
TD 7 Correction - Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Compétences à acquérir :

- ▷ C1 : Déterminer la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires
- ▷ C2 : Calculer des lois marginales
- ▷ C3 : Déterminer la loi conditionnelle d'une marginale du couple
- ▷ C4 : Calculer la loi d'une variable aléatoire du type $X \pm Y$
- ▷ C5 : Étudier l'indépendance de deux variables aléatoires
- ▷ C6 : Utiliser le théorème de transfert
- ▷ C7 : Calculer la covariance avec le théorème de Kœnig-Huygens, connaître les propriétés de la covariance et lien avec l'indépendance
- ▷ C8 : Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire (après en avoir prouvé l'existence)

Exercice 1 (C2-C3-C4-C8)  On considère un couple de variables aléatoires réelles (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi conjointe définie par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = i, Y = j) = \frac{a}{2^{i+j}j!}, \quad \text{où} \quad a = \frac{e^{-1/2}}{2}$$

1. Déterminer les lois marginales du couple.

On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Rappelons que, désormais, $a = \frac{e^{-1/2}}{2}$.

- Soit $i \in \mathbb{N}$. Comme $\{(Y = j) \mid j \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales (et la linéarité de la somme) :

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = \frac{e^{-1/2}}{2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{j!} \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \frac{e^{-1/2}}{2^{i+1}} \times e^{1/2} \end{aligned}$$

en utilisant la somme de la série exponentielle de paramètre $1/2$. Finalement :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X = i) = \frac{1}{2^{i+1}}$$

- Soit $j \in \mathbb{N}$. Comme $\{(X = i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = \frac{e^{-1/2}}{2^{j+1}j!} \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i}_{=2}$$

par linéarité de la somme et en utilisant la somme de la série géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad P(Y = j) = \frac{e^{-1/2}}{2^j j!} = e^{-1/2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{j!}$$

Autrement dit, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\frac{1}{2})$.

2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. Alors :

$$P(X = i) P(Y = j) = \frac{1}{2^{i+1}} \times e^{-1/2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{j!} = \frac{e^{-1/2}}{2} \times \frac{1}{2^{i+j} j!} = \frac{a}{2^{i+j} j!} = P(X = i, Y = j)$$

Donc :

les variables aléatoires X et Y sont indépendantes

3. On pose $S = X + Y$.

(a) Déterminer la loi de S . On laissera cette expression sous la forme d'une somme.

Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements associé à X , on a :

$$P(S = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(S = k, X = i) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^k P(X = i, Y = k - i)$$

car $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. En utilisant la loi conjointe, on obtient :

$$P(S = k) = \sum_{i=0}^k \frac{a}{2^k (k - i)!} = \frac{a}{2^k} \sum_{\ell=0}^k \frac{1}{\ell!}$$

par linéarité de la somme et en utilisant le changement d'indice $\ell = k - i$.

(b) Démontrer par le calcul que $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(S = k) = 0$. Cette égalité est-elle surprenante ?

On sait que la série (exponentielle) $\sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{1}{\ell!}$ est convergente de somme e donc la suite

$\left(\sum_{\ell=0}^k \frac{1}{\ell!} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite e . Par ailleurs, on sait que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a}{2^k} = 0$ donc (par produit) on a bien :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(S = k) = 0$$

Comme $\{(S = k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} P(S = k)$

est convergente (de somme égale à 1). Le terme général de la série tend donc vers 0 quand k tend vers $+\infty$. On retrouve donc le résultat annoncé.

Exercice 2 (C1-C2-C5-C6-C7-C8)  Soit N un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard un nombre entier X dans l'intervalle $\llbracket 1, N \rrbracket$ puis un nombre entier Y dans l'intervalle $\llbracket 1, X \rrbracket$.

1.(a) Proposer une fonction **python** simulant cette expérience.

On utilise la commande **randint** disponible dans le module **random**.

```

1 from random import randint
2 def experience(N) :
3     x = randint(1,N)
4     y = randint(1,x)
5     return x, y

```

- (b) Écrire un programme qui permet d'évaluer l'espérance de Y .

On simule n fois (pour n grand) l'expérience et on renvoie la moyenne des valeurs y obtenues. D'après la loi faible des grands nombre, cette moyenne est une *bonne* approximation de $E(Y)$.

```

1 def esperance(N,n) :
2     s = 0
3     for k in range(n) :
4         x, y = experience(N)
5         s = s+y
6     return s/n

```

2. Déterminer la loi du couple (X, Y) .

Même si l'on a la contrainte $Y \leq X$, les deux nombres choisis peuvent être n'importe quel entier de l'intervalle $\llbracket 1, N \rrbracket$. L'univers image du couple (X, Y) est donc :

$$(X, Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket^2$$

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$. On a $Y \leq X$ par définition donc, si $i < j$, on a nécessairement $P(X = i, Y = j) = 0$.

On suppose maintenant que $i \geq j$. Comme $P(X = i) = \frac{1}{N} \neq 0$ (car X suit la loi uniforme de paramètre N par équiprobabilité du nombre choisi dans l'intervalle $\llbracket 1, N \rrbracket$), on a d'après la formule des probabilités composées :

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i) P(Y = j | X = i) = \frac{1}{N} \times \frac{1}{i}$$

car la loi conditionnelle de Y sachant $(X = i)$ est la loi uniforme de paramètre i . Finalement :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad P(X = i, Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i \\ \frac{1}{Ni} & \text{si } j \leq i \end{cases}$$

3. Déterminer la loi de Y (écrite sous forme d'une somme) puis l'espérance de Y .

L'univers image de Y est $Y(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$.

Soit $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Comme $\{(X = i) \mid i \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^N P(X = i, Y = j) = \sum_{i=j}^N \frac{1}{Ni}$$

en utilisant les probabilités relatives à la loi conjointe précédemment obtenues. Ainsi :

$$\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad P(Y = j) = \frac{1}{N} \sum_{i=j}^N \frac{1}{i}$$

La variable aléatoire Y admet une espérance car son univers image est fini et (par linéarité

de la somme) :

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{j=1}^N j P(Y=j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=j}^N \frac{j}{i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \underbrace{\sum_{j=1}^i j}_{=\frac{i(i+1)}{2}} \quad (\text{en permutant les deux sommes}) \\
 &= \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (i+1) \\
 &= \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N i + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N 1 \\
 &= \frac{N+1}{4} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Finalement :

l'espérance de Y vaut $E(Y) = \frac{N+3}{4}$

4. Calculer la covariance du couple (X, Y) . En utilisant deux méthodes différentes, étudier l'indépendance des variables aléatoires X et Y .

Le couple (X, Y) admet une covariance puisque les univers images de X , Y et XY sont finis. On sait déjà que $E(Y) = \frac{N+3}{4}$ et que $E(Y) = \frac{N+1}{2}$ (puisque X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$). De plus, d'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \sum_{1 \leq i, j \leq N} ij \underbrace{P(X=i, Y=j)}_{=0 \text{ si } j > i} = \sum_{1 \leq j \leq i \leq N} ij P(X=i, Y=j) \\
 &= \sum_{1 \leq j \leq i \leq N} ij \frac{1}{Ni} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i j \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{i(i+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2N} \left(\sum_{i=1}^N i^2 + \sum_{i=1}^N i \right)
 \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \frac{1}{2N} \left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{N(N+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{N+1}{2} \times \frac{(2N+1)+3}{6} \\
 &= \frac{(N+1)(N+2)}{6}
 \end{aligned}$$

Finalement (en utilisant le théorème de Koenig-Huygens) :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \text{E}(XY) - \text{E}(X) \text{E}(Y) = \frac{(N+1)(N+2)}{6} - \frac{N+1}{2} \times \frac{N+3}{4} \\ &= (N+1) \left(\frac{N+2}{6} - \frac{N+3}{8} \right) \\ &= (N+1) \times \frac{4(N+2) - 3(N+3)}{24}\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\text{Cov}(X, Y) = \frac{(N+1)(N-1)}{24}}$$

Comme $N \geq 2$, on a $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$. Les variables aléatoires X et Y ne sont donc pas indépendantes.

On peut aussi procéder comme suit. On a $P(X = 1, Y = 2) = 0$ (puisque $2 > 1$). D'autre part (en utilisant les lois de X et Y précédemment obtenues) :

$$P(X = 1)P(Y = 2) = \frac{1}{N} \times \frac{1}{N} \sum_{i=2}^N \frac{1}{j} > 0$$

donc :

$$P(X = 1, Y = 2) \neq P(X = 1)P(Y = 2)$$

Les variables aléatoires X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Exercice 3 (C4)  Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

1. Calculer $P(X + Y = n)$ et $P(X = Y)$.

On a $(X + Y = n) = \bigcup_{k=0}^n (X = k, Y = n - k)$ car les univers images de X et Y sont $\llbracket 0, n \rrbracket$. Comme les événements $(X = k, Y = n - k)$ (où $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$) sont deux à deux incompatibles, on a :

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^n P(X = k)P(Y = n - k) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \binom{n}{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \end{aligned}$$

par symétrie des coefficients binomiaux. En appliquant la formule de Vandermonde, on obtient :

$$P(X + Y = n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}$$

On a $(X = Y) = \bigcup_{k=0}^n (X = k, Y = k)$. Les événements $(X = k, Y = k)$ (où $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$) sont deux à deux indépendants et les variables aléatoires X et Y sont indépendantes donc :

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = k) = \sum_{k=0}^n P(X = k)P(Y = k) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-k)} \end{aligned}$$

et on retrouve (en utilisant encore la formule de Vandermonde) :

$$P(X = Y) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}$$

2. Calculer $P(X \geq Y)$.

Comme $\{(X \geq Y), (X < Y)\}$ est un système complet d'événements, on a :

$$P(X \geq Y) + P(X < Y) = 1$$

Or $(X \leq Y) = (X = Y) \cup (X < Y)$ et les événements $(X = Y)$ et $(X < Y)$ sont incompatibles donc :

$$P(X < Y) = P(X \leq Y) - P(X = Y)$$

et donc :

$$P(X \geq Y) + P(X \leq Y) = 1 + P(X = Y)$$

Or X et Y suivent la même loi donc $P(X \geq Y) = P(X \leq Y)$. En utilisant la question 1., on obtient :

$$P(X \geq Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}$$

Exercice 4 (C3-C8)  Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$.

