
TD 6 Correction - Applications linéaires

Compétences à acquérir :

- ▷ C1 : Calculer des puissances de matrices (utiliser la formule du binôme de Newton ou une récurrence)
- ▷ C2 : Montrer qu'une application est linéaire
- ▷ C3 : Déterminer un noyau, une image, détermination de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité, utilisation du rang
- ▷ C4 : Déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases choisies pour les espaces de départ et d'arrivée
- ▷ C5 : Déterminer l'expression analytique de l'application linéaire à partir de la matrice
- ▷ C6 : Utiliser le théorème du rang pour avoir une information sur l'image quand on connaît le noyau (et inversement)
- ▷ C7 : C7 : Connaître les propriétés des matrices de changement de base (notamment le lien entre deux matrices d'un endomorphisme exprimé dans deux bases différentes), connaître la notion de matrices semblables

Exercice 1 (C3)  On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de A et I_3 .

On trouve $A^2 = 4A - 4I_3$.

2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3 .

D'après ce qui précède, on a $A^2 - 4A = -4I_3$ donc $-\frac{1}{4}(A^2 - 4A) = I_3$, ce qui se réécrit :

$$A\left(-\frac{1}{4}A + I_3\right) = \left(-\frac{1}{4}A + I_3\right)A = I_3$$

Donc la matrice A est inversible d'inverse $-\frac{1}{4}A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

- 3.(a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = a_n A + b_n I_3$.

On utilise un raisonnement par récurrence simple. Pour tout entier naturel n , on considère la proposition :

$$\mathcal{P}_n : \ll \text{il existe } (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } A^n = a_n A + b_n I_3 \gg$$

- **Initialisation** : en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, on a :

$$A^0 = I_3 = a_0 \times A + b_0 I_3$$

donc la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = a_n A + b_n I_3$. Donc :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A = (a_n A + b_n I_3) A = a_n A^2 + b_n A = a_n (4A - 4I_3) + b_n A \quad (\text{d'après la question 2.(b)}) \\ &= (4a_n + b_n) A - 4a_n I_3 \end{aligned}$$

En posant $a_{n+1} = 4a_n + b_n \in \mathbb{R}$ et $b_{n+1} = -4a_n \in \mathbb{R}$, on a l'égalité $A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} I_3$. La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion** : pour tout entier naturel n , la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple.

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, \quad A^n = a_n A + b_n I_3} \quad (0.1)$$

- (b) Déterminer l'expression de a_n et b_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis celle de A^n .
On sait que $a_0 = 0$, $b_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 4a_n + b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = -4a_n$$

Remarquons de plus que $A^1 = A = 1 \times A + 0 \times I_3$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. Les relations de récurrences précédentes impliquent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée $x^2 - 4x + 4 = 0$ admet pour racine double 2. Il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = (An + B)2^n$$

Déterminons A et B . On résout :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 0 \\ 2(A + B) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 0 \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = n2^{n-1} \quad \text{et, si } n \geq 1, \quad b_n = -4a_{n-1} = -(n-1)2^n$$

Cette dernière égalité est vraie pour $n = 0$ puisque $b_0 = 1$. On obtient l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en remplaçant les valeurs de a_n et b_n dans (0.1). On obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = n2^{n-1} A - (n-1)2^n I_3}.$$

Exercice 2 (C1-C4-C5-C7)  Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (notée $\mathcal{B}$) est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'expression analytique de f .

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 6y - 6z \\ 3x - 8y + 10z \\ 3x - 9y + 11z \end{pmatrix}$$

donc l'expression analytique de f est :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \\ (x, y, z) & \longmapsto (-x + 6y - 6z, 3x - 8y + 10z, 3x - 9y + 11z) \end{cases}$$

2. L'application f est-elle bijective ? Si oui, en déterminer l'inverse.

Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On résout l'équation $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On trouve que A est inversible (le système obtenu est de Cramer) d'inverse

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & 4 \\ \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & 5 \end{pmatrix}$. On en déduit donc que f est bijective et on obtient l'expression analytique de f^{-1} avec la même méthode qu'à la question 1. On obtient :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \\ (x, y, z) & \longmapsto \left(-x + 6y - 6z, \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}y + 4z, \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}y + 5z \right) \end{cases}$$

3. On pose $e_1 = (-1, 1, 1)$, $e_2 = (3, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On calcule le rang de la famille $\mathcal{C}$ et on trouve 3. Or cette famille est composée de 3 vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 donc :

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

4. En déduire que la matrice A est semblable à une matrice diagonale et exprimer le lien matriciel.

On a $f(e_1) = (1, -1, -1) = -e_1$, $f(e_2) = (3, 1, 0) = e_2$ et $f(e_3) = (0, 2, 2) = 2e_3$. La matrice de f exprimée dans la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ est la matrice diagonale $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Les matrices A et B sont des matrices de f (exprimées dans des bases différentes) donc :

$$\boxed{\text{les matrices } A \text{ et } B \text{ sont semblables (et la matrice } B \text{ est diagonale)}}$$

Notons P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$. On a alors les égalités :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = PBP^{-1}$$

5. En déduire la matrice de f^n exprimée dans la base $\mathcal{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PB^nP^{-1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme B est diagonale, on a $B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. La matrice de f^n exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est alors A^n . On calcule P^{-1} et on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Il reste à calculer A^n :

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3((-1)^{n+1} + 1) & 3 \times (-1)^n - 3 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 3 \times (-1)^n + 1 - 3 \times 2^n & 3 \times (-1)^n - 1 - 2^{n+2} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 3 \times (-1)^n - 3 \times 2^n & 3 \times (-1)^n - 2^{n+2} \end{pmatrix}$$

et, pour trouver l'expression analytique, on calcule $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$A^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n x + 3((-1)^{n+1} + 1)y + (3 \times (-1)^n - 3)z \\ ((-1)^{n+1} + 2^n)x + (3 \times (-1)^n + 1 - 3 \times 2^n)y + (3 \times (-1)^n - 1 - 2^{n+2})z \\ ((-1)^{n+1} + 2^n)x + (3 \times (-1)^n - 3 \times 2^n)y + (3 \times (-1)^n - 2^{n+2})z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

L'expression analytique de f^n est alors :

$$f^n : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (\alpha, \beta, \gamma) \end{cases}$$

Exercice 3 (C1-C3-C4-C6-C7)  On pose $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est U .

1. Calculer U^2 et U^3 .

On obtient $U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $U^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

2. Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.

Déterminons le noyau de u . Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(u) &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x - y + 2z = 0 & \text{L}_1 \\ -2x + y - 3z = 0 & \text{L}_2 \\ -x + y - 2z = 0 & \text{L}_3 \end{cases} \\ &\iff \dots \\ &\iff (x, y, z) = (-z, z, z) = z(-1, 1, 1) \\ &\iff (x, y, z) \in \text{Ker}((-1, 1, 1)) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{Ker}(u) = \text{Ker}((-1, 1, 1))}$.

Déterminons l'image de u . On sait que :

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) = \text{Vect}((1, -2, -1), (-1, 1, 1), (2, -3, -2))$$

et donc $\boxed{\text{Im}(u) = \text{Vect}((1, -2, -1), (-1, 1, 1))}$ car $(2, -3, -2) = (1, -2, -1) - (-1, 1, 1)$.

