

- Tout endomorphisme injectif de E est un isomorphisme de E .
- Tout endomorphisme surjectif de E est un isomorphisme de E .

Exemple 2.3.2. Montrer que l'application suivante est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$$

→ f est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par définition

→ Montrons que f est une application linéaire.

Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \text{On calcule : } f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= ((\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y')) \\ &= \lambda(x + y, x - y) + \mu(x' + y', x' - y') \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

→ Déterminons le noyau de f . Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ donc } \ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}, \text{ donc } f \text{ est injective.}$$

→ f est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^2$, donc f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

3 Lien entre matrices et applications linéaires

3.1 Matrice associée à une application linéaire

Définition 3.1.1. Soient E un espace vectoriel de dimension p , de base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et F un espace vectoriel de dimension finie n , de base $\mathcal{B}_F$.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, on appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$** la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$, définie colonne par colonne comme suit :

$$\forall j \in [1, p], C_j = f(e_j).$$

Exemple 3.1.1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (0, 1, -1)$ et $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\mathcal{B}_2 = (f_1, f_2)$ où $f_1 = (1, 0)$ et $f_2 = (0, 1)$. Soit f l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y + 2z, x - y).$$

Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}(f)$.

On calcule $f(1, 0, 0) = (1, 1)$

$f(0, 1, 0) = (3, -1)$

$f(0, 0, 1) = (-1, -1)$

dnc $\text{Mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}$

Remarque 3.1.1. Si f est un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ une base de E , on note plus simplement $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ au lieu de $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$. Cette matrice est alors une matrice carrée d'ordre n .

Définition 3.1.2. Soit E un espace vectoriel de dimension n .

Pour n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$ où I_n désigne la matrice identité d'ordre n .

Théorème 3.1.1. L'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F est de dimension $\dim(E) \times \dim(F)$.

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Exemple 3.1.2. Déterminer la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

$$\dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)) = \dim(\mathbb{R}^2) \times \dim(\mathbb{R}^3)$$

$$= 2 \times 3$$

$$= 6$$

3.2 Détermination de l'application linéaire à partir de la matrice

Définition 3.2.1. Soient E un espace vectoriel de dimension p , de base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et F un espace vectoriel de dimension finie n , de base $\mathcal{B}_F$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application linéaire $f : E \rightarrow F$ associée à A est définie par

$$\forall x \in E, \underbrace{f(X)}_{\substack{\text{vecteur colonne des} \\ \text{coordonnées de } f(x) \text{ dans} \\ \text{la base } \mathcal{B}_F}} = A \times \underbrace{X}_{\substack{\text{vecteur colonne des} \\ \text{coordonnées de } x \text{ dans} \\ \text{la base } \mathcal{B}_E}}.$$

Exemple 3.2.1. Déterminer l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

L'application linéaire canoniquement associée à A est :

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y + 3z, x - 2y - z)$$

Exemple 3.2.2. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $f(1, 2)$.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad f(1, 2) = (3, 8, 0).$$

3.3 Rang d'une matrice

Définition 3.3.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le rang de la matrice A est le rang de la famille constituée par ses vecteurs colonnes.

On le note $\text{rg}(A)$.

Exemple 3.3.1. Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

On échelonne la matrice A :

$$\text{rg}(A) \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

La matrice échelonnée possède 2 pivots donc $\text{rg}(A) = 2$.

Théorème 3.3.1. Soient E et F deux espaces vectoriels, de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et A la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Alors

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(A).$$

Remarque 3.3.1. Le rang d'une application linéaire est égal au rang de n'importe laquelle de ses matrices.

Exemple 3.3.2. Déterminer le rang de l'application linéaire f canoniquement associée à la matrice A de l'exemple 3.3.1.

On pose $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + 4y + z, -x - 2y + z)$

C'est l'application linéaire canoniquement associée à A , donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 2$.

3.4 Lien entre opérations sur les matrices et sur les applications linéaires

Proposition 3.4.1. Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B}_E$ et F un espace vectoriel de base $\mathcal{B}_F$. Pour toutes applications linéaires f et $g : E \rightarrow F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f + g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(g)$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$$

Théorème 3.4.2. Soient E , F et G trois espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}_G$. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$$

Exemple 3.4.1. On utilise les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$. Déterminer la matrice de $g \circ f$ où

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x + 2y, y)$$

La matrice canoniquement associée à f est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice canoniquement associée à g est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice canoniquement associée à $g \circ f$ est donc : $B \times A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,
 ce qui coïncide avec le résultat trouvé en page 5 (ex 1.1.4).