1. Calculer $P(X = Y)$.

Comme les univers images de X et Y sont égaux à $\mathbb{N}^*$, on a l'égalité :

$$(X = Y) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = k, Y = k)$$

Les événements $(X = k, Y = k)$ (où $k \in \mathbb{N}^*$) sont deux à deux incompatibles donc, par σ -additivité de P , on a (la série mise en jeu est convergente) :

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k, Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P(Y = k) \quad (\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 (1-p)^{2(k-1)} \quad (\text{car } X, Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)) \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{k-1} \quad (\text{par linéarité de la somme}) \\ &= p^2 \sum_{\ell=0}^{+\infty} ((1-p)^2)^\ell \quad (\text{changement d'indice } \ell = k-1) \\ &= \frac{p^2}{1 - (1-p)^2} \end{aligned}$$

en utilisant la somme de la série géométrique de raison $(1-p)^2$. Ainsi (en arrangeant le dénominateur) :

$$P(X = Y) = \frac{p}{2-p}$$

2. Calculer $P(X > Y)$.

On cherche $P(X > Y)$. Comme $\{(Y = k) \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X > Y, Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X > k, Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X > k) P(Y = k) \end{aligned}$$

car les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Fixons maintenant $k \in \mathbb{N}^*$ et déterminons $P(X > k)$. On a :

$$(X > k) = \bigcup_{\ell=k+1}^{+\infty} (X = \ell)$$

Comme les événements $(X = \ell)$ (où $\ell \geq k+1$) sont deux à deux incompatibles, on a par σ -additivité de P :

$$\begin{aligned} P(X > k) &= \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} P(X = \ell) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{\ell-1} \quad (\text{car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} p(1-p)^{j+k} \quad (\text{changement d'indice } j = \ell - (k+1)) \\ &= p(1-p)^k \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j \quad (\text{par linéarité de la somme}) \\ &= p(1-p)^k \times \frac{1}{1 - (1-p)} \end{aligned}$$

en utilisant la somme de la série géométrique de raison $1-p$. Donc $P(X > k) = (1-p)^k$. En reportant dans le calcul précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X > k) P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^k p(1-p)^{k-1} \\ &= p(1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{k-1} \end{aligned}$$

On effectue le changement d'indice $\ell = k-1$ et on utilise une somme de série géométrique (comme à la question 1.) pour obtenir que :

$$P(X > Y) = p(1-p) \times \frac{1}{1 - (1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(X + Y = n)$.
 Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On cherche $P(X = k | X + Y = n)$. Comme $n \geq 2$, on a $P(X + Y = n) \neq 0$ et donc :

$$P(X = k | X + Y = n) = \frac{P(X = k, X + Y = n)}{P(X + Y = n)} = \frac{P(X = k, Y = n - k)}{P(X + Y = n)}$$

Si $k \geq n$, alors $Y = k - n \leq 0$ et donc $(X = k, Y = n - k) = \emptyset$ (puisque $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$) et donc $P(X = k | X + Y = n) = 0$.

Supposons maintenant que $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Alors :

$$P(X = k | X + Y = n) = \frac{P(X = k, Y = n - k)}{P(X + Y = n)} = \frac{P(X = k) P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)}$$

car X et Y sont indépendantes. Or (rappelons que X et Y suivent des lois géométriques) :

$$P(X = k) P(Y = n - k) = p^2(1 - p)^{k-1}(1 - p)^{n-k-1} = p^2(1 - p)^{n-2}$$

Il nous reste encore à calculer $P(X + Y = n)$. Comme $\{(X = j) | j \in \mathbb{N}^*\}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = j, X + Y = n) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = j, Y = n - j) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} P(X = j, Y = n - j) \end{aligned}$$

pour les mêmes raisons que précédemment ($Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$). Ensuite, comme X et Y sont indépendantes,

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= \sum_{j=1}^{n-1} P(X = j) P(Y = n - j) = \sum_{j=1}^{n-1} p^2(1 - p)^{n-2} \\ &= (n - 1)p^2(1 - p)^{n-2} \end{aligned}$$

et, finalement,

$$P(X = k | X + Y = n) = \frac{p^2(1 - p)^{n-2}}{(n - 1)p^2(1 - p)^{n-2}} = \frac{1}{n - 1}$$

On en déduit que :

la loi conditionnelle de X sachant $(X + Y = n)$ est la loi uniforme de paramètre $n - 1$

4. Calculer $E(X|X+Y=n)$ et $V(X|X+Y=n)$, c'est-à-dire les espérance et variance de X sachant $(X+Y=n)$.

Puisque la loi conditionnelle de X sachant $(X+Y=n)$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on sait (d'après le cours) que :

$$E(X | X + Y = n) = \frac{(n-1) + 1}{2} = \frac{n}{2}$$

De plus, d'après le théorème de Koenig-Huygens, on sait que :

$$V(X | X + Y = n) = E(X^2 | X + Y = n) - E(X | X + Y = n)^2$$

D'après le théorème de transfert, on a :

$$E(X^2 | X+Y=n) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 P(X=k | X+Y=n) = \frac{1}{n-1} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n(2n-1)}{6}$$

et finalement :

$$V(X | X + Y = n) = \frac{n(2n-1)}{6} - \frac{n^2}{4} = \frac{n(n-2)}{12}$$

Exercice 5 (C3-C4)  1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ respectivement.

- (a) Quelle est la loi de $X+Y$?

On sait que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ respectivement, alors (d'après le cours) :

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } X+Y \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } \lambda+\mu}$$

Ainsi, $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P(X+Y=k) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(X + Y = k)$.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{N}$. Comme $P(X + Y = k) \neq 0$, on a :

$$P(X = i | X + Y = k) = \frac{P(X = i, X + Y = k)}{P(X + Y = k)} = \frac{P(X = i, Y = k - i)}{P(X + Y = k)}$$

Si $i > k$, alors $k - i < 0$ et donc $(Y = k - i) = \emptyset$. Ainsi :

$$P(X = i, Y = k - i) = 0 \quad \text{et donc} \quad P(X = i | X + Y = k) = 0$$

On suppose maintenant que $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a :

$$P(X = i, Y = k - i) = P(X = i) P(Y = k - i)$$

donc (on sait aussi que X , Y et $X + Y$ suivent les lois de Poisson de paramètre λ , μ et $\lambda + \mu$ respectivement) :

$$\begin{aligned} P(X = i | X + Y = k) &= \frac{P(X = i) P(Y = k - i)}{P(X + Y = k)} = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}} \\ &= \frac{k!}{i! (k-i)!} \times \frac{\lambda^i \mu^{k-i}}{(\lambda + \mu)^i (\lambda + \mu)^{k-i}} \\ &= \binom{k}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^i \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{k-i} \\ &= \binom{k}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{k-i} \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\theta = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \in]0, 1[$, on obtient que :

la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = k$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(k, \theta)$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois binomiales $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$ où $(m, n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times]0, 1[$.

(a) Quelle est la loi de $X + Y$?

On sait que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes suivant les lois binomiales $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$, alors :

la variable aléatoire $X + Y$ suit la loi binomiale de paramètres $m + n$ et p

On a donc $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 0, m + n \rrbracket$ et :

$$\forall k \in \llbracket 0, m + n \rrbracket, \quad P(X + Y = k) = \binom{m + n}{k} p^k (1 - p)^{m+n-k}$$

- (b) Soit $k \in \llbracket 0, m+n \rrbracket$. Déterminer la loi de X sachant $(X+Y=k)$.
 Soient $k \in \llbracket 0, m+n \rrbracket$ et $i \in \mathbb{N}$. Comme $P(X+Y=k) \neq 0$, on a :

$$P(X=i | X+Y=k) = \frac{P(X=i, Y=k-i)}{P(X+Y=k)}$$

Si $i > m$ ou $k-i > n$ (c'est-à-dire $i < k-n$) ou $k-i < 0$ (c'est-à-dire $i > k$) alors ou bien $(X=i) = \emptyset$, ou bien $(Y=k-i) = \emptyset$, et alors $P(X=i | X+Y=k) = 0$.

Soit maintenant $i \in \llbracket \max(0, k-n), \min(k, m) \rrbracket$. Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes (et suivent des lois binomiales), on a (comme dans la question 1.(b)) :

$$\begin{aligned} P(X=i | X+Y=k) &= \frac{P(X=i) P(Y=k-i)}{P(X+Y=k)} \\ &= \frac{\binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} \binom{n}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-(k-i)}}{\binom{m+n}{k} p^k (1-p)^{m+n-k}} \\ &= \frac{\binom{m}{i} \binom{n}{k-i}}{\binom{m+n}{k}} \end{aligned}$$

En posant $q = \frac{m}{m+n} \in]0, 1[$, on a donc :

$$P(X=i | X+Y=k) = \frac{\binom{q(m+n)}{i} \binom{(1-q)(m+n)}{k-i}}{\binom{m+n}{k}}$$

Finalement :

la loi conditionnelle de X sachant $X+Y=k$ est la loi hypergéométrique

$$\mathcal{H}\left(m+n, k, \frac{m}{m+n}\right)$$

Exercice 6 (C3-C5-C8)  Soit N une variable aléatoire réelle représentant le nombre de personnes entrant dans un bureau de poste. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $t > 0$. On estime que chaque personne vient pour poster un envoi avec la probabilité $p \in]0, 1[$. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de personnes venues pour poster un envoi.

- 1.(a) Pour tout $(j, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $P(X = k | N = j)$. Quelle est la loi de X ?

Soit $(k, j) \in \mathbb{N}^2$. Le nombre de personnes pouvant poster un envoi est au plus égal au nombre de personnes présentes dans le bureau de poste. Ainsi, $P(X = k | N = j) = 0$ si $k > j$.

Supposons maintenant que $k \leq j$. On répète j épreuves de Bernoulli (l'opération effectuée par chaque personne), qui sont mutuellement indépendantes dont le succès est « poster un envoi » (de probabilité p) et X compte le nombre de succès. Ainsi, la loi conditionnelle de X sachant $(N = j)$ est la loi binomiale de paramètres j et p . Donc

$P(X = k | N = j) = \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k}$. Finalement :

$$\forall (k, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = k | N = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > j \\ \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k} & \text{si } k \leq j \end{cases}$$

Déterminons maintenant la loi de X . Tout d'abord, l'univers image de X est $X(\Omega) = \mathbb{N}$ a priori.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $\{(N = j) | j \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a d'après la formule des probabilités totales (on utilise aussi les probabilités conditionnelles précédentes et le fait que N suive une loi de Poisson) :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \underbrace{P(X = k | N = j)}_{=0 \text{ si } k > j} P(N = j) = \sum_{j=k}^{+\infty} P(X = k | N = j) P(N = j) \\ &= \sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k} e^{-t} \frac{t^j}{j!} \\ &= e^{-t} \frac{p^k}{k!} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{t^j (1-p)^{j-k}}{(j-k)!} \end{aligned}$$

Le changement d'indice $\ell = j - k$ fournit :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= e^{-t} \frac{p^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^{\ell+k} (1-p)^\ell}{\ell!} = e^{-t} \frac{(tp)^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(t(1-p))^\ell}{\ell!} \\ &= e^{-t} \frac{(tp)^k}{k!} \times e^{t(1-p)} \\ &= e^{-tp} \frac{(tp)^k}{k!} \end{aligned}$$

en utilisant la somme d'une série exponentielle (convergente). Finalement :

la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre tp

- (b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$ si elles existent.

Comme X suit la loi de Poisson de paramètre tp , on sait que X admet une espérance et une variance qui valent :

$$E(X) = tp \quad \text{et} \quad V(X) = tp$$

2. Les variables aléatoires X et N sont-elles indépendantes ?

D'après la formule des probabilités composées, on a (puisque $P(N = 0) \neq 0$) :

$$P(X = 1, N = 0) = \underbrace{P(X = 1 | N = 0)}_{=0} P(N = 0) = 0$$

car $1 > 0$. Or $P(X = 1) \neq 0$ et $P(N = 0) \neq 0$ donc $P(X = 1, N = 0) \neq P(X = 1)P(N = 0)$. On en déduit donc que :

les variables aléatoires X et N ne sont pas indépendantes

Exercice 7 (C1-C2-C3)  Lors d'une étude de germination, on dispose d'un nombre aléatoire N de plantes donnant chacune une graine et on suppose que $N \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Chaque graine a la probabilité $\gamma \in]0, 1[$ de germer (de manière indépendante des autres graines). On appelle S le nombre de graines qui germent.

1. Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Déterminer $P(S = i | N = j)$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Le nombre de graines qui germent ne peut pas excéder le nombre de graines que les plantes ont données, c'est-à-dire $S \leq N$. Ainsi, si $i > j$, alors $P(S = i | N = j) = 0$.

Supposons maintenant que $i \leq j$. On suppose que $N = j$, c'est-à-dire que les plantes ont donné au total j graines. On répète j fois la même épreuve de Bernoulli (une graine germe ou non) dont le succès (à savoir la graine germe) a pour probabilité γ . Les épreuves sont mutuellement indépendantes et S compte le nombre de succès. Donc la loi de S sachant l'événement $(N = j)$ est la loi binomiale de paramètre j et γ . En particulier :

$$P(S = i | N = j) = \binom{j}{i} \gamma^i (1 - \gamma)^{j-i}$$

Finalement :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad P(S = i | N = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \binom{j}{i} \gamma^i (1 - \gamma)^{j-i} & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

2. En déduire la loi du couple (S, N) .

L'univers image du couple (S, N) est $(S, N)(\Omega) = S(\Omega) \times N(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket^2$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Comme $P(N = j) \neq 0$, on a d'après la formule des probabilités composées :

$$P(S = i, N = j) = P(S = i | N = j) P(N = j)$$

et donc, en utilisant la loi de N et la question 1., on obtient :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad P(S = i, N = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \binom{j}{i} \binom{n}{j} \gamma^i (1 - \gamma)^{j-i} p^j (1 - p)^{n-j} & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

3. Montrer que S suit la loi $\mathcal{B}(n, p\gamma)$.

L'univers image de S est $S(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Comme $\{(N = j) \mid j \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales (et la question 2.) :

$$\begin{aligned} P(S = i) &= \sum_{j=0}^n P(S = i, N = j) = \sum_{j=i}^n P(S = i, N = j) \\ &= \gamma^i \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} \binom{n}{j} (1 - \gamma)^{j-i} p^j (1 - p)^{n-j} \end{aligned}$$

Pour tout $j \in \llbracket i, n \rrbracket$, on a :

$$\binom{j}{i} \binom{n}{j} = \frac{j!}{i! (j-i)!} \times \frac{n!}{j! (n-j)!} = \frac{n!}{i!} \times \frac{1}{(j-i)! (n-j)!}$$

Par linéarité de la somme et en utilisant le changement d'indice $\ell = j - i$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(S = i) &= \frac{n!}{i!} \gamma^i \sum_{j=i}^n \frac{1}{(j-i)! (n-j)!} (1 - \gamma)^{j-i} p^j (1 - p)^{n-j} \\ &= \frac{n!}{i! (n-i)!} \gamma^i p^i \sum_{\ell=0}^{n-i} \frac{(n-i)!}{\ell! (n-i-\ell)!} (1 - \gamma)^\ell p^\ell (1 - p)^{n-i-\ell} \\ &= \binom{n}{i} (p\gamma)^i \sum_{\ell=0}^{n-i} \binom{n-i}{\ell} ((1 - \gamma)p)^\ell (1 - p)^{n-i-\ell} \end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de Newton, il vient :

$$P(S = i) = \binom{n}{i} (p\gamma)^i ((1 - \gamma)p + 1 - p)^{n-i} = \binom{n}{i} (p\gamma)^i (1 - \gamma p)^{n-i}$$

Finalement :

la variable aléatoire S suit la loi binomiale de paramètres n et $p\gamma$

Exercice 8 (C8)  Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X prenant les valeurs 1 et 2 de manière équiprobable. On pose alors $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z .

La loi Y est donnée par $Y(\Omega) = \{1, 2\}$ et $P(Y = 1) = P(Y = 2) = \frac{1}{2}$.

L'univers image de Z est :

$$Z(\Omega) = \{k\ell \mid (k, \ell) \in \mathbb{N}^* \times \{1, 2\}\} = \mathbb{N}^*$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche $P(Z = n)$. On distingue deux cas suivant la parité de n .

• **Premier cas : n est impair**

Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m + 1$. Dans ce cas $(Z = n) = (Z = 2m + 1) = (X = 2m + 1, Y = 1)$. Les variables aléatoires X et Y sont supposées indépendantes donc :

$$P(Z = n) = P(X = 2m + 1) P(Y = 1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{2n!}$$

• **Deuxième cas : n est pair**

Il existe alors $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2m$. Ici :

$$(Z = n) = (Z = 2m) = (X = 2m, Y = 1) \cup (X = m, Y = 2)$$

Les événements $(X = 2m, Y = 1)$ et $(X = m, Y = 2)$ sont incompatibles et les variables aléatoires X et Y sont indépendantes donc :

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= P(X = 2m, Y = 1) + P(X = m, Y = 2) = P(X = 2m) P(Y = 1) + P(X = m) P(Y = 2) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\frac{\lambda^n}{n!} + \frac{\lambda^{n/2}}{(n/2)!} \right) \end{aligned}$$

La loi de Z est donc donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Z = n) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{2n!} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\frac{\lambda^n}{n!} + \frac{\lambda^{n/2}}{(n/2)!} \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Calculer l'espérance et la variance de Z si elles existent.

On sait que X admet une espérance (égale à λ), de même pour Y puisque son univers image est fini) donc, comme X et Y sont indépendantes, Z admet une espérance qui vaut $E(Z) = E(X) E(Y)$. Or $Y - 1 \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$ donc $E(Y - 1) = \frac{1}{2}$ et $E(Y) = \frac{3}{2}$ par linéarité de l'espérance. Finalement :

$$Z \text{ admet une espérance qui vaut } E(Z) = \frac{3\lambda}{2}$$

De même, on sait que X et Y admettent un moment d'ordre 2 et X^2 et Y^2 sont des variables aléatoires indépendantes donc $Z^2 = X^2 Y^2$ admet un moment d'ordre 2 qui vaut $E(Z^2) = E(X^2) E(Y^2)$. D'après le théorème de Kœnig-Huygens, on a :

$$E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \lambda + \lambda^2$$

D'autre part, on a d'après le théorème de transfert :

$$E(Y^2) = \sum_{k \in Y(\Omega)} k^2 P(Y = k) = \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

et donc $E(Z^2) = \frac{5(\lambda + \lambda^2)}{2}$. D'après le théorème de Kœnig-Huygens, la variable aléatoire Z admet une variance qui vaut :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{5(\lambda + \lambda^2)}{2} - \frac{9\lambda^2}{4} = \frac{\lambda^2 + 10\lambda}{4}$$

Exercice 9 (C7-C8)  1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes de même variance non nulle. On pose $U = \alpha X + \beta Y$ et $V = \lambda X + \mu Y$ où α , β , λ et μ sont quatre nombres réels. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que U et V soient non corrélées.

On calcule la covariance de U et V :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U, V) &= \text{Cov}(\alpha X + \beta Y, \lambda X + \mu Y) \\ &= \alpha\lambda \text{Cov}(X, X) + \alpha\mu \text{Cov}(X, Y) + \beta\lambda \text{Cov}(Y, X) + \beta\mu \text{Cov}(Y, Y) \\ &\text{par bilinéarité de la covariance} \\ &= \alpha\lambda \text{Var}(X) + (\alpha\mu + \beta\lambda) \underbrace{\text{Cov}(X, Y)}_{0 \text{ car indépendance}} + \beta\mu \underbrace{\text{Var}(Y)}_{=\text{Var}(Y) \text{ par hypothèse}} \\ &= (\alpha\lambda + \beta\mu) \underbrace{\text{Var}(X)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

donc U et V sont non corrélées si et seulement si $\alpha\lambda + \beta\mu = 0$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $E(X) = V(X) = 100$. On pose $Z = 3X - 10$.

(a) Calculer $E(Z)$, $V(Z)$, $\text{cov}(X, Z)$ et $V(X + Z)$.

Par linéarité de l'espérance, on a

$$E(Z) = E(3X - 10) = 3E(X) - 10 = 290.$$

Par propriété de la variance, on a

$$\text{Var}(Z) = 3^2 \text{Var}(X) = 900.$$

Par bilinéarité de la covariance, on a :

$$\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(X, 3X - 10) = 3\text{Cov}(X, X) - 10\text{Cov}(X, 1) = 3\text{Var}(X) - 10 \times 0 = 300.$$

Par relation, on a :

$$\text{Var}(X + Z) = \text{Var}(X) + 2\text{Cov}(X, Z) + \text{Var}(Z) = 800.$$

(b) Soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que $E(Y) = V(Y) = 100$. Calculer $V(X + Y + Z)$ et $\text{cov}(Y + Z, X)$.

Comme Y est indépendante de X , Y est indépendante de Z , et donc de $X + Z$, d'où :

$$\text{Var}(X + Y + Z) = \text{Var}(X + Z) + \text{Var}(Y) = 800 + 100 = 900.$$

On a donc :

$$\text{Cov}(Y + Z, X) = \text{Cov}(Y, X) + \text{Cov}(Z, X) = 0 + 0 = 0.$$

Exercice 10 (C1-C2-C5-C8)  Soit $p \in]0, 1[$. Une urne contient une proportion p de boules vertes et une proportion $q = 1 - p$ de boules blanches. On effectue des tirages successifs avec remise. On note X (respectivement Y) la variable aléatoire réelle égale à la longueur de la première (respectivement deuxième) séquence de boules tirées consécutivement de la même couleur. Par exemple, le tirage BBBVVB... fournit les valeurs $X = 3$ et $Y = 2$.

1. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

L'univers image de X est $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (la longueur de la première séquence de boule de même couleur peut être arbitrairement longue). Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on note B_j (respectivement V_j) l'événement : « la j^{e} boule tirée est blanche (respectivement verte) ».

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$(X = k) = (B_1 \cap \dots \cap B_k \cap V_{k+1}) \cup (V_1 \cap \dots \cap V_k \cap B_{k+1})$$

Les événements $B_1 \cap \dots \cap B_k \cap V_{k+1}$ et $V_1 \cap \dots \cap V_k \cap B_{k+1}$ sont incompatibles et les tirages sont indépendants donc :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(B_1 \cap \dots \cap B_k \cap V_{k+1}) + P(V_1 \cap \dots \cap V_k \cap B_{k+1}) \\ &= P(B_1) \dots P(B_k) P(V_{k+1}) + P(V_1) \dots P(V_k) P(B_{k+1}) \\ &= q^k p + p^k q \end{aligned}$$

La loi de X est donc donnée par :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = q^k p + p^k q}$$

La variable aléatoire X admet une espérance si la série $\sum_{k \geq 1} k P(X = k)$ est absolument convergente, c'est-à-dire convergente car elle est à termes positifs. Or on sait que les séries géométriques dérivées premières $\sum_{k \geq 1} k p^{k-1}$ et $\sum_{k \geq 1} k q^{k-1}$ sont convergentes car $(p, q) \in]-1, 1[^2$. Comme l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, la variable aléatoire X admet une espérance qui vaut :

$$E(X) = pq \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} + pq \sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1} = \frac{pq}{(1-q)^2} + \frac{pq}{(1-p)^2}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{E(X) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}}$$

2. Montrer que $E(X)$ est minimale pour $p = q$.

Comme $q = 1 - p$, on a :

$$E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} = \frac{p^2 + (1-p)^2}{p(1-p)} = \frac{2p^2 - 2p + 1}{p(1-p)}$$

La fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2 - 2x + 1}{x(1-x)}$ est dérivable sur $]0, 1[$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[, \quad f'(x) &= \frac{(4x-2)(x-x^2) - (2x^2-2x+1)(1-2x)}{x^2(1-x)^2} \\ &= \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2} \end{aligned}$$

Le signe de f' est donc celui de la fonction $x \mapsto 2x-1$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0, 1/2]$ puis strictement croissante sur $[1/2, 1[$. Comme $E(X) = f(p)$ avec $p \in]0, 1[$, on peut conclure que :

$$E(X) \text{ est minimale} \iff p = \frac{1}{2}$$

3. Montrer que la loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad P(X = i, Y = j) = p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j$$

Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors :

$$(X = i, Y = j) = (B_1 \cap \dots \cap B_i \cap V_{i+1} \cap \dots \cap V_{i+j} \cap B_{i+j+1}) \cup (V_1 \cap \dots \cap V_i \cap B_{i+1} \cap \dots \cap B_{i+j} \cap V_{i+j+1})$$

Les événements $B_1 \cap \dots \cap B_i \cap V_{i+1} \cap \dots \cap V_{i+j} \cap B_{i+j+1}$ et $V_1 \cap \dots \cap V_i \cap B_{i+1} \cap \dots \cap B_{i+j} \cap V_{i+j+1}$ sont incompatibles et les tirages sont indépendants donc :

$$\begin{aligned} P(X = i, Y = j) &= P(B_1 \cap \dots \cap B_i \cap V_{i+1} \cap \dots \cap V_{i+j} \cap B_{i+j+1}) \\ &\quad + P(V_1 \cap \dots \cap V_i \cap B_{i+1} \cap \dots \cap B_{i+j} \cap V_{i+j+1}) \\ &= P(B_1) \dots P(B_i) P(V_{i+1}) \dots P(V_{i+j}) P(B_{i+j+1}) \\ &\quad + P(V_1) \dots P(V_i) P(B_{i+1}) \dots P(B_{i+j}) P(V_{i+j+1}) \\ &= q^i \times p^j q + p^i \times q^j p \end{aligned}$$

La loi conjointe du couple (X, Y) est donc donnée par :

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad P(X = i, Y = j) = p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j$$

4. Donner la loi de Y .

Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Comme $\{(X = i) \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i, Y = j) \\ &= p^2 q^j \sum_{i=1}^{+\infty} p^{i-1} + q^2 p^j \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1} \\ &= p^2 q^j \sum_{k=0}^{+\infty} p^k + q^2 p^j \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \quad \text{en posant } k = i - 1 \\ &= \frac{p^2 q^j}{1 - p} + \frac{q^2 p^j}{1 - q} \end{aligned}$$

La loi de Y est donc donnée par :

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = j) = p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}}$$

5. Montrer qu'il existe une et une seule valeur de p à déterminer pour laquelle les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Supposons que les variables X et Y soient indépendantes. En particulier, on a l'égalité :

$$P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1) P(Y = 1)$$

Or :

$$\begin{aligned} P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1) P(Y = 1) &\iff p^2 q + p q^2 = 2 p q (p^2 + q^2) \\ &\iff p + q = 2(p^2 + q^2) \quad \text{car } p q \neq 0 \\ &\iff 2p^2 + 2(1 - p)^2 = 1 \quad \text{car } p + q = 1 \\ &\iff 4p^2 - 4p + 1 = 0 \\ &\iff p = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

puisque la seule racine du trinôme du second degré $4X^2 - 4X + 1$ est $\frac{1}{2}$.

Réciproquement, supposons que $p = \frac{1}{2}$. Alors $q = \frac{1}{2}$ et pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a :

$$P(X = i) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^i, \quad P(Y = j) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

et :

$$P(X = i, Y = j) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = P(X = i) P(Y = j)$$

Les variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes. Finalement :

$$\boxed{\text{les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes si et seulement si } p = \frac{1}{2}}$$

6. Écrire une fonction `simulationXY` d'argument p qui renvoie une succession de tirages et la valeur correspondante de X et de Y .

On simule les différents tirages en choisissant aléatoirement un nombre réel entre 0 et 1. La boule tirée est verte si le nombre est plus petit que p . On utilise une boucle `while` pour construire la liste L des tirages.

```
1 from random import *
2 def simulationXY(p) :
3     x = random()
4     y = random()
5     L = [x,y]
6     while (x<p and y<p) or (x>=p and y>=p) :
7         x, y = y, random()
8         L.append(y)
9     var_X = len(L)-1
10    z = random()
11    L.append(z)
12    while (y<p and z<p) or (y>=p and z>=p) :
13        y, z = z, random()
14        L.append(z)
15    var_Y = len(L)-var_X-1
16    return var_X, var_Y
```

Exercice 11 (C6-C7-C8)  Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes deux à deux et suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_i = X_i + X_{i+1}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.

- (a) Calculer l'espérance de $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Les variables aléatoires X_i et X_{i+1} suivent la loi de Bernoulli de paramètre p donc (par linéarité) la variable aléatoire Y_i admet une espérance qui vaut :

$$E(Y_i) = E(X_i) + E(X_{i+1}) = 2p$$

Par linéarité de l'espérance, la variable aléatoire Y_n admet également une espérance qui vaut :

$$E(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(Y_i) = 2p$$

(b) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, calculer $\text{cov}(Y_i, Y_j)$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Pour calculer $\text{cov}(Y_i, Y_j)$, on distingue quatre cas.

• **Premier cas : $i = j$**

On a $Y_i = X_i + X_{i+1}$ et les variables aléatoires X_i et X_{i+1} sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p donc :

$$\text{cov}(Y_i, Y_j) = V(Y_i) = V(X_i) + V(X_{i+1}) = 2p(1 - p)$$

• **Deuxième cas : $j = i + 1$**

Par bilinéarité de la covariance, on a :

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_i, Y_j) &= \text{cov}(X_i + X_{i+1}, X_{i+1} + X_{i+2}) \\ &= \text{cov}(X_i, X_{i+1}) + \text{cov}(X_i, X_{i+2}) + \text{cov}(X_{i+1}, X_{i+1}) + \text{cov}(X_{i+1}, X_{i+2}) \end{aligned}$$

Or les variables aléatoires X_i et X_{i+1} sont indépendantes, de même pour les variables aléatoires X_i et X_{i+2} ainsi que pour X_{i+1} et X_{i+2} . Par conséquent :

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(X_i, X_{i+2}) = \text{cov}(X_{i+1}, X_{i+2}) = 0$$

De plus, $\text{cov}(X_{i+1}, X_{i+1}) = V(X_{i+1}) = p(1 - p)$. Ainsi :

$$\text{cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p(1 - p)$$

• **Troisième cas : $i = j + 1$**

Comme pour le cas précédent, on obtient $\text{cov}(Y_i, Y_j) = p(1 - p)$

• **Quatrième cas : on suppose maintenant que $i < j - 1$ ou $j < i - 1$**

Par bilinéarité de la covariance, on a :

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_i, Y_j) &= \text{cov}(X_i + X_{i+1}, X_j + X_{j+1}) \\ &= \text{cov}(X_i, X_j) + \text{cov}(X_i, X_{j+1}) + \text{cov}(X_{i+1}, X_j) + \text{cov}(X_{i+1}, X_{j+1}) \end{aligned}$$

Or $\{i, i + 1\} \cap \{j, j + 1\} = \emptyset$ et les variables aléatoires X_k (où $k \in \mathbb{N}^*$) sont deux à deux indépendantes donc :

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(X_i, X_{j+1}) = \text{cov}(X_{i+1}, X_j) = \text{cov}(X_{i+1}, X_{j+1}) = 0$$

puis $\text{cov}(Y_i, Y_j) = 0$.

(c) En déduire que $V(T_n) = \frac{(4n - 2)p(1 - p)}{n^2}$.

Par bilinéarité de la covariance, on a :

$$V(T_n) = \text{cov}(T_n, T_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(Y_i, Y_j)$$

puis, en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} V(T_n) &= \frac{1}{n^2} \left(\text{cov}(Y_1, Y_1) + \text{cov}(Y_1, Y_2) + \sum_{i=2}^{n-1} (\text{cov}(Y_i, Y_{i-1}) + \text{cov}(Y_i, Y_i) + \text{cov}(Y_i, Y_{i+1})) \right. \\ &\quad \left. + \text{cov}(Y_n, Y_{n-1}) + \text{cov}(Y_n, Y_n) \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(3p(1 - p) + \sum_{i=2}^{n-1} 4p(1 - p) + 3p(1 - p) \right) \\ &= \frac{1}{n^2} (6p(1 - p) + 4(n - 2)p(1 - p)) \end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{V(T_n) = \frac{(4n - 2)p(1 - p)}{n^2}}$.

- 2.(a) Écrire une fonction en langage `python` qui prend en paramètre un nombre réel p compris entre 0 et 1 et qui renvoie 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $1 - p$.
On simule aléatoirement un nombre réel entre 0 et 1 et on regarde la position de ce nombre par rapport à p .

```
1 from random import *
2 def proba(p) :
3     x = random()
4     if x <= p :
5         return 1
6     else :
7         return 0
```

- (b) Écrire une fonction `listeXi` qui prend en paramètre un nombre entier n non nul et un nombre réel p compris entre 0 et 1 et qui retourne une liste de longueur n dont chaque élément est une valeur de X_i .
On initialise une liste vide dans laquelle on ajoute une succession de n valeurs (soit 0 soit 1) à l'aide de la fonction précédente.

```
1 def listeXi(n,p) :
2     L = []
3     for k in range(n) :
4         L.append(proba(p))
5     return L
```

- (c) En déduire une fonction `listeYi` renvoyant une liste de longueur n dont le i^{e} élément est une valeur prise par Y_i .
On obtient les variables aléatoires $X_1, \dots, X_{n+1}$ à l'aide de `listeXi(n+1,p)`.

```
1 def listeYi(n,p) :
2     L = []
3     M = listeXi(n,p)
4     for k in range(n) :
5         L.append(M[k]+M[k+1])
6     return L
```

- (d) Écrire enfin une fonction `valeurTn` qui prend en paramètre un nombre entier n non nul et le nombre p et qui retourne une valeur simulée de T_n .
On fait la somme des éléments de la liste `listeYi(n,p)`.

```
1 def valeurTn(n,p) :
2     s = 0
3     for k in range(n) :
4         s = s+listeYi(n,p)
5     return s/n
```

Exercice 12 (C4-C5-C8)  On lance une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'on obtienne *pile* pour la deuxième fois. On suppose qu'à chaque lancer de la pièce, la probabilité d'obtenir *pile* est égale à $p \in]0, 1[$. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux *pile* pour la première fois. On supposera qu'il est presque certain d'obtenir au moins une fois deux *pile* consécutivement.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Si $X = n$, on place $n - 1$ boules numérotées de 2 à n dans une urne et on tire au hasard l'une de ces boules. On note alors Y le numéro de la boule tirée.