3. Posons $u^2 = u \circ u$. Soit $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker}(u^2)$.

(a) Montrer que la famille $(x, u(x), u^2(x))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $\alpha x + \beta u(x) + \gamma u^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. En composant par u^2 et en utilisant la linéarité de u^2 , on a :

$$\alpha u^2(x) + \beta u^3(x) + \gamma u^4(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Or $U^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ donc $u^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. On a aussi $u^4 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. Donc $u^3(x) = u^4(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Il reste donc dans l'équation précédente :

$$\alpha u^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Or $x \notin \text{Ker}(u^2)$ donc $u^2(x) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi, $\alpha = 0$. Il reste donc $\beta u(x) + \gamma u^2(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. En appliquant la fonction u , on obtient $\beta = 0$ puis $\gamma = 0$. Finalement :

$$\boxed{\text{la famille } (x, u(x), u^2(x)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

car elle est libre, comporte trois vecteurs et car $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

(b) Déterminer la matrice V de u dans cette base.

La matrice de u dans cette nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ est $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (C3-C4-C6-C7)  On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les noyaux $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. La matrice canoniquement associée à f est M donc, en notant $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on sait que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f(x, y, z)) = M \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}((x, y, z)) = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y + 4z \\ \frac{3}{4}x \\ \frac{2}{3}y \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$f(x, y, z) = \left(4y + 4z, \frac{3}{4}x, \frac{2}{3}y \right)$$

Par définition :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) &= \{u \in \mathbb{R}^3 \mid (f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ &= \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ &= \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) - 2u = 0_{\mathbb{R}^3}\} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) &\iff f(x, y, z) - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \left(4y + 4z, \frac{3}{4}x, \frac{2}{3}y \right) - 2(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \left(-2x + 4y + 4z, \frac{3}{4}x - 2y, \frac{2}{3}y - 2z \right) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y + 2z &= 0 & \text{L}_1 \\ 3x - 8y &= 0 & \text{L}_2 \\ y - 3z &= 0 & \text{L}_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y + 2z &= 0 & \text{L}_1 \\ -y + 3z &= 0 & \text{L}_2 \leftarrow \frac{1}{2}(\text{L}_2 + 3\text{L}_1) \\ y - 3z &= 0 & \text{L}_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= 8z \\ y &= 3z \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = z(8, 3, 1) \\ &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((8, 3, 1)) \end{aligned}$$

Ainsi :

$\text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}((8, 3, 1))$

De même, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) &\iff f(x, y, z) + (x, y, z) = (0, 0, 0) \\
&\iff \left(x + 4y + 4z, \frac{3}{4}x + y, \frac{2}{3}y + z \right) = (0, 0, 0) \\
&\iff \begin{cases} x + 4y + 4z = 0 & \text{L}_1 \\ 3x + 4y = 0 & \text{L}_2 \\ 2y + 3z = 0 & \text{L}_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 4y + 4z = 0 \\ -2y - 3z = 0 & \text{L}_2 \leftarrow \frac{1}{4}(\text{L}_2 - 3\text{L}_1) \\ 2y + 3z = 0 & \text{L}_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 2z \\ y = -\frac{3}{2}z \end{cases} \\
&\iff (x, y, z) = z \left(2, -\frac{3}{2}, 1 \right) \\
&\iff (x, y, z) \in \text{Vect} \left(\left(2, -\frac{3}{2}, 1 \right) \right)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect} \left(\left(2, -\frac{3}{2}, 1 \right) \right) = \text{Vect}((4, -3, 2))$$

2. En déduire que la matrice M est semblable à la matrice $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et déterminer le lien matriciel entre ces deux matrices.

Dire que M et N sont semblables signifie qu'il existe une matrice inversible P d'ordre 3 telle que $M = PNP^{-1}$. On sait que M est la matrice canoniquement associée à f . L'égalité $M = PNP^{-1}$ signifie donc que N est la matrice de f dans une base adaptée de $\mathbb{R}^3$. Pour répondre à la question, il suffit donc de chercher une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est N . Les vecteurs u, v et w doivent donc satisfaire les relations :

$$f(u) = 2u, \quad f(v) = -v \quad \text{et} \quad f(w) = v - w$$

- Posons $u = (8, 3, 1)$. On sait que $u \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ donc $f(u) = 2u$.
- Posons ensuite $v = (4, -3, 2)$. On sait que $v \in \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ donc $f(v) = -v$.

- Soit maintenant $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On résout :

$$\begin{aligned}
f(w) = v - w &\iff f(w) + w = v \\
&\iff \left(x + 4y + 4z, \frac{3}{4}x + y, \frac{2}{3}y + z \right) = (4, -3, 2) \\
&\iff \begin{cases} x + 4y + 4z = 4 & L_1 \\ 3x + 4y = -12 & L_2 \\ 2y + 3z = 6 & L_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 4y + 4z = 4 & L_1 \\ -2y - 3z = -6 & L_2 \leftarrow \frac{1}{4}(L_2 - 3L_1) \\ 2y + 3z = 6 & L_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -8 + 2z \\ y = 3 - \frac{3}{2}z \end{cases} \\
&\iff w = \left(-8 + 2z, 3 - \frac{3}{2}z, z \right)
\end{aligned}$$

Par exemple, pour $z = 0$, le vecteur $w = (-8, 3, 0)$ est tel que $f(w) = v - w$.

Vérifions enfin que la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$ ainsi construite est une base de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(\mathcal{B}) = \text{rg} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} &= \text{rg} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 0 & 36 & -48 \\ 0 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow 3L_1 - 8L_2 \\ L_3 \leftarrow 8L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&= \text{rg} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 0 & 36 & -48 \\ 0 & 0 & 72 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_2 - L_2 \end{matrix} \\
&= 3
\end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B}$ est de rang 3 dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, et cette famille comporte 3 vecteurs. Celle-ci est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f exprimée dans cette base est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = N$$

Ainsi :

en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire en posant $P = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, alors on a l'égalité :

$$M = PNP^{-1}$$

Les matrices M et N sont donc semblables.

Exercice 5 (C3-C4-C5-C6)  On considère les vecteurs $u = (1, 0)$, $v = (2, -1)$ et $w = (-3, 1)$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$ telle que :

$$f(1) = u, \quad f(X) = v \quad \text{et} \quad f(X^2) = w$$

puis déterminer l'expression analytique de f .

On sait que la famille $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (il s'agit de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$) donc :

il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$ telle que $f(1) = u$, $f(X) = v$
et $f(X^2) = w$

Déterminons l'expression analytique de f .

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = aX^2 + bX + c$. Par linéarité de f , on a :

$$\begin{aligned} f(P) &= af(X^2) + bf(X) + cf(1) = aw + bv + cu = a(-3, 1) + b(2, -1) + c(1, 0) \\ &= (-3a + 2b + c, a - b) \end{aligned}$$

Donc l'expression analytique de f est

$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ aX^2 + bX + c & \longmapsto (-3a + 2b + c, a - b) \end{cases}$

Remarque : on peut aussi raisonner comme suit. La matrice de f exprimée dans les bases canoniques $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{C} = ((1, 0), (1, 0))$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(P)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + 2b - 3a \\ -b + a \end{pmatrix}$$

donc $f(aX^2 + bX + c) = (-3a + 2b + c, a - b)$.

2. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Déterminons le noyau de f . Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$.

$$\begin{aligned}
 P \in \text{Ker}(f) &\iff f(P) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff (-3a + 2b + c, a - b) = (0, 0) \\
 &\iff \begin{cases} a - b = 0 & L_1 \\ -3a + 2b + c = 0 & L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a - b = 0 & L_1 \\ -b + c = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \end{cases} \\
 &\iff a = b = c \\
 &\iff P = a(X^2 + X + 1) \\
 &\iff P \in \text{Vect}(X^2 + X + 1)
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(X^2 + X + 1)$. La famille $(X^2 + X + 1)$ est génératrice de $\text{Ker}(f)$ et elle est libre car elle est constituée d'un unique vecteur non nul. Ainsi :

$$\text{une base de } \text{Ker}(f) \text{ est } (X^2 + X + 1) \text{ et donc } \dim(\text{Ker}(f)) = 1$$

Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang et on a :

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$$

Or $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et on a $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. Ainsi :

$$\text{une base de } \text{Im}(f) \text{ est (par exemple) } ((1, 0), (0, 1)) \text{ et } \dim(\text{Im}(f)) = 2$$

Remarque : on peut aussi calculer directement l'image de f de la façon suivante. Comme $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \dots$$

3. L'application f est-elle bijective ?

Comme $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$, on a en particulier $\text{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$ et donc f n'est pas injective. En particulier :

$$\text{l'application } f \text{ n'est pas injective}$$

COMMENTAIRE

En fait, il n'est pas nécessaire d'utiliser ce qui précède pour démontrer que f n'est pas bijective. Si f est bijective, alors les espaces vectoriels de départ et d'arrivée sont nécessairement de même dimension, ce qui n'est pas le cas. Donc f n'est pas bijective.

Exercice 6 (C1-C3-C4-C5-C6-C7)  Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

dont la matrice dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'image de f .

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) = \text{Im}(f) = (e_1 + \dots + e_n, e_1)}$$

car pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a $f(e_k) = e_1$.

Remarque : bien sûr, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ et $e_1 + \dots + e_n = (1, 1, \dots, 1)$.

2. Quelle est la dimension du noyau de f ? En déduire $\text{Ker}(f)$.

Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie (égale à n), on sait d'après le théorème du rang que :

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

Déterminons la dimension de l'image de f . Une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ est $(e_1 + \dots + e_n, e_1)$ et cette famille est libre car elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires (en effet, $n \geq 2$). Donc cette famille est une base de l'image de f , ce qui implique que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$. Par conséquent :

$$\boxed{\dim(\text{Ker}(f)) = n - 2}$$

Pour tout $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$, on a $f(e_k) = f(e_2)$ et donc $f(e_k - e_2) = 0_{\mathbb{R}^n}$ (par linéarité de f), ce qui signifie que $e_k - e_2 \in \text{Ker}(f)$. Montrons que la famille $(e_3 - e_2, \dots, e_n - e_2)$ est libre. Soit $(\alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n-2}$ tel que $\sum_{k=3}^n \alpha_k (e_k - e_2) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Par linéarité de la somme, on obtient :

$$-(\alpha_3 + \dots + \alpha_n)e_1 + \sum_{k=3}^n \alpha_k e_k = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Or la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\alpha_3 + \dots + \alpha_n) = 0 \\ \boxed{\forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket, \alpha_k = 0} \end{array} \right.$$

Ainsi, $(e_3 - e_2, \dots, e_n - e_2)$ est libre dans $\text{Ker}(f)$ qui est de dimension $n - 2$. Comme cette famille, comporte $n - 2$ vecteurs, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{la famille } (e_3 - e_2, \dots, e_n - e_2) \text{ est une base de } \text{Ker}(f)}$$

3. On pose $\varepsilon = e_1 + \cdots + e_n$ et $F = \text{Vect}(e_1, \varepsilon)$.

- (a) Justifier que F est de dimension 2 puis montrer que l'application g définie sur F par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in F$ est un endomorphisme de F .

On a vu à la question 1. que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(e_1, \varepsilon) = F$ et que l'image de f est de dimension 2. Donc $\dim(F) = 2$.

L'application g est linéaire puisque f est linéaire. Il reste à démontrer que g est bien définie, c'est-à-dire à valeurs dans F . Soit $x \in F$. Il existe alors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = ae_1 + b\varepsilon$. Par linéarité de f , on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= ag(e_1) + bg(\varepsilon) = af(e_1) + bf(\varepsilon) \\ &= a\varepsilon + bf(e_1) + bf(e_2) + \cdots + bf(e_n) \\ &= a\varepsilon + b\varepsilon + be_1 + \cdots + be_1 \\ &= (a+b)\varepsilon + b(n-1)e_1 \in F \end{aligned}$$

Finalement, g est un endomorphisme de F .

- (b) Quelle est la matrice de g dans la base (e_1, ε) de F ?

On a $g(e_1) = \varepsilon$ et $g(u) = \varepsilon + (n-1)e_1$ d'après ce qui précède (prendre $a = 0$ et $b = 1$ dans le calcul ci-dessus). Donc :

la matrice de g dans la base (e_1, ε) de F est $B = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Déterminer A^2 .

La matrice A^2 est la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme f^2 de $\mathbb{R}^n$. Pour déterminer cette matrice, il suffit donc de calculer $f^2(e_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'une part :

$$\begin{aligned} f^2(e_1) &= f(f(e_1)) = f(e_1 + \cdots + e_n) = f(e_1) + \sum_{k=2}^n f(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^n e_k + (n-1)e_1 \\ &= ne_1 + \sum_{k=2}^n e_k \end{aligned}$$

et d'autre part, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$f^2(e_k) = f(f(e_k)) = f(e_1) = e_1 + \cdots + e_n$$

donc :

$$A^2 = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 (C2-C3-C6)  On considère l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \sum_{k=1}^n x_k \end{cases}$$

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Montrons que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

— Tout d'abord, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la somme $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k$ est un

nombre réel. On a donc $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}$.

— Montrons que f est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$. Montrons qu'on a l'égalité $f(X + \lambda Y) = f(X) + \lambda f(Y)$. On a :

$$\begin{aligned} f(X + \lambda Y) &= f(x_1 + \lambda y_1, \dots, x_n + \lambda y_n) = \sum_{k=1}^n (x_k + \lambda y_k) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k + \lambda \sum_{k=1}^n y_k \quad (\text{par linéarité de la somme}) \\ &= f(X) + \lambda f(Y) \end{aligned}$$

2. Justifier que f est surjective. Quelle est la dimension du noyau de f ?

Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $u = (y, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$f(u) = y + 0 + \dots + 0$$

Donc u est un antécédent de y par f dans $\mathbb{R}^n$. On vient de montrer que tout élément de $\mathbb{R}$ admet au moins un antécédent par f dans $\mathbb{R}^n$ donc :

l'application f est surjective

L'espace vectoriel de départ est de dimension finie donc on peut appliquer le théorème du rang et on a :

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\text{Im}(f)) = n - 1$$

puisque $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ (l'application f étant surjective).

3. Montrer qu'une base de $\text{Ker}(f)$ est $(e_1 - e_n, e_2 - e_n, \dots, e_{n-1} - e_n)$.

La famille $(e_1 - e_n, \dots, e_{n-1} - e_n)$, notée $\mathcal{B}$, est constituée de $n - 1$ vecteurs et on sait que $\dim(\text{Ker}(f)) = n - 1$. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\text{Ker}(f)$, il suffit donc de montrer que les éléments de $\mathcal{B}$ appartiennent au noyau de f et que $\mathcal{B}$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

— Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Toutes les coordonnées du vecteur $e_i - e_n$ sont nulles sauf exactement deux : la i^{e} vaut 1 et la n^{e} vaut -1 . Par conséquent, $f(e_i - e_n) = 1 - 1 = 0$. Ainsi, $e_i - e_n \in \text{Ker}(f)$.

— Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (e_i - e_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Par linéarité de la somme, cette égalité se réécrit :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) e_n = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Or on sait que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre (puisque'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^n$) donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \lambda_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 0$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a bien $\lambda_i = 0$ donc la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Finalement :

la famille $\mathcal{B} = (e_1 - e_n, \dots, e_{n-1} - e_n)$ est une base de $\text{Ker}(f)$

Exercice 8 (C2-C3-C6)  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+2) - P(X) \end{cases}$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

— Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Les polynômes $P(X+2)$ et $P(X)$ sont de degrés inférieurs ou égaux à n donc la différence $P(X+2) - P(X)$ est de degré inférieur ou égal à n , c'est-à-dire $\Delta(P) \in \mathbb{C}_n[X]$. Donc on a bien $\Delta(\mathbb{C}_n[X]) \subset \mathbb{C}_n[X]$

— Montrons que Δ est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in \mathbb{C}_n[X]^2$. On a :

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + Q(X+1) - Q(X) \\ &= \lambda \Delta(P) + \Delta(Q) \end{aligned}$$

Finalement :

Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$

- 2.(a) Soit $P \in \text{Ker}(\Phi)$. On suppose que $\deg(P) \geq 1$. En utilisant le théorème de D'Alembert-Gauss, montrer que P admet une infinité de racines.

Soit $P \in \text{Ker}(\Phi)$ tel que $\deg(P) \geq 1$. On a donc $\Phi(P) = 0_{\mathbb{C}_n[X]}$, c'est-à-dire $P(X+2) = P(X)$. Autrement dit, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a l'égalité $P(z+2) = P(z)$. Comme P n'est pas constant, on sait d'après le théorème de D'Alembert-Gauss qu'il admet au moins une racine complexe que l'on note z_0 . On a donc :

$$P(z_0 + 2) = P(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(z_0 + 4) = P(z_0 + 2) = 0$$

et (par une récurrence immédiate), on trouve que $P(z_0 + 2n) = 0$ pour tout entier naturel n . Les nombres complexes $z_0 + 2n$ (où $n \in \mathbb{N}$) sont deux à deux distinctes et sont des racines de P . Le polynôme P admet donc une infinité de racines complexes. Ainsi :

si $P \in \text{Ker}(\Phi)$ est tel que $\deg(P) \geq 1$, alors P a une infinité de racines

- (b) Conclure que $\text{Ker}(\Phi) = \mathbb{C}_0[X]$.

On raisonne par double inclusion.

- Si $P \in \mathbb{C}_0[X]$, alors P est un polynôme constant. On a donc $P(X+2) = P(X)$, c'est-à-dire $\Phi(P) = 0_{\mathbb{C}_n[X]}$, soit encore $P \in \text{Ker}(\Phi)$. D'où l'inclusion $\mathbb{C}_0[X] \subset \text{Ker}(\Phi)$.
- Soit $P \in \text{Ker}(\Phi)$. Montrons que $P \in \mathbb{C}_0[X]$. Par l'absurde, si P n'est pas un polynôme constant, alors $\deg(P) \geq 1$ et donc P a une infinité de racines d'après la question précédente. Or le seul polynôme admettant une infinité de racines est le polynôme nul donc $P = 0_{\mathbb{C}_n[X]}$. On obtient une absurdité car on a supposé que P n'était pas un polynôme constant. Finalement, $P \in \mathbb{C}_0[X]$. D'où l'inclusion $\text{Ker}(\Phi) \subset \mathbb{C}_0[X]$.

Par double inclusion, on a bien démontré l'égalité :

$$\boxed{\text{Ker}(\Phi) = \mathbb{C}_0[X]}$$

- (c) En déduire que $\text{Im}(\Phi) = \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

L'application Φ est linéaire et l'espace de départ $\mathbb{C}_n[X]$ est de dimension finie (égale à $n+1$). D'après le théorème du rang, on a donc :

$$\dim(\mathbb{C}_n[X]) = \dim(\text{Ker}(\Phi)) + \dim(\text{Im}(\Phi))$$

Comme $\text{Ker}(\Phi) = \mathbb{C}_0[X]$ est de dimension 1, l'égalité précédente se réécrit :

$$\dim(\text{Im}(\Phi)) = n$$

Pour conclure, montrons que $\text{Im}(\Phi) \subset \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ un polynôme non constant. Notons $d \in \mathbb{N}^*$ son degré et cX^d son monôme de plus haut degré (où $d \in \mathbb{C}^*$). Le monôme de plus haut degré de $\Delta(P)$ est le monôme de plus haut degré issu de la différence $c(X+2)^d - cX^d$. Or, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$c(X+2)^d - cX^d = c \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} 2^{d-k} X^k - cX^d = 2cdX^{d-1} + c \underbrace{\sum_{k=0}^{d-2} \binom{d}{k} 2^{d-k} X^k}_{\text{de degré } \leq d-2}$$

Comme $cd \neq 0$, on a $\deg(\Delta(P)) = d-1 = \deg(P) - 1$. Ainsi, on a l'inclusion $\text{Im}(\Phi) \subset \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et comme ces deux espaces vectoriels sont de même dimension d'après ce qui précède, on a bien l'égalité :

$$\boxed{\text{Im}(\Phi) = \mathbb{C}_{n-1}[X]}$$

Exercice 9 (C2-C3-C4-C6-C7)  Soit Φ l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme :

$$\Phi(P) = X^2 P' - 2(X - 1)P$$

1. *Question préliminaire* : résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2 y' - 2(x - 1)y = 0$$

On note (E) cette équation différentielle. Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a l'équivalence (puisque $x^2 \neq 0$) :

$$\forall x > 0, \quad x^2 y'(x) - 2(x - 1)y(x) = 0 \iff y'(x) - 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)y(x) = 0$$

Donc (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène sur $\mathbb{R}_+^*$. Une primitive de la fonction (continue) $x \mapsto -2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto -2\left(\ln(x) + \frac{1}{x}\right)$. On en déduit donc que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto C e^{2\left(\ln(x) + \frac{1}{x}\right)} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \mapsto C x^2 e^{\frac{2}{x}} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On sait que la dérivée d'un polynôme, une somme et un produit de polynômes est un polynôme donc $\Phi(P) \in \mathbb{R}[X]$.
- Montrons que Φ est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$. On a (en utilisant la linéarité de la dérivation à la deuxième ligne) :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda P + Q) &= X^2(\lambda P + Q)' - 2(X - 1)(\lambda P + Q) \\ &= X^2(\lambda P' + Q') - 2\lambda(X - 1)P - 2(X - 1)Q \\ &= \lambda(X^2 P' - 2(X - 1)P) + (X^2 Q' - 2(X - 1)Q) \\ &= \lambda\Phi(P) + \Phi(Q) \end{aligned}$$

Donc Φ est linéaire.

Finalement :

$$\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]$$

3. Déterminer le noyau de Φ . Conclure.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\Phi) &\iff \Phi(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\iff P \text{ est solution de l'équation différentielle } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff P \in \mathcal{S} \cap \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

On est donc ramené à déterminer les fonctions **polynomiales** de la forme

$P : x \mapsto C x^2 e^{\frac{2}{x}}$. Supposons que P soit un polynôme et que $C \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$P(x) = C \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} C \frac{e^{2y}}{y^2} = \pm \infty$$

suivant le signe de C (et par croissances comparées), ce qui est absurde (la limite de P est 0 est $P(0)$ qui est un nombre réel si P est un polynôme). Donc, une fonction polynomiale appartenant à $\mathcal{S}$ est nécessairement telle que $C = 0$. Il s'agit donc du polynôme nul. Finalement, $\text{Ker}(\Phi) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ et donc Φ est injective.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $n = 2$.