Corollaire 3.4.3. Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B}$ et f un endomorphisme de E . Alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^k$$

Exemple 3.4.2. Déterminer la matrice canoniquement associée à f^2 , où

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + 2y, 2x - y) \end{aligned}$$

La matrice canoniquement associée à f est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_2$, c'est la matrice canoniquement associée à f^2 ,

donc $f^2 = 5 \text{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Théorème 3.4.4. Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension, de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

f est un isomorphisme de E dans F ssi $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est inversible.

Dans ce cas,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f))^{-1}$$

Exemple 3.4.3. Déterminer si l'application linéaire f est inversible, et si oui, donner son inverse.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) \\ (x, y) &\mapsto (x + 2y, 2x - y, 0) \end{aligned}$$

* On note $F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = \text{Vect}(e_1, e_2)$

• On considère la base canonique de $\mathbb{R}^2$: $f(1, 0) = (1, 2, 0) = 1 \times e_1 + 2 \times e_2$.

$$f(0, 1) = (2, -1, 0) = 2 \times e_1 - 1 \times e_2$$

donc la matrice associée à f est $A = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$.

• On a $\det(A) = -1 - 4 = -5 \neq 0$ donc A est inversible.

Alors f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans F

* De plus, $A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$

donc $f^{-1} : F \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y, \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y \right)$.

3.5 Noyau et image d'une matrice

Définition 3.5.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Le **noyau de A**, noté $\text{Ker}(A)$, est l'ensemble :

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

2. L'**image de A**, notée $\text{Im}(A)$, est l'ensemble :

$$\text{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple 3.5.1. Calculer le noyau et l'image de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\rightarrow \text{On a } \text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$, ce vecteur forme une famille libre. C'est donc une base de $\text{Im}(A)$ et : $\boxed{\text{rg}(A) = 1}$.

→ Par thm du rang, on en déduit :

$$3 = \dim(\text{ker}(A)) + \text{rg}(A)$$

$$\Leftrightarrow \dim(\text{ker}(A)) = 3 - \text{rg}(A)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dim(\text{ker}(A)) = 3 - 1 = 2}$$

→ On cherche donc deux vecteurs non colinéaires du noyau de A.

On remarque que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$
donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{ker}(A)$.

De même, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{ker}(A)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de cardinal 2 de $\text{ker}(A)$
et $\dim(\text{ker}(A)) = 2$, donc ils forment une base de $\text{ker}(A)$ et

$$\boxed{\text{ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}$$

→ ou Détermination directe du noyau.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$X \in \text{ker}(A) \Leftrightarrow AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x + y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -y - z$$

$$\Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \text{ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

3.6 Théorème du rang

Théorème 3.6.1 (Théorème du rang version matricielle).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n , alors :

$$n = \text{rg}(A) + \dim(\text{ker}(A)).$$

4 Changement de base

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et M et N des matrices de f exprimées dans des bases différentes de E .

Existe-t-il un lien matriciel entre les matrices M et N ?

Dans toute la suite, on suppose que : E est de dimension finie égale à n et on suppose que $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ sont deux bases de E .

On se demande donc s'il existe un lien entre $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E}(f)$.

4.1 Matrice de passage

Définition 4.1.1. On pose $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, la matrice de taille $p \times p$ dont les colonnes sont constituées des coordonnées des vecteurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ exprimés dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice des nouveaux vecteurs de base exprimés en fonction des anciens.

Autrement dit, si :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \\ \varepsilon_2 &= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n \\ &\vdots \\ \varepsilon_p &= \theta_1 e_1 + \theta_2 e_2 + \dots + \theta_n e_n\end{aligned}$$

alors :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \theta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \dots & \theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n & \dots & \theta_n \end{pmatrix}$$

Remarque 4.1.1. On a $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$.

Exemple 4.1.1. On considère la base de $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)).$$

Écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.

