

---

## TD 6 - Applications linéaires

---

### Compétences à acquérir :

- ▷ C1 : Calculer des puissances de matrices (utiliser la formule du binôme de Newton ou une récurrence)
- ▷ C2 : Montrer qu'une application est linéaire
- ▷ C3 : Déterminer un noyau, une image, détermination de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité, utilisation du rang
- ▷ C4 : Déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases choisies pour les espaces de départ et d'arrivée
- ▷ C5 : Déterminer l'expression analytique de l'application linéaire à partir de la matrice
- ▷ C6 : Utiliser le théorème du rang pour avoir une information sur l'image quand on connaît le noyau (et inversement)
- ▷ C7 : Connaître les propriétés des matrices de changement de base (notamment le lien entre deux matrices d'un endomorphisme exprimé dans deux bases différentes), connaître la notion de matrices semblables

**Exercice 1 (C1)**  On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Exprimer  $A^2$  comme combinaison linéaire de  $A$  et  $I_3$ .
2. En déduire que  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$  en fonction de  $A$  et  $I_3$ .
- 3.(a) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $A^n = a_n A + b_n I_3$ .
- (b) Déterminer l'expression de  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  puis celle de  $A^n$ .

**Exercice 2 (C1-C4-C5-C7)**  Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique (notée  $\mathcal{B}$ ) est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'expression analytique de  $f$ .
2. L'application  $f$  est-elle bijective ? Si oui, en déterminer l'inverse.
3. On pose  $e_1 = (-1, 1, 1)$ ,  $e_2 = (3, 1, 0)$  et  $e_3 = (0, 1, 1)$ . Montrer que la famille  $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
4. En déduire que la matrice  $A$  est semblable à une matrice diagonale et exprimer le lien matriciel.
5. En déduire la matrice de  $f^n$  exprimée dans la base  $\mathcal{B}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 3 (C1-C3-C4-C6-C7)**  On pose  $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  et on note  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice canoniquement associée est  $U$ .

1. Calculer  $U^2$  et  $U^3$ .
2. Déterminer  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$ .
3. Posons  $u^2 = u \circ u$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker}(u^2)$ .
  - (a) Montrer que la famille  $(x, u(x), u^2(x))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
  - (b) Déterminer la matrice  $V$  de  $u$  dans cette base.

**Exercice 4 (C3-C4-C6-C7)**  On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice, exprimée dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , est  $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer les noyaux  $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$  et  $\text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ .
2. En déduire que la matrice  $M$  est semblable à la matrice  $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , et déterminer le lien matriciel entre ces deux matrices.

**Exercice 5 (C3-C4-C5-C6)**  On considère les vecteurs  $u = (1, 0)$ ,  $v = (2, -1)$  et  $w = (-3, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$  telle que :

$$f(1) = u, \quad f(X) = v \quad \text{et} \quad f(X^2) = w$$

puis déterminer l'expression analytique de  $f$ .

2. Déterminer une base et la dimension de  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .
3. L'application  $f$  est-elle bijective ?

**Exercice 6 (C1-C3-C4-C5-C6-C7)**  Soient  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice dans la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer l'image de  $f$ .
2. Quelle est la dimension du noyau de  $f$  ? En déduire  $\text{Ker}(f)$ .
3. On pose  $\varepsilon = e_1 + \dots + e_n$  et  $F = \text{Vect}(e_1, \varepsilon)$ .
  - (a) Justifier que  $F$  est de dimension 2 puis montrer que l'application  $g$  définie sur  $F$  par  $g(x) = f(x)$  pour tout  $x \in F$  est un endomorphisme de  $F$ .
  - (b) Quelle est la matrice de  $g$  dans la base  $(e_1, \varepsilon)$  de  $F$  ?
4. Déterminer  $A^2$ .

**Exercice 7 (C2-C3-C6)**  On considère l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \sum_{k=1}^n x_k \end{cases}$$

On note  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Montrer que  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ .
2. Justifier que  $f$  est surjective. Quelle est la dimension du noyau de  $f$  ?
3. Montrer qu'une base de  $\text{Ker}(f)$  est  $(e_1 - e_n, e_2 - e_n, \dots, e_{n-1} - e_n)$ .

**Exercice 8 (C2-C3-C6)**  Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère l'application :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ P & \longmapsto P(X+2) - P(X) \end{cases}$$

1. Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}_n[X]$ .
- 2.(a) Soit  $P \in \text{Ker}(\Phi)$ . On suppose que  $\deg(P) \geq 1$ . En utilisant le théorème de D'Alembert-Gauss, montrer que  $P$  admet une infinité de racines.  
(b) Conclure que  $\text{Ker}(\Phi) = \mathbb{C}_0[X]$ .  
(c) En déduire que  $\text{Im}(\Phi) = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ .

**Exercice 9 (C2-C3-C4-C6-C7)**  Soit  $\Phi$  l'application qui à tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  associe le polynôme :

$$\Phi(P) = X^2 P' - 2(X-1)P$$

1. *Question préliminaire* : résoudre dans  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle :

$$x^2 y' - 2(x-1)y = 0$$

2. Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Déterminer le noyau de  $\Phi$ . Conclure.
4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  si et seulement si  $n = 2$ .
5. Montrer qu'il existe une base  $(P_1, P_2, P_3)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans laquelle la matrice de  $\Phi$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 10 (C3)**  Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ . Les trois questions sont indépendantes.