On raisonne par double implication.

— Supposons que Φ soit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors $\Phi(X^n) \in \mathbb{R}_n[X]$. Or :

$$\Phi(X^n) = nX^{n+1} - 2(X-1)X^n = (n-2)X^{n+1} + 2X^n$$

Pour que $\Phi(X^n) \in \mathbb{R}_n[X]$, il faut donc que $n-2 = 0$ c'est-à-dire que $n = 2$.

— Réciproquement, supposons que $n = 2$. On sait déjà que Φ est linéaire. Il reste à vérifier que $\Phi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ (où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$). Alors :

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= X^2(2aX + b) - 2(X-1)(aX^2 + bX + c) \\ &= 2aX^3 + bX^2 - 2aX^3 - 2bX^2 - 2cX + 2aX^2 + 2bX + 2c \\ &= (2a - b)X^2 + (2b - 2c)X + 2c \in \mathbb{R}_2[X]\end{aligned}$$

Donc Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Finalement :

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X] \text{ si et seulement si } n = 2}$$

5. Montrer qu'il existe une base (P_1, P_2, P_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de Φ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminons la matrice M de Φ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On a $\Phi(1) = 2 - 2X$,

$$\Phi(X) = X^2 - 2(X^2 - X) = 2X - X^2 \quad \text{et} \quad \Phi(X^2) = 2X^3 - 2(X^3 - X^2) = 2X^2$$

$$\text{On a donc } M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

— Soit $P_1 = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$\begin{aligned}\Phi(P_1) = 2P_1 &\iff M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2a & = & 2a \\ -2a + 2b & = & 2b \\ 0 - b + 2c & = & 2c \end{cases} \\ &\iff a = b = 0 \\ &\iff P_1 = cX^2\end{aligned}$$

Par exemple $P_1 = X^2$ est tel que $\Phi(P_1) = 2P_1$.

— De la même façon, soit $P_2 = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$\begin{aligned}\Phi(P_2) = P_1 + 2P_2 &\iff M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 1 + 2c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2a & = & 2a \\ -2a + 2b & = & 2b \\ 0 - b + 2c & = & 1 + 2c \end{cases} \\ &\iff a = 0 \text{ et } b = -1 \\ &\iff P_2 = -X + cX^2\end{aligned}$$

Par exemple, $P_2 = -X + X^2$ est tel que $\Phi(P_2) = P_1 + 2P_2$.

— Enfin, avec les mêmes notations, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(P_3) = P_2 + 2P_3 &\iff M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ -1 + 2b \\ 1 + 2c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2a &= 2a \\ -2a + 2b &= -1 + 2b \\ -b + 2c &= 1 + 2c \end{cases} \\ &\iff a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -1 \\ &\iff P_2 = \frac{1}{2} - X + cX^2\end{aligned}$$

Par exemple, $P_2 = \frac{1}{2} - X + X^2$.

Pour conclure, il reste encore à montrer que la famille obtenue $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est libre

(...). La matrice A de Φ dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est bien $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

COMMENTAIRE

Il n'est pas indispensable de déterminer la matrice M de Φ dans la base canonique pour répondre à cette question. On peut par exemple trouver P_1 en résolvant directement l'équation $\Phi(P_1) = 2P_1$ en utilisant l'expression de Φ et en remplaçant P_1 par $a + bX + cX^2$.

Exercice 10  Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Les trois questions sont indépendantes.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

Montrons que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$. Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$ et, comme f est linéaire,

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$$

Donc $x \in \text{Ker}(f^2)$ d'où l'inclusion :

$$\boxed{\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)}$$

Montrons que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$. Soit $y \in \text{Im}(f^2)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$. On a donc :

$$y = f(\underbrace{f(x)}_{\in E}) \in \text{Im}(f)$$

d'où l'inclusion :

$$\boxed{\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)}$$

2. Montrer que $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si et seulement si $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$.

On raisonne par double implication.

- Supposons que $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et montrons que $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$. Soit $y \in \text{Im}(g)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = g(x)$. On a donc :

$$f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E$$

Donc $y \in \text{Ker}(f)$ d'où l'inclusion $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$.

- Réciproquement, supposons que $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$ et montrons que $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$, ce qui revient à dire que $(f \circ g)(x) = 0_E$ pour tout $x \in E$. Soit $x \in E$. Alors $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Or $g(x) \in \text{Im}(g)$ et par hypothèse $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$ donc $g(x) \in \text{Ker}(f)$ et donc $f(g(x)) = 0_E$. Finalement, $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On a donc bien l'équivalence :

$$f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$$

3. On dit qu'un sous-ensemble A de E est *invariant* par une application linéaire $h \in \mathcal{L}(E)$ si $h(A) \subset A$.

Montrer que si f et g commutent, c'est-à-dire si $f \circ g = g \circ f$, alors $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$ sont invariants par f .

Montrons que $\text{Ker}(g)$ est invariant par f . Soit $x \in \text{Ker}(g)$. Montrons que $f(x) \in \text{Ker}(g)$. Comme f et g commutent, on a :

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(0_E) = 0_E$$

car $x \in \text{Ker}(g)$ par hypothèse et car f est linéaire. Ainsi, $f(x) \in \text{Ker}(g)$ et donc $\text{Ker}(g)$ est invariant par f .

Montrons que $\text{Im}(g)$ est invariant par f . Soit $y \in \text{Im}(g)$. Montrons que $f(y) \in \text{Im}(g)$. Par hypothèse, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. On a (puisque f et g commutent) :

$$f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in \text{Im}(g)$$

et donc $\text{Im}(g)$ est invariant par f .

Exercice 11 (C5-C6-C7-C9)  Soit $P = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$. On considère l'application :

$$u : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & PM \end{cases}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

L'application est bien définie car le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ appartient bien à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (on a donc $u(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

Montrons maintenant que u est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$. Par distributivité du produit matriciel par rapport à l'addition, on a :

$$u(\lambda M + N) = P(\lambda M + N) = \lambda PM + PN = \lambda u(M) + u(N)$$

donc u est linéaire. Finalement :

$$u \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

2. On définit les quatre matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Étudions la liberté de $\mathcal{B}$. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On résout :

$$\begin{aligned} a E_{1,1} + b E_{1,2} + c E_{2,1} + d E_{2,2} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} &\iff a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \dots \\ &\iff a = b = c = d = 0 \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Or elle contient 4 vecteurs, ce qui coïncide avec la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc :

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

3. Donner la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$.

On a :

$$u(E_{1,1}) = P E_{1,1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2 E_{1,1}$$

et, de même, $u(E_{1,2}) = 2E_{1,2}$, $u(E_{2,1}) = -E_{2,1}$ et $u(E_{2,2}) = -E_{2,2}$. Donc :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ de } u \text{ exprimée dans la base } \mathcal{B} \text{ de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

La matrice A est diagonale et tous ses éléments diagonaux sont non nuls. Son rang est donc maximal. Ceci implique que A est bijective et donc que u est un automorphisme (c'est-à-dire un endomorphisme bijectif) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{Ker}(u) = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\} \quad \text{et} \quad \text{Im}(u) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

4. Donner la matrice canoniquement associée à u . Déterminer le lien avec la matrice obtenue à la question précédente.

On a (on calcule les images de chaque vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par l'application u) :

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice B de u exprimée dans la base canonique $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donc :

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vers la base $\mathcal{B}$, notée Q , est :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors l'égalité suivante d'après le cours :

$$B = Q A Q^{-1}$$

Exercice 12 (C2-C3-C4-C5-C6)  On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = \cos(x), \quad f_2(x) = \sin(x), \quad f_3(x) = x \cos(x) \quad \text{et} \quad f_4(x) = x \sin(x)$$

On pose $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de E .