1. Montrer que la loi de X est déterminée par :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad P(X = k) = (k - 1)p^2(1 - p)^{k-2}$$

On obtient *pile* pour la deuxième fois au deuxième lancer au plus tôt. Pour tout entier $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, il est également possible d'obtenir *pile* pour la deuxième fois au k^{e} tirage. L'univers image de X est donc $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on note F_j l'événement : « on obtient *face* au j^{e} tirage ». Si on a obtenu le deuxième *pile* au k^{e} lancer, alors on a pu obtenir le premier *pile* au cours de l'un des $k - 1$ premiers tirages, tous les autres tirages ayant donc donné *face*. On a alors l'égalité :

$$(X = k) = \bigcup_{\ell=1}^{k-1} (F_1 \cap \dots \cap F_{\ell-1} \cap \overline{F_\ell} \cap F_{\ell+1} \cap \dots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k})$$

Les événements qui apparaissent dans cette réunion sont deux à deux incompatibles donc :

$$P(X = k) = \sum_{\ell=1}^{k-1} P(F_1 \cap \dots \cap F_{\ell-1} \cap \overline{F_\ell} \cap F_{\ell+1} \cap \dots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k})$$

Ensuite, par indépendance (mutuelle) des lancers, on a pour tout $\ell \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} P(F_1 \cap \dots \cap F_{\ell-1} \cap \overline{F_\ell} \cap F_{\ell+1} \cap \dots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k}) &= P(F_1) \dots P(F_{\ell-1}) P(\overline{F_\ell}) P(F_{\ell+1}) \dots \\ &\quad P(F_{k-1}) P(\overline{F_k}) \\ &= p^2(1 - p)^{k-2} \end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad P(X = k) = (k - 1)p^2(1 - p)^{k-2}}$$

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

La variable aléatoire X admet une espérance si la série $\sum_{k \geq 2} k P(X = k)$ est absolument convergente, c'est-à-dire si elle est convergente car cette série est à termes positifs. Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$k P(X = k) = p^2 k(k - 1)(1 - p)^{k-2}$$

Comme $p \in]0, 1[$, on a aussi $1 - p \in]0, 1[$ et donc la série géométrique dérivée seconde $\sum_{k \geq 2} k(k - 1)(1 - p)^{k-2}$ est convergente. L'ensemble des séries convergentes étant un espace vectoriel, on peut conclure que X admet une espérance qui vaut :

$$E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} k P(X = k) = p^2 \sum_{k=2}^{+\infty} k(k - 1)(1 - p)^{k-2} = \frac{2p^2}{(1 - (1 - p))^3} = \frac{2}{p}$$

Finalement :

la variable aléatoire X admet une espérance qui vaut $E(X) = \frac{2}{p}$

3. Démontrer que la variable aléatoire Y admet une espérance qui vaut $E(Y) = \frac{1+p}{p}$.

L'univers image de Y est $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. La variable aléatoire Y admet donc une espérance si la série $\sum_{\ell \geq 2} \ell P(Y = \ell)$ est absolument convergente, c'est-à-dire si elle est convergente car cette série est à termes positifs.

Déterminons d'abord la loi de Y . Soit $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Comme $\{(X = k) \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y = \ell) = \sum_{k=2}^{+\infty} P(Y = \ell \mid X = k) P(X = k) = p^2 \sum_{k=2}^{+\infty} P(Y = \ell \mid X = k) (k-1)(1-p)^{k-2}$$

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Si $\ell > k$, alors il n'est pas possible de prélever de l'urne la boule numérotée ℓ (puisque'il y a dans l'urne des boules dont les numéros sont inférieurs ou égaux à k), c'est-à-dire $P(Y = \ell \mid X = k) = 0$. Si $\ell \leq k$, alors $P(Y = \ell \mid X = k) = \frac{1}{k-1}$ (car il y a $k-1$ boules dans l'urne dont la boule numérotée ℓ). Ainsi :

$$P(Y = \ell) = p^2 \sum_{k=\ell}^{+\infty} (1-p)^{k-2} = p^2 (1-p)^{\ell-2} \sum_{k=\ell}^{+\infty} (1-p)^{k-\ell}$$

En effectuant le changement d'indice $j = k - \ell$ et en utilisant la somme de la série géométrique (convergente) de raison $1-p$, on obtient :

$$P(Y = \ell) = p^2 (1-p)^{\ell-2} \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j = \frac{p^2 (1-p)^{\ell-2}}{1 - (1-p)} = p(1-p)^{\ell-2}$$

Pour tout $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a donc :

$$\ell P(Y = \ell) = \frac{p}{1-p} \ell (1-p)^{\ell-1}$$

On sait que la série géométrique dérivée première $\sum_{\ell \geq 2} \ell (1-p)^{\ell-1}$ est convergente (car $1-p \in]0, 1[$) donc Y admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{\ell=2}^{+\infty} \ell P(Y = \ell) = \frac{p}{1-p} \sum_{\ell=2}^{+\infty} \ell (1-p)^{\ell-1} = \frac{p}{1-p} \left(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell (1-p)^{\ell-1} - 1 \right) \\ &= \frac{p}{1-p} \left(\frac{1}{(1 - (1-p))^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1-p^2}{p(1-p)} \end{aligned}$$

Finalement :

la variable aléatoire Y admet une espérance qui vaut $E(Y) = \frac{1+p}{p}$

- 4.(a) Écrire une fonction `experience` qui prend comme argument d'entrée p et sort une succession de 0 (pour face) et de 1 (pour pile) représentant les lancers jusqu'au deuxième pile.

On simule les lancers de pièces en choisissant aléatoirement un nombre réel compris entre 0 et 1. La variable `s` permet de compter le nombre de *pile* obtenus.

```
1 import random as rd
2 def experience(p) :
3     s = 0
4     L = []
5     while (s != 2) :
6         x = rd.random()
7         if (x <= p) :
8             L.append(1)
9             s = s+1
10        else :
11            L.append(0)
12    return L
```

- (b) Écrire une fonction `X` qui prend comme argument p et renvoyant la valeur de X correspondante.

La valeur de la variable aléatoire X correspond à la longueur de la liste `experience(p)`.

```
1 def X(p) :
2     L = experience(p)
3     return len(L)
```

- (c) Écrire une fonction `Y` simulant la variable aléatoire Y .

Une fois que l'on connaît la valeur de X , on choisit un nombre aléatoirement à l'aide de la commande `randint`.

```
1 def Y(p) :
2     x = X(p)
3     y = rd.randint(2,x)
4     return y
```

- (d) Estimer l'espérance de Y dans le cas où $p = \frac{1}{4}$.

On simule un grand nombre de fois la variable aléatoire Y (à l'aide de la fonction `Y`) et on calcule la moyenne des valeurs observées.

```
1 def esperance(N) :
2     s = 0
3     for k in range(N) :
4         s = s+Y(1/4)
5     return s/N
```

5. On pose maintenant $Z = X - Y$.

(a) Déterminer la loi de Z .

On sait que l'univers image de X est $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. De plus, Y peut prendre toutes les valeurs entre 2 et X . L'univers image de Z est donc $\mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On cherche $P(Z = k)$. Comme $\{(Y = j) \mid j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(Z = k) = \sum_{j=2}^{+\infty} P(X = j + k, Y = j) = \sum_{j=2}^{+\infty} P(Y = j \mid X = j + k) P(X = j + k)$$

d'après la formule des probabilités composées car $P(X = j + k) \neq 0$ pour tout $j \geq 2$. En utilisant la loi de probabilité de X et les lois de probabilités conditionnelles de Y , on a :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j + k - 1} (j + k - 1) p^2 (1 - p)^{j+k-2} \\ &= p^2 (1 - p)^k \sum_{j=2}^{+\infty} (1 - p)^{j-2} \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= p^2 (1 - p)^k \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1 - p)^{\ell} \quad \text{changement d'indice } \ell = j - 2 \\ &= p(1 - p)^k \end{aligned}$$

en utilisant la somme de la série géométrique (convergente) de raison $1 - p$. Finalement, la loi de Z est donnée par :

$$\boxed{Z(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et, pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ on a } P(Z = k) = p(1 - p)^k}$$

(b) Montrer que Y et Z sont indépendantes.

Montrons que :

$$\forall (k, \ell) \in Y(\Omega) \times Z(\Omega), \quad P(Y = k, Z = \ell) = P(Y = k) P(Z = \ell)$$

Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \times \mathbb{N}$. On a d'une part :

$$P(Y = k) P(Z = \ell) = p(1 - p)^{k-2} p(1 - p)^{\ell} = p^2 (1 - p)^{k+\ell-2}$$

et, d'autre part :

$$\begin{aligned} P(Y = k, Z = \ell) &= P(Y = k, X - Y = \ell) \\ &= P(X = k + \ell, Y = k) \\ &= P(Y = k \mid X = k + \ell) P(X = k + \ell) \quad \text{car } P(X = k + \ell) \neq 0 \\ &= (k + \ell - 1) p^2 (1 - p)^{k+\ell-2} \times \frac{1}{k + \ell - 1} \\ &= p^2 (1 - p)^{k+\ell-2} \\ &= P(Y = k) P(Z = \ell) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{les variables aléatoires } Y \text{ et } Z \text{ sont indépendantes}}$$

COMMENTAIRE

La variable aléatoire Z suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}$, ce qui revient à dire que la variable aléatoire $\tilde{Z} = Z + 1$ suit la loi géométrique *classique* (c'est-à-dire sur $\mathbb{N}^*$).

Exercice 13 (C1-C2-C4-C5-C8, oral Agro-Véto 2010)  Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p \in]0, 1[$, c'est-à-dire telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = P(Y = n) = pq^n$$

où $q = 1 - p$. On pose $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X si elles existent.

La variable aléatoire X admet une espérance si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n P(X = n)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à étudier sa convergence. Or on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n P(X = n) = npq^n = pq \times nq^{n-1}$$

Comme $q \in]0, 1[$ (puisque $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$), la série géométrique dérivée première $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ converge. Par linéarité, la variable aléatoire X admet donc une espérance qui vaut :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} npq^n = \sum_{n=1}^{+\infty} npq^n = pq \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = pq \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$$

puisque $1 - q = p$.

D'après le théorème de Koenig-Huygens, la variable aléatoire X admet une variance si X^2 admet une espérance et, dans ce cas :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \frac{q^2}{p^2}$$

D'après le théorème de transfert, X^2 admet une espérance si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 P(X = n)$ est absolument convergente et donc convergente car elle est à termes positifs. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n^2 P(X = n) = n^2 pq^n = (n(n-1) + n)pq^n = pq^2 \times n(n-1)q^{n-2} + pq \times nq^{n-1}$$

Comme $q \in]0, 1[$, les séries géométriques dérivée première et seconde $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes. Par combinaison linéaire de séries convergentes, la variable aléatoire X^2 admet donc une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= pq^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} + pq \sum_{n \geq 2} nq^{n-1} = \frac{2pq^2}{(1-q)^3} + \frac{pq}{(1-q)^2} \\ &= \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} \end{aligned}$$

Finalement :

$$V(X) = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

car $p + q = 1$. Finalement :

$$X \text{ admet une espérance et une variance qui valent } E(X) = \frac{q}{p} \text{ et } V(X) = \frac{q}{p^2}$$

COMMENTAIRE

En fait, il y a bien plus efficace que la méthode *traditionnelle* pour répondre à cette question. En effet, la variable aléatoire $X' = X + 1$ suit la loi géométrique *classique* (c'est-à-dire sur $\mathbb{N}^*$) puisque $X'(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X' = n) = P(X = n - 1) = pq^{n-1} \quad (\text{car } n - 1 \in \mathbb{N})$$

On sait alors (c'est du cours) que X' admet une espérance et une variance avec $E(X') = \frac{1}{p}$ et $V(X') = \frac{q}{p^2}$. Comme $X = X' - 1$, on peut alors dire que :

— par linéarité de l'espérance, la variable aléatoire X admet une espérance qui vaut :

$$E(X) = E(X') - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$$

— la variable aléatoire X admet une variance qui vaut :

$$V(X) = V(X' - 1) = 1^2 V(X') = \frac{q}{p^2}$$

On rappelle que la variance n'a pas un caractère linéaire...