La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nouveau
Ancien Ancien Nouveau

Proposition 4.1.1. Pour tout $u \in E$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

Exemple 4.1.2. On reprend la base de l'exemple 4.1.1. Soit $v = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées du vecteur v dans la base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

Méthode 1 : Détermination directe des coordonnées

On cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$(x, y, z) = \lambda_1 (1, 1, 1) + \lambda_2 (0, 1, 1) + \lambda_3 (0, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda_1 \\ y = \lambda_1 + \lambda_2 \\ z = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x \\ \lambda_2 = y - x \\ \lambda_3 = z - y \end{cases}$$

donc les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} x \\ y-x \\ z-y \end{pmatrix}}$$

Méthode 2 : En utilisant $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1}$

→ On inverse la matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on cherche $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\text{tg } P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = y \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x \\ \lambda_2 = y - x \\ \lambda_3 = z - y \end{cases}$$

$$\text{donc } P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

→ On a alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} x \\ -x+y \\ -y+z \end{pmatrix}}$$

4.2 Matrice d'une application linéaire et changement de base

Théorème 4.2.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ sont des bases de E . On pose $P = P_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E}(f) = P_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) P_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E}(f) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) P$$

Exemple 4.2.1. On admet que la famille $\mathcal{B} = (-1 + X, -1 + X^2, 1 + X + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}_c = (1, x, x^2)$$

Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Méthode 1 :

* On a $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'_c} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \wedge \\ x \\ x^2 \end{matrix}$

* On inverse cette matrice. Soit $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

on cherche $X = \begin{pmatrix} d \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tq

$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'_c} X = Y \Leftrightarrow \begin{cases} -d - \beta + \gamma = x \\ d + \gamma = y \\ \beta + \gamma = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -d - \beta + \gamma = x \\ -\beta + 2\gamma = x + y \\ \beta + \gamma = z \end{cases}$

$\begin{cases} -d - \beta + \gamma = x \\ -\beta + 2\gamma = x + y \\ 3\gamma = x + y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{-x + 2y - z}{3} \\ \beta = \frac{-x - y + 2z}{3} \\ \gamma = \frac{x + y + z}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{-x + 2y - z}{3} \\ \beta = \frac{-x - y + 2z}{3} \\ \gamma = \frac{x + y + z}{3} \end{cases} \text{ donc } P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'_c}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

* On a alors $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$

$= P_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}}^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c}(f) P_{\mathcal{B}_c, \mathcal{B}}$

$= P^{-1} A P$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthode 2 :

On calcule $f(p_0)$, $f(p_1)$ et $f(p_2)$ et on les exprime dans la base (p_0, p_1, p_2) .

On a $p_0 = (-1, 1, 0)$ dans la base canonique.

$A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } f(p_0) = -p_0.$

On a $p_1 = (-1, 0, 1)$ dans la base $\mathcal{B}_c$.

$A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } f(p_1) = -p_1.$

On a $p_2 = (1, 1, 1)$ dans la base $\mathcal{B}_c$.

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } f(p_2) = 2p_2.$

Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5 Matrices semblables

Définition 5.0.1. On dit que deux matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Proposition 5.0.1. Deux matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Exemple 5.0.1. Les matrices A et B de l'exercice précédent sont semblables et on a l'égalité

$$B = P^{-1}AP$$

où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ vers la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PB^nP^{-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: " $A^n = PB^nP^{-1}$ " et on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

• Init : $A^0 = I_3$ et $PB^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Hérité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Il y a $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\text{Donc } A^{n+1} = A \circ A^n$$

$$= A \circ PB^nP^{-1} \text{ par HR}$$

$$= PB^nP^{-1} \circ A \text{ car } B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PB^{-1}P^{-1}$$

$$= PB^{n+1}P^{-1}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$.

2. En déduire l'expression explicite de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

B est une matrice diagonale donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

donc pour $n \in \mathbb{N}$ fixé,

$$A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} & 2^n \\ (-1)^n & 0 & 2^n \\ 0 & (-1)^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + (-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} \times 2 + (-1)^n + 2^n & (-1)^n + 2 \times (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n \times 2 + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2 \times (-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times (-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n \times 2 + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2 \times (-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$$

$$n=0 \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3$$

$$n=1 \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = A$$