Par définition, la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est génératrice de E . Étudions sa liberté. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$. On suppose que $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \delta f_4 = 0_E$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) + \delta f_4(x) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \gamma x \cos(x) + \delta x \sin(x) = 0$$

En remplaçant x par 0, on obtient $\alpha = 0$. Ensuite, en remplaçant x par π , il vient (puisque $\sin(\pi) = 0$) : $\gamma \pi \times (-1) = 0$, c'est-à-dire $\gamma = 0$. Il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \beta \sin(x) + \delta x \sin(x) = 0$$

Pour les valeurs $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \beta + \frac{\delta\pi}{2} = 0 \\ -\beta + \frac{\delta\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

dont la résolution fournit $\beta = \delta = 0$. La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est donc libre. Finalement :

la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de E

2. On considère l'opérateur de dérivation $d : f \mapsto f'$.

(a) Montrer que d est un endomorphisme de E .

- Tout d'abord, l'application d est bien définie car les éléments de E sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (comme combinaisons linéaires des fonctions dérivables f_1, f_2, f_3, f_4). Le caractère linéaire de d provient simplement de la linéarité de la dérivation (c'est du cours).
- Il reste à justifier que si $f \in E$, alors $d(f) \in E$. Soit $f \in E$. Il existe alors $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $f = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \delta f_4$. Par linéarité de la dérivation, on a :

$$d(f) = \alpha f'_1 + \beta f'_2 + \gamma f'_3 + \delta f'_4$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad d(f)(x) &= -\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \gamma \cos(x) - \gamma x \sin(x) + \delta \sin(x) + \delta x \cos(x) \\ &= (\beta + \gamma) \cos(x) + (\delta - \alpha) \sin(x) + \delta x \cos(x) - \gamma x \sin(x) \\ &= (\beta + \gamma) f_1(x) + (\delta - \alpha) f_2(x) + \delta f_3(x) - \gamma f_4(x) \end{aligned}$$

et donc :

$$d(f) = (\beta + \gamma) f_1 + (\delta - \alpha) f_2 + \delta f_3 - \gamma f_4 \in E$$

car $d(f)$ s'exprime comme combinaison linéaire des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 .

Finalement :

d est un endomorphisme de E

(b) Écrire la matrice D de d dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) de E .

D'après le calcul précédent (pour $d(f_1)$ par exemple, prendre $\alpha = 1$ et $\beta = \gamma = \delta = 0$), on a $d(f_1) = -f_2$, $d(f_2) = f_1$, $d(f_3) = f_1 - f_4$ et $d(f_4) = f_2 + f_3$ donc :

la matrice de d dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) de E est $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Montrer que D est inversible et donner son inverse.

Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On résout l'équation $D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}$

d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$:

$$D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x & y & + & z & & = & X & \text{L}_1 \\ & & & & + & t & = & Y & \text{L}_2 \\ & & & & & t & = & Z & \text{L}_3 \\ & & & - & z & & = & T & \text{L}_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} & y & & & = & X + T & \text{L}_1 \\ x & & & & = & -Y + Z & \text{L}_2 \\ & & t & = & Z & \text{L}_3 \\ & & z & = & -T & \text{L}_3 \end{cases}$$

Le système obtenu est de Cramer (il admet bien une unique solution) donc la matrice D est inversible. De plus :

$$D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 (C2-C3-C6)  On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On considère l'application Φ définie sur E qui à toute fonction f de E associe la fonction F définie par $F(0) = f(0)$ et par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt$$

1. Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.

- Commençons par justifier que l'application Φ est bien définie. Soit $f \in E$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet des primitives. En particulier, la primitive de f qui s'annule en 0 est la fonction :

$$G : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x f(t) \, dt \end{cases}$$

La fonction G est dérivable et donc continue sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, on peut en déduire que $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il reste donc à établir la continuité en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\Phi(f)(x) = \frac{G(x)}{x}$. Or on sait que la fonction G est dérivable en 0 (et que $G(0) = 0$) de nombre dérivé en 0 égal à $f(0)$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = G'(0) = f(0) = \Phi(f)(0)$$

Ainsi, $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc $\Phi(f) \in E$. Finalement, Φ est bien définie.

- Montrons maintenant que Φ est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in E^2$. Montrons que $\Phi(\lambda f + g) = \lambda \Phi(f) + \Phi(g)$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(\lambda f + g)(x) = \lambda \Phi(f)(x) + \Phi(g)(x)$$

On a d'une part :

$$\Phi(\lambda f + g)(0) = (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \Phi(f)(0) + \Phi(g)(0)$$

et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (par linéarité de l'intégrale) :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda f + g)(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x (\lambda f + g)(t) \, dt = \lambda \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt + \frac{1}{x} \int_0^x g(t) \, dt \\ &= \lambda \Phi(f)(x) + \Phi(g)(x) \end{aligned}$$

On a donc bien $\Phi(\lambda f + g) = \lambda \Phi(f) + \Phi(g)$.

Finalement :

$\Phi \text{ est un endomorphisme de } E$

2. Justifier que, pour tout $f \in E$, la fonction $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Que peut-on en déduire sur la surjectivité de Φ ?

Soit $f \in E$. Avec les notations de la question 1., on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \Phi(f)(x) = \frac{G(x)}{x}$$

Or on a vu que la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $\mathbb{R}^*$), de même que la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$. Par produit :

la fonction $\Phi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Considérons la fonction $g : x \mapsto |x+1|$. On a $g \in E$ car g est continue sur $\mathbb{R}$. Supposons que g admette un antécédent noté f par Φ dans E . D'après ce qui précède, la fonction $g = \Phi(f)$ serait alors dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et en particulier en -1 , ce qui est absurde (en effet, la fonction $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0 donc, par composition, g n'est pas dérivable en -1). On peut donc en déduire que g n'admet pas d'antécédent par Φ dans E et donc :

l'application Φ n'est pas surjective

3. Étudier l'injectivité de Φ .

Déterminons le noyau de Φ . Soit $f \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} f \in \text{Ker}(\Phi) &\iff \Phi(f) = 0_E \iff \forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)(x) = 0 \\ &\iff \begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \underbrace{\int_0^x f(t) dt}_{=G(x)} = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, G'(x) = f(x) = 0 \end{cases} \\ &\implies f = 0_E \end{aligned}$$

On a donc l'inclusion $\text{Ker}(\Phi) \subset \{0_E\}$. L'inclusion réciproque est immédiate car $\text{Ker}(\Phi)$ est un sous-espace vectoriel de E . Ainsi $\text{Ker}(\Phi) = \{0_E\}$ et donc :

Φ est injective

Exercice 14 (C2-C3)  Soit E l'espace vectoriel des suites convergentes. On considère l'application T qui à une suite u de E associe la suite v définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E .

- Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Vérifions que $v = T(u) \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n$. Or la suite u est convergente donc les suites $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ sont aussi convergentes (de même limite que u). On sait qu'une combinaison linéaire de suites convergentes est convergente donc la suite v est convergente, c'est-à-dire $v \in E$.
- Montrons maintenant que T est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrons que $T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$. On a :

$$\lambda u + v = (\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

donc, par définition de T :

$$\begin{aligned} T(\lambda u + v) &= (\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) + 2(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) - 3(\lambda u_n + v_n) \\ &= \lambda(u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n) + (v_{n+2} + 2v_{n+1} - 3v_n) \\ &= \lambda T(u) + T(v) \end{aligned}$$

Donc T est linéaire.