2. Donner la loi conjointe du couple (U, V) .

On a $U(\Omega) = V(\Omega) = \mathbb{N}$ (car $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$) donc l'univers image du couple (U, V) est $(U, V)(\Omega) = U(\Omega) \times V(\Omega) = \mathbb{N}^2$.

Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$. On a $\min(X, Y) \leq \max(X, Y)$ donc $P(U = k, V = \ell) = 0$ si $k > \ell$. On suppose maintenant quand $k \leq \ell$ et on distingue deux cas.

— **Premier cas :** $k = \ell$

On a $(U, V) = (k, \ell) = (X = k, Y = k)$ donc, comme X et Y sont des variables aléatoires indépendantes :

$$P(U = k, V = \ell) = P(U = k) P(V = k) = p^2 q^{2k}$$

— **Deuxième cas :** $k < \ell$

Ici, on a :

$$(U, V) = (k, \ell) = (\min(X, Y) = k, \max(X, Y) = \ell) = (X = k, Y = \ell) \cup (X = \ell, Y = k)$$

Les événements $(X = k, Y = \ell)$ et $(X = \ell, Y = k)$ sont incompatibles (car $k \neq \ell$) donc :

$$P(U = k, V = \ell) = P(X = k, Y = \ell) + P(X = \ell, Y = k)$$

puis, par indépendance de X et Y :

$$P(U = k, V = \ell) = P(X = k) P(Y = \ell) + P(X = \ell) P(Y = k) = p^2 q^{k+\ell} + p^2 q^{\ell+k} = 2p^2 q^{k+\ell}$$

La loi conjointe du couple (U, V) est donc donnée par :

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, \quad P(U = k, V = \ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > \ell \\ p^2 q^{2k} & \text{si } k = \ell \\ 2p^2 q^{k+\ell} & \text{si } k < \ell \end{cases}$$

3. Déterminer les lois de U et V . Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

On sait que $U(\Omega) = V(\Omega) = \mathbb{N}$.

— **Loi de U**

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $\{(V = \ell) \mid \ell \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements, on sait d'après la formule des probabilités totales que la série $\sum_{\ell \in \mathbb{N}} P(U = k, V = \ell)$ est convergente de somme $P(U = k)$. En utilisant la loi conjointe du couple (U, V) obtenue à la question 2., on obtient :

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{\ell=k}^{+\infty} P(U = k, V = \ell) = P(U = k, V = k) + \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} P(U = k, V = \ell) \\ &= p^2 q^{2k} + \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} 2p^2 q^{k+\ell} \\ &= p^2 q^{2k} + 2p^2 q^{2k+1} \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} q^{\ell-(k+1)} \end{aligned}$$

Le changement d'indice $m = \ell - (k + 1)$ fournit :

$$P(U = k) = p^2 q^{2k} + 2p^2 q^{2k+1} \sum_{m=0}^{+\infty} q^m = p^2 q^{2k} + 2p^2 q^{2k+1} \times \frac{1}{1-q}$$

et donc (puisque $1 - q = p$) :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(U = k) = p^2 q^{2k} + 2pq^{2k+1}}$$

— **Loi de V**

Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Comme $\{(U = k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements, on sait d'après la formule des probabilités totales que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} P(U = k, V = \ell)$ est convergente de somme $P(V = \ell)$. En utilisant la loi du couple (U, V) obtenue à la question 2., il vient :

$$P(V = \ell) = \sum_{k=0}^{\ell} P(U = k, V = \ell)$$

Si $\ell = 0$, alors :

$$P(V = 0) = P(U = 0, V = 0) = p^2$$

et si $\ell \in \mathbb{N}^*$, on a en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} P(V = \ell) &= P(U = \ell, V = \ell) + \sum_{k=0}^{\ell-1} P(U = k, V = \ell) = p^2 q^{2\ell} + 2p^2 q^{\ell} \sum_{k=0}^{\ell-1} q^k \\ &= p^2 q^{2\ell} + 2p^2 q^{\ell} \times \frac{1 - q^{\ell}}{1 - q} \end{aligned}$$

en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Or $1 - q = p$ donc :

$$P(V = \ell) = 2pq^{\ell} + p^2 q^{2\ell} - 2pq^{2\ell}$$

Cette formule est aussi valable pour $\ell = 0$ donc :

$$\boxed{\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad P(V = \ell) = 2pq^{\ell} + p^2 q^{2\ell} - 2pq^{2\ell}}$$

On sait que $P(U = 1, V = 0) = 0$ (car $1 > 0$). Or $P(U = 1) \neq 0$ et $P(V = 0) \neq 0$. Ainsi :

$$P(U = 1, V = 0) \neq P(U = 1)P(V = 0)$$

et donc :

les variables aléatoires U et V ne sont pas indépendantes

4. Exprimer $U + V$ en fonction de X et Y . En déduire la loi de $U + V$ et son espérance si elle existe.

On a $U + V = X + Y$. En effet :

- si $X \leq Y$, alors $U = \min(X, Y) = X$ et $V = \max(X, Y) = Y$ donc $U + V = X + Y$;
- et si $X > Y$, alors $U = Y$ et $V = X$ donc $U + V = Y + X = X + Y$.

Les variables aléatoires X et Y admettent une espérance d'après la question 1. (Y suivant la même loi que X). Par linéarité de l'espérance :

la variable aléatoire $U + V$ admet une espérance qui vaut $E(U + V) = E(X) + E(Y) = \frac{2q}{p}$

Déterminons maintenant la loi de $U + V$. On a $(U + V)(\Omega) = \mathbb{N}$ (car $U(\Omega) = V(\Omega) = \mathbb{N}$). Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(U + V = k) = (X + Y = k) = \bigcup_{\ell=0}^k (X = k - \ell, Y = \ell)$$

Les événements $(X = k - \ell, Y = \ell)$ (où $\ell \in \llbracket 0, k \rrbracket$) sont deux à deux incompatibles donc :

$$\begin{aligned} P(W = k) &= \sum_{\ell=0}^k P(X = k - \ell, Y = \ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^k P(X = k - \ell) P(Y = \ell) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= p^2 \sum_{\ell=0}^k q^{k-\ell} q^\ell \end{aligned}$$

Donc la loi de $U + V$ est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(U + V = k) = (k + 1)p^2 q^k$$

5. On pose $D = X - Y$. Déterminer la loi de D et montrer que U et D sont indépendantes.
L'univers image de D est $\mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$(D = n) = (X - Y = n) = \bigcup_{\ell=0}^{+\infty} (X = \ell + n, Y = \ell)$$

On distingue deux cas suivant le signe de n .

— **Premier cas :** $n < 0$

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a :

$$\ell + n \in X(\Omega) \iff \ell + n \geq 0 \iff \ell \geq -n$$

donc $(D = n) = \bigcup_{\ell=-n}^{+\infty} (X = \ell + n, Y = \ell)$. Les événements $(X = \ell + n, Y = \ell)$ (où $\ell \geq -n$) sont deux à deux incompatibles donc :

$$\begin{aligned} P(D = n) &= \sum_{\ell=-n}^{+\infty} P(X = \ell + n, Y = \ell) \\ &= \sum_{\ell=-n}^{+\infty} P(X = \ell + n) P(Y = \ell) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= p^2 q^n \sum_{\ell=-n}^{+\infty} (q^2)^\ell \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= p^2 q^{-n} \sum_{\ell=-n}^{+\infty} (q^2)^{\ell+n} \quad \text{par linéarité de la somme} \end{aligned}$$

Le changement d'indice $k = \ell + n$ et la formule donnant la somme d'une série géométrique (convergente puisque $q^2 \in]-1, 1[$) fournissent :

$$P(D = n) = p^2 q^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = p^2 q^{-n} \times \frac{1}{1 - q^2} = \frac{p^2 q^{-n}}{(1 - q)(1 + q)} = \frac{pq^{-n}}{1 + q}$$

— **Deuxième cas :** $n \geq 0$

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a $\ell + n \in \mathbb{N}$ donc, comme les événements $(X = \ell + n, Y = \ell)$ (où $\ell \in \mathbb{N}$) sont deux à deux incompatibles, on a :

$$P(D = n) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} P(X = \ell + n, Y = \ell) = p^2 q^n \sum_{\ell=0}^n (q^2)^\ell = \frac{p^2 q^n}{1 - q^2} = \frac{pq^n}{1 + q}$$

Finalement, la loi de D est donc donnée par :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \quad P(D = n) = \frac{pq^{|n|}}{1 + q}}$$

Montrons que les variables aléatoires U et D sont indépendantes, c'est-à-dire que :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(U = k, D = n) = \mathbb{P}(U = k) \mathbb{P}(D = n)$$

Soit $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. On a :

$$\mathbb{P}(U = k, D = n) = \mathbb{P}(\min(X, Y) = k, X - Y = n)$$

On distingue deux cas suivant le signe de n .

— **Premier cas :** $n < 0$

Si $X - Y = n$ alors $X < Y$ et donc $\min(X, Y) = X$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U = k, D = n) &= \mathbb{P}(X = k, Y = k - n) = \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = \underbrace{k - n}_{\geq 0}) \\ &\quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= p^2 q^{2k-n} \end{aligned}$$

— **Deuxième cas :** $n \geq 0$

Si $X - Y = n$ alors $X \geq Y$ et donc $\min(X, Y) = Y$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U = k, D = n) &= \mathbb{P}(Y = k, X = n + k) = \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n + k) \\ &\quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= p^2 q^{2k+n} \end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{P}(U = k, D = n) = p^2 q^{2k+|n|}$.

D'autre part, on a :

$$\mathbb{P}(U = k) \mathbb{P}(D = n) = (p^2 q^{2k} + 2pq^{2k+1}) \frac{pq^{|n|}}{1+q} = \frac{p+2q}{1+q} p^2 q^{2k+|n|}$$

Or $p + 2q = (p + q) + q = 1 + q$ donc $\frac{p+2q}{1+q} = 1$ puis :

$$\mathbb{P}(U = k) \mathbb{P}(D = n) = \mathbb{P}(U = k, D = n)$$

Finalement, les variables aléatoires U et D sont indépendantes.

Exercice 14 (C2-C4-C5-C6-C7)  Soient $(p, q, -Cr) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tel que $p + q + r = 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le vecteur aléatoire $Y_n = (U_n, V_n)$ dont la loi conjointe est appelée la *loi trinomiale* : pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leq k + \ell \leq n$, on a :

$$P(Y_n = (k, \ell)) = \frac{n!}{k! \ell! (n - k - \ell)!} p^k q^\ell r^{n-k-\ell}$$

et, si la condition $0 \leq k + \ell \leq n$ n'est pas satisfaite, on a $P(Y_n = (k, \ell)) = 0$.

1. Démontrer que les lois marginales de Y_n sont des lois binomiales à préciser.

Les univers images de U_n et V_n sont égaux à $\llbracket 0, n \rrbracket$. En effet, dans la condition $0 \leq k + \ell \leq n$, chacun des entiers k ou ℓ peut atteindre tous les entiers compris entre 0 et n .

- Déterminons la loi de U_n .