1. Montrer que  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$  et  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ .
2. Montrer que  $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$  si et seulement si  $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$ .
3. On dit qu'un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est *invariant* par une application linéaire  $h \in \mathcal{L}(E)$  si  $h(A) \subset A$ .  
Montrer que si  $f$  et  $g$  commutent, c'est-à-dire si  $f \circ g = g \circ f$ , alors  $\text{Ker}(g)$  et  $\text{Im}(g)$  sont invariants par  $f$ .

**Exercice 11 (C2-C3-C4-C7)**  Soit  $P = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ . On considère l'application :

$$u : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto PM \end{cases}$$

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. On définit les quatre matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  suivantes :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose  $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ . Vérifier que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

3. Donner la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Déterminer  $\text{Im}(u)$  et  $\text{Ker}(u)$ .
4. Donner la matrice canoniquement associée à  $u$ . Déterminer le lien avec la matrice obtenue à la question précédente.

**Exercice 12 (C2-C3-C4-C5-C6)**  On considère les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_1(x) = \cos(x), \quad f_2(x) = \sin(x), \quad f_3(x) = x \cos(x) \quad \text{et} \quad f_4(x) = x \sin(x)$$

On pose  $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ .

1. Montrer que  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  est une base de  $E$ .
2. On considère l'opérateur de dérivation  $d : f \longmapsto f'$ .
  - (a) Montrer que  $d$  est un endomorphisme de  $E$ .
  - (b) Écrire la matrice  $D$  de  $d$  dans la base  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  de  $E$ .
  - (c) Montrer que  $D$  est inversible et donner son inverse.

**Exercice 13 (C2-C3-C6)**  On note  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles. On considère l'application  $\Phi$  définie sur  $E$  qui à toute fonction  $f$  de  $E$  associe la fonction  $F$  définie par  $F(0) = f(0)$  et par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt$$

1. Montrer que  $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ .
2. Justifier que, pour tout  $f \in E$ , la fonction  $\Phi(f)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . Que peut-on en déduire sur la surjectivité de  $\Phi$ ?
3. Étudier l'injectivité de  $\Phi$ .

**Exercice 14 (C2-C3)**  Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites convergentes. On considère l'application  $T$  qui à une suite  $u$  de  $E$  associe la suite  $v$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n$$

1. Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Déterminer une base du noyau de  $T$ .
3. On étudie maintenant la surjectivité de  $T$ .
  - (a) On suppose que la suite constante égale à 1 admet un antécédent  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $T$  dans  $E$ . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + 3u_{n+1} = n + 1 + u_1 + 3u_0$$

- (b) Conclure quant à la surjectivité de  $T$ .

**Exercice 15 (C5)**  1. Écrire une fonction `python` qui calcule les racines d'un trinôme du second degré à coefficients réels.

Le nombre complexe  $i$  s'écrit `1j` sous `python`. Il est disponible dans le module `cmath`.

2. On pose  $F = \{aX^4 + bX^3 + cX^2 + bX + a \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$ . Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_4[X]$ .
3. On pose  $\mathcal{C} = (X^2, X + X^3, 1 + X^4)$ . Montrer que  $\mathcal{C}$  est une base de  $F$ .
4. Soit  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow F$  l'application linéaire

dont la matrice exprimée dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Justifier que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .
  - (b) Déterminer l'expression analytique de  $f$ .
5. Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  et  $Q = f(P)$ . Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a :

$$Q(x) = x^2 P\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

**Exercice 16 (C2-C3)**  On désigne par  $E$  l'espace vectoriel des suites réelles et :

$$F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n\}$$

1. Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Montrer que l'application  $L : \begin{cases} F & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{cases}$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
3. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $r^2 - r + 1 = 0$ . On notera  $\theta$  un argument de l'une des solutions.
4. On définit les suites  $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \beta_n = \sin(n\theta)$$

Démontrer que  $(\alpha, \beta)$  est une base de  $F$ .

**Exercice 17 (C1-C2-C4-C7)**  Notons  $\mathcal{D}$  l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles. On considère le sous-ensemble de  $\mathcal{D}$  suivant :

$$E = \{x \mapsto (ax + b)e^{-x} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note  $d$  l'opérateur de dérivation des fonctions défini par  $d(f) = f'$  pour tout  $f \in \mathcal{D}$ .

1. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel, en donner une base et la dimension.
2. Montrer que  $d$  est un endomorphisme de  $E$  et déterminer sa matrice  $A$  dans la base obtenue à la question 1.
3. Déterminer la dérivée de  $x \mapsto (x + 1)e^{-x}$  en utilisant la matrice  $A$ .
4. Déterminer la fonction de  $E$  dont la dérivée est  $x \mapsto (2x + 3)e^{-x}$  en utilisant la matrice  $A$ .
5. Donner une méthode pour calculer la dérivée  $n^e$  de la fonction  $f : x \mapsto (x + 1)e^{-x}$  pour tout entier naturel  $n$ .

**Exercice 18 (C2-C3-C6)**  On considère l'application :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), \dots, P(n)) \end{cases}$$

1. Montrer que  $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}^{n+1})$ .
2. L'application  $\Phi$  est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Déterminer les antécédents des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$  par  $\Phi$ .