Finalement :

$T \text{ est un endomorphisme de } E$

2. Déterminer une base du noyau de T .

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}(T) &\iff T(u) = 0_E \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = 0 \\ &\iff \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A + B(-3)^n \end{aligned}$$

puisque l'on dispose d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux dont l'équation caractéristique $x^2 + 2x - 3 = 0$ admet pour racines 1 et -3 . Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E , elle converge. Or la suite $((-3)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente donc :

$$\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad (A + B(-3)^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \iff B = 0$$

On en conclut donc que $\text{Ker}(T) = \text{Vect}((1)_{n \in \mathbb{N}})$. La famille $((1)_{n \in \mathbb{N}})$ est génératrice de $\text{Ker}(T)$ et elle est libre car constituée d'une unique vecteur *non nul*. Ainsi :

une base du noyau de T est $((1)_{n \in \mathbb{N}})$

3. On étudie maintenant la surjectivité de T .

COMMENTAIRE

Ici, on ne peut pas utiliser le théorème du rang car l'espace des suites convergentes n'est pas de dimension finie.

- (a) On suppose que la suite constante égale à 1 admet un antécédent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par T dans E . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + 3u_{n+1} = n + 1 + u_1 + 3u_0$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u_{k+2} + 2u_{k+1} - 3u_k = 1$ et donc :

$$(u_{k+2} - u_{k+1}) + 3(u_{k+1} - u_k) = 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En sommant les égalités précédentes sur les entiers $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on obtient (par linéarité de la somme) :

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+2} - u_{k+1}) + 3 \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$$

c'est-à-dire, en calculant les deux sommes télescopiques :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + 3u_{n+1} = n + 1 + u_1 + 3u_0$$

- (b) Conclure quant à la surjectivité de T .

Par hypothèse, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E donc elle converge. La suite $(u_{n+2} + 3u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente comme combinaison linéaire de suites convergentes. D'après la question 3.(a), cela implique que la suite $(n+1+u_1+3u_0)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, ce qui est absurde (elle diverge de limite $+\infty$). Ceci montre que la suite $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas d'antécédent par T dans E et donc :

T n'est pas surjective

Exercice 15 (C5)

1. Écrire une fonction `python` qui calcule les racines d'un trinôme du second degré à coefficients réels.

Le nombre complexe `i` s'écrit `1j` sous `python`. Il est disponible dans le module `cmath`.

On obtient la fonction suivante :

```
1 from cmath import *
2 from math import *
3 def racines(a,b,c) : #equation ax^2+bx+c=0
4     d = b**2-4*a*c
5     if d > 0 :
6         return (-b+sqrt(d))/(2*a), (-b-sqrt(d))/(2*a)
7     elif d == 0 :
8         return -b/(2*a)
9     else :
10        return (-b+1j*sqrt(-d))/(2*a), (-b-1j*sqrt(-d))/(2*a)
```

2. On pose $F = \{aX^4 + bX^3 + cX^2 + bX + a \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

Les éléments de F sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 4 donc $F \subset \mathbb{R}_4[X]$.
De plus :

$$F = \{a(X^4 + 1) + b(X^3 + X) + cX^2 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(X^4 + 1, X^3 + X, X^2) \quad (0.2)$$

donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

3. On pose $\mathcal{C} = (X^2, X + X^3, 1 + X^4)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de F .

La famille $\mathcal{C}$ est une famille génératrice de F d'après l'égalité (0.2). Cette famille est de plus libre car elle est constituée de polynômes de degrés deux à deux distincts. Ainsi :

la famille $\mathcal{C}$ est une base de F

4. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow F$ l'application linéaire

dont la matrice exprimée dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Justifier que A est inversible et calculer A^{-1} .

En utilisant la méthode usuelle (résolution d'un système), on obtient que la matrice A est effectivement inversible d'inverse :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Déterminer l'expression analytique de f .

Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. La matrice des coordonnées de P exprimé dans la

base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. La matrice des coordonnées de $f(P)$ exprimé dans la base $\mathcal{C}$ de F

est :

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On a donc l'égalité $f(P) = (a + 2c)X^2 + b(X + X^3) + c(1 + X^4)$. L'expression analytique de f est donc :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \\ a + bX + cX^2 & \longmapsto c + bX + (a + 2c)X^2 + bX^3 + cX^4 \end{cases}$$

5. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $Q = f(P)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$Q(x) = x^2 P\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x^2 P\left(x + \frac{1}{x}\right) &= x^2 \left[a + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \right] \\ &= x^2 \left(a + bx + \frac{b}{x} + cx^2 + 2c + \frac{c}{x^2} \right) \\ &= ax^2 + bx^3 + bx + cx^4 + 2cx^2 + c \\ &= f(P)(x) \end{aligned}$$

d'après la question précédente. Ainsi :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(P)(x) = x^2 P\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Exercice 16 (C2-C3)  On désigne par E l'espace vectoriel des suites réelles et :

$$F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n\}$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

- La suite nulle $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ appartient bien à F (puisque $0 = 0 - 0$).
- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$. Montrons que $\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$. On a :

$$\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

et donc, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda u_{n+2} + v_{n+2} &= \lambda(u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n) \\ &= (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) - (\lambda u_n + v_n) \end{aligned}$$

On a donc $\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$.

Ainsi :

la suite F est un sous-espace vectoriel de E

2. Montrer que l'application $L : \begin{cases} F & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto (u_0, u_1) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

— L'application est L est bien définie. Montrons qu'elle est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$. On a :

$$\begin{aligned} L(\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) &= L((\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1) \\ &= \lambda(u_0, u_1) + (v_0, v_1) \\ &= \lambda L((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) + L((v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \end{aligned}$$

L'application L est donc linéaire.

— Il reste encore à montrer que L est bijective. Déterminons le noyau de L . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$. Alors :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ker}(L) \iff L((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (0, 0) \iff u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 0$$

Une récurrence à deux pas permet alors de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 0$ (proposition notée $\mathcal{P}_n$) en utilisant la relation de récurrence vérifiée par la suite (car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$). Autrement dit, $\text{Ker}(L) = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$.

— Étudions maintenant l'injectivité de L . Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Notons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et par $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ et $L((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (a, b)$. Donc L est surjective.

Finalement :

$$\boxed{L : F \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels}}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $r^2 - r + 1 = 0$. On notera θ un argument de l'une des solutions. Les solutions de cette équation du second degré sont $e^{\pm i \frac{\pi}{3}}$. Par exemple, on a donc $\theta = \frac{\pi}{3}$.
4. On définit les suites $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \beta_n = \sin(n\theta)$$

Démontrer que (α, β) est une base de F .

On sait que $L \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R}^2)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels donc :

$$\dim(F) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

Montrons que les suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à F . Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} &\cos\left((n+2)\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left((n+1)\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &\quad + \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = -\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On a donc $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ et, de la même manière, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$.

Justifions maintenant que la famille $((\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\lambda(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0_F$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$$

Pour $n = 0$, on obtient $\lambda = 0$. Ensuite, pour $n = 1$, il reste $\mu \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ et donc $\mu = 0$.
Donc la famille $((\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta)_{n \in \mathbb{N}})$ est libre. Elle est constituée de deux vecteurs et l'espace vectoriel F est de dimension 2 donc :

la famille $((\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta)_{n \in \mathbb{N}})$ est une base de F

COMMENTAIRE

Dans cet exercice, on a démontré le théorème relatif aux suites récurrentes linéaires d'ordre deux pour le cas particulier de la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0$$

Exercice 17 (C1-C2-C4-C7)  Notons $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On considère le sous-ensemble de $\mathcal{D}$ suivant :

$$E = \{x \mapsto (ax + b)e^{-x} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note d l'opérateur de dérivation des fonctions défini par $d(f) = f'$ pour tout $f \in \mathcal{D}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel, en donner une base et la dimension.