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $\{(V_n = \ell) \mid \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(U_n = k) = \sum_{\ell=0}^n P(Y_n = (k, \ell))$$

Or :

$$\forall \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad 0 \leq k + \ell \leq n \iff 0 \leq \ell \leq n - k$$

donc :

$$\begin{aligned} P(U_n = k) &= \sum_{\ell=0}^{n-k} P(Y_n = (k, \ell)) = \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{n!}{k! \ell! (n - k - \ell)!} p^k q^\ell r^{n-k-\ell} \\ &= \frac{n!}{(n - k)! k!} p^k \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(n - k)!}{\ell! (n - k - \ell)!} q^\ell r^{n-k-\ell} \\ &= \binom{n}{k} p^k \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n - k}{\ell} q^\ell r^{n-k-\ell} \\ &= \binom{n}{k} p^k (q + r)^{n-k} \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton. Or $q + r = 1 - p$ donc on peut conclure que :

la variable aléatoire U_n suit la loi binomiale de paramètres n et p

- Déterminons la loi de V_n .

Soit $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Le même raisonnement que précédemment en utilisant le système complet d'événements $\{(U_n = k) \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ fournit :

$$P(V_n = \ell) = \sum_{k=0}^{n-\ell} P(Y_n = (k, \ell)) = \binom{n}{\ell} q^\ell (1 - q)^{n-\ell}$$

donc :

la variable aléatoire V_n suit la loi binomiale de paramètres n et q

2. Les variables aléatoires U_n et V_n sont-elles indépendantes ? Justifier.

On a $P(Y_n = (n, n)) = 0$ car $n + n > n$ puisque $n \in \mathbb{N}^*$. Or $P(U_n = n) = p^n \neq 0$ et de même $P(V_n = n) = q^n \neq 0$. Donc $P(U_n = n) P(V_n = n) \neq 0$. Par conséquent :

$$P(Y_n = (n, n)) \neq P(U_n = n) P(V_n = n)$$

Donc les variables aléatoires U_n et V_n ne sont pas indépendantes.

3.(a) Déterminer la loi de $W_n = U_n + V_n$.

L'univers image de W_n est $\llbracket 0, n \rrbracket$ (car $U_n(\Omega) = V_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$). Soit $k \in W_n(\Omega)$. Alors :

$$(W_n = k) = (U_n + V_n = k) = \bigcup_{\ell=0}^k (U_n = k - \ell, V_n = \ell)$$

Les événements $(U_n = k - \ell, V_n = \ell)$ (où $\ell \in \llbracket 0, k \rrbracket$) sont deux à deux incompatibles donc :

$$\begin{aligned} P(W_n = k) &= \sum_{\ell=0}^k P(U_n = k - \ell, V_n = \ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^k \frac{n!}{(k - \ell)! \ell! (n - k)!} p^{k-\ell} q^\ell r^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k! (n - k)!} r^{n-k} \sum_{\ell=0}^k \frac{k!}{\ell! (k - \ell)!} p^{k-\ell} q^\ell \quad (\text{par linéarité de la somme}) \\ &= \binom{n}{k} r^{n-k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} p^{k-\ell} q^\ell \\ &= \binom{n}{k} r^{n-k} (1 - r)^k \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton et car $p + q = 1 - r$. Finalement :

la variable aléatoire W_n suit la loi binomiale de paramètres n et $1 - r$

(b) En déduire que $\text{cov}(U_n, V_n) = n \frac{1 - p^2 - q^2 - r^2}{2}$ et montrer que cette covariance est strictement positive. Que peut-on en déduire ?

On sait que :

$$\text{var}(W_n) = \text{var}(U_n + V_n) = \text{var}(U_n) + \text{var}(V_n) + 2 \text{cov}(U_n, V_n)$$

Or $U_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $V_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)$ et $W_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - r)$ donc :

$$\text{var}(U_n) = np(1 - p), \quad \text{var}(V_n) = nq(1 - q) \quad \text{et} \quad \text{var}(W_n) = nr(1 - r)$$

On en déduit donc que :

$$\text{cov}(U_n, V_n) = \frac{\text{var}(W_n) - \text{var}(U_n) - \text{var}(V_n)}{2} = n \frac{p + q + r - p^2 - q^2 - r^2}{2}$$

Or $p + q + r = 1$ donc :

$$\text{cov}(U_n, V_n) = n \frac{1 - p^2 - q^2 - r^2}{2}$$

Soit $x \in]0, 1[$. Alors $x^2 - x = x(x - 1) < 0$ car $x - 1 < 0$ et $x > 0$. Ainsi $x^2 < x$. Comme $(p, q, r) \in]0, 1[$, on a $p^2 < p$, $q^2 < q$ et $r^2 < r$. Par conséquent :

$$p^2 + q^2 + r^2 < p + q + r \quad \text{c'est-à-dire} \quad p^2 + q^2 + r^2 < 1$$

et donc $\text{cov}(U_n, V_n) > 0$. En particulier, $\text{cov}(U_n, V_n) \neq 0$. On retrouve le fait que :

les variables aléatoires U_n et V_n ne sont pas indépendantes

4. Soit $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer la loi conditionnelle de U_n sachant ($V_n = \ell$).

Soient $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On cherche $P(U_n = k | V_n = \ell)$. On sait que V_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$ donc $P(V_n = \ell) \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} P(U_n = k | V_n = \ell) &= \frac{P(U_n = k, V_n = \ell)}{P(V_n = \ell)} = \frac{n!}{k! \ell! (n - k - \ell)!} p^k q^\ell r^{n-k-\ell} \times \frac{\ell! (n - \ell)!}{n! q^\ell (1 - q)^{n-\ell}} \\ &= \frac{(n - \ell)!}{k! (n - \ell - k)!} \times \frac{p^k r^{n-k-\ell}}{(p + r)^k (p + r)^{n-\ell-k}} \\ &= \binom{n - \ell}{k} \left(\frac{p}{p + r} \right)^k \left(1 - \frac{p}{p + r} \right)^{n-\ell-k} \end{aligned}$$

Finalement :

la loi conditionnelle de U_n sachant ($V_n = \ell$) est la loi binomiale de paramètres $n - \ell$ et $\frac{p}{p + r}$

Exercice 15 (C1)  Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On pioche dans une urne contenant a boules blanches et b boules noires, avec remise. On note X la variable aléatoire donnant le rang de la première boule blanche tirée.

On pose $p = \frac{a}{a + b}$.

1.(a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

On effectue une succession d'épreuves de Bernoulli (tirer une boule de l'urne) dont le succès (obtenir une boule blanche) a pour probabilité p . Ces épreuves sont mutuellement indépendantes (car il y a remise de la boule tirée) et X correspond au rang du premier succès donc :

$$X \text{ suit la loi géométrique de paramètre } p = \frac{a}{a + b}$$

Ainsi $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$.

(b) Calculer $P(X \geq k)$ pour tout entier naturel k .

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $(X \geq k) = \bigcup_{j=k}^{+\infty} (X = j)$ et les événements $(X = j)$ (où $j \geq k$) sont

deux à deux incompatibles et P est une probabilité donc la série $\sum_{j \geq k} P(X = j)$ est convergente de somme $P(X \geq k)$:

$$P(X \geq k) = \sum_{j=k}^{+\infty} P(X = j) = \sum_{j=k}^{+\infty} (1 - p)^{j-1} p = p(1 - p)^{k-1} \sum_{j=k}^{+\infty} (1 - p)^{j-k}$$

par linéarité de la somme. En utilisant le changement d'indice $\ell = j - k$ puis la formule donnant la somme de la série géométrique (convergente) de raison $1 - p \in] - 1, 1[$, on obtient :

$$P(X \geq k) = p(1 - p)^{k-1} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1 - p)^\ell = p(1 - p)^{k-1} \times \frac{1}{1 - (1 - p)}$$

et donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \geq k) = (1 - p)^{k-1}$$

2. Tic et Tac tirent des boules dans l'urne, avec remise, en attendant leur première boule blanche. On note X (respectivement Y) la variable aléatoire donnant le rang de la première boule blanche obtenue par Tic (respectivement par Tac).
- (a) Soit m un entier naturel non nul. Calculer $P(X \geq mY)$ et en donner un équivalent simple quand m tend vers $+\infty$.

On sait que X et Y suivent la même loi géométrique de paramètre p . De plus, X et Y sont indépendantes (le résultat obtenu par Tic à chaque tirage est indépendant de celui de Tac). Comme $\{(Y = \ell) \mid \ell \in \mathbb{N}^*\}$ est un système complet d'événements, on sait d'après la formule des probabilités totales que la série $\sum_{\ell \geq 1} P(X \geq mY, Y = \ell)$ est convergente de somme $P(X \geq mY)$. En utilisant la question 1.(b), on obtient :

$$\begin{aligned}
 P(X \geq mY) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X \geq mY, Y = \ell) \\
 &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X \geq m\ell) P(Y = \ell) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
 &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} (1-p)^{m\ell-1} (1-p)^{\ell-1} p \\
 &= p(1-p)^{m-1} \sum_{\ell=1}^{+\infty} ((1-p)^{m+1})^{\ell-1} \quad \text{par linéarité de la somme}
 \end{aligned}$$

Le changement d'indice $n = \ell - 1$ et la formule donnant la somme d'une série géométrique (convergente) fournit :

$$P(X \geq mY) = \frac{p(1-p)^{m-1}}{1 - (1-p)^{m+1}}$$

Comme $1-p \in]-1, 1[$, on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} (1-p)^{m+1} = 0$ et donc $1 - (1-p)^{m+1} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} 1$. L'équivalent cherché est donc :

$$\boxed{P(X \geq mY) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} p(1-p)^{m-1}}$$

- (b) Déterminer la probabilité que Tic doive faire au moins deux fois plus (au sens large) de tirages que Tac pour obtenir sa première boule blanche.

Dire que Tic fait au moins deux fois plus de tirages que Tac pour obtenir une boule blanche signifie que $X \geq 2Y$. D'après la question 2.(a), on a :

$$\boxed{P(X \geq 2Y) = \frac{p(1-p)}{1 - (1-p)^3} = \frac{1-p}{p^2 - 3p + 3}}$$

3. Écrire une fonction **premiereblanche** qui modélise les tirages pour Tic jusqu'à la première boule blanche. Elle prendra a et b en argument.

On génère un nombre réel entre 0 et 1. On obtient une boule blanche si le nombre obtenu est plus petit que $\frac{a}{a+b}$.

```
1 import random as rd
2 def premiereblanche(a,b) :
3     x = 0
4     while (rd.random() > a/(a+b)) :
5         x += 1
6     return x+1 #pour compter le tirage de la boule blanche
```

4. Écrire une fonction **proba** qui estime la probabilité de la question 2.(b)

On rappelle que X et Y suivent la même loi. Elles peuvent être simulées par la fonction **premiereblanche** ci-dessus.

```
1 def proba(n,a,b) :
2     s = 0
3     for k in range(n) :
4         x = premiereblanche(a,b)
5         y = premiereblanche(a,b)
6         if x >= 2*y :
7             s = s+1
8     return s/n
```

Exercice 16 (C1-C2-C5, oral Agro-Véto 2017)  Soit N un entier supérieur ou égal à 3.

Une urne contient N boules dont $N - 2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, une par une et sans remise, les N boules de cette urne.