Tout d'abord, E est un sous-ensemble de $\mathcal{D}$ car toute élément de $\mathcal{D}$ est bien (par produit) une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$E = \{x \mapsto axe^{-x} + be^{-x} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(x \mapsto xe^{-x}, x \mapsto e^{-x})$$

donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$.

Notons $\varphi : x \mapsto xe^{-x}$ et $\psi : x \mapsto e^{-x}$. Alors (φ, ψ) est une famille génératrice de E d'après l'égalité précédente. Étudions sa liberté. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\alpha\varphi + \beta\psi = 0_{\mathcal{D}}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha xe^{-x} + \beta e^{-x} = 0$$

En remplaçant par exemple successivement x par 0 puis par 1, on trouve que $\beta = 0$ puis que $\alpha = 0$. La famille (φ, ψ) est donc libre. Finalement :

la famille (φ, ψ) est une base de E et $\dim(E) = 2$

2. Montrer que d est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice A dans la base obtenue à la question 1.

— Soient $(f, g) \in \mathcal{D}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On sait que la dérivée d'une combinaison linéaire et la combinaison linéaire des dérivées donc :

$$d(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = \lambda d(f) + d(g)$$

Ainsi, d est linéaire.

— Il reste à montrer que $d(E) \subset E$. Soit $f \in E$. Il existe alors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = a\varphi + b\psi$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} d(f)(x) &= a\varphi'(x) + b\psi'(x) = a, e^{-x} - ax e^{-x} - b e^{-x} = -ax e^{-x} + (a - b) e^{-x} \\ &= -a\varphi(x) + (a - b)\psi(x) \end{aligned}$$

Autrement dit, $d(f) = -a\varphi + (a - b)\psi \in E$.

Finalement :

d est un endomorphisme de E

De plus, $d(\varphi) = -\varphi + \psi$ et $d(\psi) = -\psi$ donc :

la matrice de φ exprimée dans la base (φ, ψ) de E est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. Déterminer la dérivée de $x \mapsto (x + 1)e^{-x}$ en utilisant la matrice A .

Soit $f : x \mapsto (x + 1)e^{-x}$. On a $f = \varphi + \psi$. On veut calculer $d(f)$ en utilisant la matrice

A . La matrice des coordonnées de f dans la base (φ, ψ) de E est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $d(f) = -\varphi + 0 \times \psi$, c'est-à-dire $f' : x \mapsto -x e^{-x}$.

4. Déterminer la fonction de E dont la dérivée est $x \mapsto (2x + 3)e^{-x}$ en utilisant la matrice A .

Soit $G : x \mapsto (2x + 3)e^{-x}$. Les coordonnées de G dans la base (φ, ψ) de E est $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $g : x \mapsto (ax + b)e^{-x} \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} d(g) = G &\iff A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -a &= 2 \\ a - b &= 3 \end{cases} \\ &\iff a = -2 \text{ et } b = 5 \end{aligned}$$

Donc :

la fonction $g : x \mapsto (-2x + 5)e^{-x}$ est telle que $d(g) = G$

5. Donner une méthode pour calculer la dérivée n^e de la fonction $f : x \mapsto (x + 1)e^{-x}$ pour tout entier naturel n .

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ n(-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}$.

• *Initialisation :*

Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_2$ et $\begin{pmatrix} (-1)^0 & 0 \\ 0 & (-1)^0 \end{pmatrix} = I_2$ donc la propriété est vraie au rang 0.

- *Hérédité :*

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang n . Montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ n(-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 \\ -n(-1)^n + (-1)^n & (-1)^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 \\ (n+1)(-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc la propriété est vérifiée au rang $n + 1$.

- *Conclusion :* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ n(-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}$.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f : x \mapsto (ax + b)e^{-x} \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. La matrice des coordonnées de f dans la base (φ, ψ) de E est $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et celle de $d^n(f)$ est $A^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Or $d^n(f) = f^{(n)}$ correspond à la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f . On a :

$$A^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ n(-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n a \\ n(-1)^n a + (-1)^n b \end{pmatrix}$$

donc $f^{(n)} = (-1)^n a \varphi + (na + (-1)^n b) \psi$. Autrement dit :

$$\boxed{f^{(n)} : x \mapsto (-1)^n a x e^{-x} + (n(-1)^n a + (-1)^n b) e^{-x}}$$

Exercice 18 (C2-C3-C6)  On considère l'application :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), \dots, P(n)) \end{cases}$$

1. Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}^{n+1})$.

— Tout d'abord, l'application Φ est bien définie car :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = (P(0), \dots, P(n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

— Montrons que Φ est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$. Montrons que $\Phi(\lambda P + Q) = \lambda \Phi(P) + \Phi(Q)$. On a :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(0), \dots, (\lambda P + Q)(n)) \\ &= (\lambda P(0) + Q(0), \dots, \lambda P(n) + Q(n)) \\ &= \lambda(P(0), \dots, P(n)) + (Q(0), \dots, Q(n)) \\ &= \lambda \Phi(P) + \Phi(Q) \end{aligned}$$

Donc Φ est linéaire.

Finalement, $\boxed{\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}^{n+1})}$.

2. L'application Φ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Déterminons le noyau de Φ . Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\Phi) &\iff \Phi(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \iff (P(0), \dots, P(n)) = (0, \dots, 0) \\ &\iff \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k) = 0 \\ &\iff 0, 1, \dots, n \text{ sont des racines de } P \\ &\iff P = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \end{aligned}$$

car un polynôme de degré au plus n admet au plus n racines distinctes s'il n'est pas le polynôme nul. Ainsi, $\text{Ker}(\Phi) = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$ et donc Φ est injective.

De plus, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n + 1$. Les espaces de départ et d'arrivée sont donc de même dimension *finie* (et Φ est injective) donc :

Φ est bijective (et donc aussi en particulier surjective)

3. Déterminer les antécédents des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ par Φ .

Notons $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On note P_k l'antécédent de e_k par Φ dans $\mathbb{R}_n[X]$ (on sait que Φ est bijective). On a :

$$\Phi(P_k) = e_k \iff (P_k(0), \dots, P_k(n)) = e_k \iff \begin{cases} \forall \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}, P_k(\ell) = 0 \\ P_k(k) = 1 \end{cases}$$

Étant donné $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}$, la condition $P_k(\ell) = 0$ signifie que ℓ est racine de P_k et donc que $X - \ell$ divise P_k . La première condition du système précédent signifie donc que P_k est divisible par $\prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^n (X - \ell)$. Or P_k est de degré inférieur ou égal à n et le produit $\prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^n (X - \ell)$ est de degré n donc cette même condition est équivalente à l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que $P_k = C \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^n (X - \ell)$. Il ne reste plus qu'à traiter la deuxième condition du système précédent. On a :

$$\begin{aligned} P_k(k) = 1 &\iff C \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^n (k - \ell) = 1 \\ &\iff Ck(k-1) \times \dots \times 2 \times 1 \times (-1) \times \dots \times (-1)(n-k) = 1 \\ &\iff Ck!(-1)^{n-k}(n-k)! = 1 \\ &\iff C = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

Finalement :

pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'antécédent P_k de e_k par Φ dans $\mathbb{R}_n[X]$ est $P_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^n (X - \ell)$