Les tirages étant numérotés de 1 à N , on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

1. Dans le cas où $N = 10$, simuler informatiquement une expérience et afficher les valeurs prises par X_1 et X_2 .

On rappelle à cet effet que la fonction `random()` de la bibliothèque `random` renvoie un nombre pseudo-aléatoire que l'on peut supposer uniformément distribué entre 0 et 1.

On écrit une fonction pour N quelconque. Au départ, il y a 2 boules noires sur les N boules au total. La probabilité d'avoir une boule noire est donc $\frac{2}{N}$. Pour simuler le premier tirage d'une boule dans l'urne, on génère donc un nombre réel x compris entre 0 et 1 (   l'aide de la commande `random()`). La boule tirée est noire si $x < 2/N$. Il faut ensuite prendre en compte le fait qu'il y a de moins en moins de boules disponibles et qu'il ne peut rester qu'une seule boule noire. On obtient la fonction suivante :

```
1 import random as rd
2 def experience(N) :
3     x1 = 0
4     x2 = 0
5     i = 0
6     while (x2 == 0) :
7         x = rd.random()
8         if (x1 == 0 and x < 2/(N-i)) :
9             i = i+1
10            x1 = i
11        elif (x1 != 0 and x < 1/(N-i)) :
12            i = i+1
13            x2 = i
14        else :
15            i = i+1
16    return x1, x2
```

Plusieurs exécutions de cette fonction donnent les valeurs de X_1 et de X_2 suivantes :

```
In [2]: experience(10)
Out[2]: (8, 9)

In [3]: experience(10)
Out[3]: (5, 7)

In [4]: experience(10)
Out[4]: (2, 7)

In [5]: experience(10)
Out[5]: (8, 9)

In [6]: experience(10)
Out[6]: (6, 7)
```

2. Montrer que la loi du couple (X_1, X_2) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq N \\ \frac{2}{N(N-1)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$. Par définition de X_1 et de X_2 , on a $X_1 < X_2$. Ainsi, si $j \leq i$, on a $(X_1 = i) \cap (X_2 = j) = \emptyset$ et donc $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = 0$. Supposons maintenant que $i < j$. Les N boules peuvent être considérées deux à deux distinctes quitte à les numérotter. Comme on prélève toutes les boules successivement et sans remise, l'univers Ω associé à cette expérience est l'ensemble des N -listes sans répétition (ou : permutations) de l'ensemble des N boules et P est la probabilité uniforme. Par conséquent :

$$P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \frac{\text{card}((X_1 = i) \cap (X_2 = j))}{\text{card}(\Omega)}$$

On a $\text{card}(\Omega) = N!$. Il reste à dénombrer l'ensemble $(X_1 = i) \cap (X_2 = j)$. Pour obtenir les boules noires en positions i et j dans le tirage, on doit :

- choisir dans quel ordre on répartit les deux boules noires sur les deux positions i et j , ce qui revient à compter le nombre de permutations de ces deux boules noires (il y a donc $2! = 2$ répartitions possibles) ;
- répartir les boules blanches sur les $N - 2$ positions restantes, ce qui revient à compter le nombre de permutations possibles des boules blanches (soit au total $(N - 2)!$ répartitions possibles).

On a donc $\text{card}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = 2(N - 2)!$. Ainsi :

$$P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \frac{2(N - 2)!}{N(N - 1)(N - 2)!} = \frac{2}{N(N - 1)}$$

La loi du couple (X_1, X_2) est donc bien donnée par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq N \\ \frac{2}{N(N-1)} & \text{sinon} \end{cases}$$

3.(a) Justifier que les lois de X_1 et X_2 sont données par :

$$\forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad P(X_1 = k) = \frac{2(N-k)}{N(N-1)}$$

et :

$$\forall k \in \llbracket 2, N \rrbracket, \quad P(X_2 = k) = \frac{2(k-1)}{N(N-1)}$$

Déterminons les lois marginales du couple (X_1, X_2) .

— **Loi de la variable aléatoires X_1 .**

La première boule noire ne peut pas être obtenue en N^e position (car le tirage est sans remise), donc $X_1(\Omega) = \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. De même, la deuxième boule noire ne peut pas être obtenue au premier tirage donc $X_2(\Omega) = \llbracket 2, N \rrbracket$. Soit $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. Comme $\{(X_2 = j) \mid j \in \llbracket 2, N \rrbracket\}$ est un système complet d'événements, on a :

$$P(X_1 = i) = \sum_{j=2}^N P((X_1 = i) \cap (X_2 = j))$$

En utilisant la question 2., on obtient :

$$P(X_1 = i) = \sum_{j=i+1}^N \frac{2}{N(N-1)} = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{j=i+1}^N 1 = \frac{2(N-i)}{N(N-1)}$$

par linéarité de la somme.

— **Loi de la variable aléatoires X_2 .**

On sait que $X_2(\Omega) = \llbracket 2, N \rrbracket$. Soit $j \in \llbracket 2, N \rrbracket$. En utilisant le système complet d'événements $\{(X_2 = j) \mid j \in \llbracket 2, N \rrbracket\}$ et la question 2., il vient

$$\begin{aligned} P(X_2 = j) &= \sum_{i=1}^{N-1} P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{N(N-1)} \\ &= \frac{2(j-1)}{N(N-1)} \end{aligned}$$

Finalement :

les lois des variables aléatoires X_1 et X_2 sont :

$$\forall k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad P(X_1 = k) = \frac{2(N-k)}{N(N-1)}$$

et

$$\forall k \in \llbracket 2, N \rrbracket, \quad P(X_2 = k) = \frac{2(k-1)}{N(N-1)}$$

(b) Ces variables sont-elles indépendantes ?

Soit $i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ (un tel entier existe puisque $N \geq 3$). D'après la question 3.(a), on a $P(X_1 = i) \neq 0$ et $P(X_2 = i) \neq 0$. Par ailleurs, $P((X_1 = i) \cap (X_2 = i)) = 0$ d'après la question 2. et donc :

$$P((X_1 = i) \cap (X_2 = i)) \neq P(X_1 = i) P(X_2 = i)$$

Donc :

les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes

4. Démontrer que la variable aléatoire $N + 1 - X_2$ a la même loi que X_1 .
Posons $Y = N + 1 - X_2$. L'univers image de Y est :

$$Y(\Omega) = \{N + 1 - k \mid k \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket\} = \llbracket 2, N \rrbracket = X_1(\Omega)$$

Soit maintenant $k \in Y(\Omega)$. Alors, par définition de Y :

$$P(Y = k) = P(X_2 = N + 1 - k) = \frac{2(N - k)}{N(N - 1)} = P(X_1 = k)$$

d'après la loi suivie par X_1 et car $N + 1 - k \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$. Finalement :

les variables aléatoires $N + 1 - X_2$ et X_1 suivent la même loi

5. On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\llbracket 1, N \rrbracket$ et on désigne par D l'événement : « A ne prend pas la même valeur que B ».

- (a) Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à $\frac{N - 1}{N}$.

Par définition, on a $D = (A \neq B)$ et donc $P(D) = 1 - P(A = B)$. Or $A(\Omega) = B(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$ donc :

$$P(A = B) = P\left(\bigcup_{i=1}^N ((A = i) \cap (B = i))\right)$$

Les événements $(A = i) \cap (B = i)$ (où $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$) sont deux à deux incompatibles donc :

$$P(A = B) = \sum_{i=1}^N P((A = i) \cap (B = i))$$

En utilisant maintenant le fait que A et B sont des variables aléatoires indépendantes (et uniformes), il vient :

$$P(A = B) = \sum_{i=1}^N P(A = i)P(B = i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2} = N \times \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N}$$

Finalement :

$$P(D) = 1 - \frac{1}{N} = \frac{N - 1}{N}$$

- (b) On définit les variables aléatoires $Y_1 = \min(A, B)$ et $Y_2 = \max(A, B)$.
Calculer, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, la probabilité conditionnelle :

$$P_D((Y_1 = i) \cap (Y_2 = j))$$

Remarquons que les probabilités conditionnelles sont bien définies puisque l'événement D est de probabilité non nulle d'après la question 5.(a). Soit $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$. On distingue trois cas.

— **Premier cas : $i > j$.**

Par définition, on sait que $Y_1 \leq Y_2$. Ainsi $(Y_1 = i) \cap (Y_2 = j) = \emptyset$ et donc

$$P_D((Y_1 = i) \cap (Y_2 = j)) = 0$$

— **Deuxième cas : $i = j$.**

Alors :

$$(Y_1 = i) \cap (Y_2 = i) = (\min(A, B) = \max(A, B) = i) = (A = i) \cap (B = i)$$

Par conséquent :

$$P_D((Y_1 = i) \cap (Y_2 = j)) = \frac{P((A = i) \cap (B = i) \cap D)}{P(D)} = 0$$

car $(A = i) \cap (B = i) \cap D = \emptyset$.

— **Troisième cas : $i < j$.**

On a ici :

$$(Y_1 = i) \cap (Y_2 = j) = ((A = i) \cap (B = j)) \cup ((A = j) \cap (B = i))$$

Comme $i \neq j$, on a de plus :

$$(Y_1 = i) \cap (Y_2 = j) \cap D = (Y_1 = i) \cap (Y_2 = j)$$

Les événements $(A = i) \cap (B = j)$ et $(A = j) \cap (B = i)$ sont incompatibles et A et B sont des variables aléatoires indépendantes donc on a successivement :

$$\begin{aligned} P_D((Y_1 = i) \cap (Y_2 = j)) &= \frac{P((A = i) \cap (B = j)) + P((A = j) \cap (B = i))}{P(D)} \\ &= \frac{P(A = i)P(B = j) + P(A = j)P(A = i)}{P(D)} \\ &= \frac{2 \times \frac{1}{N^2}}{\frac{N-1}{N}} \\ &= \frac{2}{N(N-1)} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad P_D((Y_1 = i) \cap (Y_2 = j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \frac{2}{N(N-1)} & \text{sinon} \end{cases}$$

- (c) Expliquer pourquoi le programme suivant permet de simuler des variables aléatoires qui suivent les mêmes lois que X_1 et X_2 dans le cas où $N = 10$:

```
1 from random import *
2 a=randint(1,10)
3 b=randint(1,10)
4 while (a==b) :
5     b=randint(1,10)
6 print(min(a,b))
7 print(max(a,b))
```

La loi conjointe du couple (Y_1, Y_2) (pour la probabilité P_D) est la même que celle du couple (X_1, X_2) (pour la probabilité P) d'après les questions 3.(a) et 5.(b). Simuler les variables aléatoires X_1 et X_2 revient donc à simuler Y_1 et Y_2 . Il s'agit donc de générer deux nombres entiers aléatoires *différents* compris entre 1 et 10, ce qui correspond au script proposé.

On peut aussi écrire une fonction permettant d'estimer les probabilités des variables aléatoires qui sont simulées dans le script proposé. Ceci permet de vérifier que ces probabilités sont cohérentes avec celles obtenues pour le couple (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) .

```
1 from random import randint
2 def frequence(n,i,j) :
3     s = 0
4     for k in range(n) :
5         a = randint(1,10)
6         b = randint(1,10)
7         while (a == b) :
8             b = randint(1,10)
9         if (min(a,b) == i) and (max(a,b) == j) :
10             s = s+1
11     return s/n
```

```
In [2]: frequence(1000,1,2)
Out[2]: 0.015
```

```
In [3]: frequence(10000,1,2)
Out[3]: 0.0233
```

```
In [4]: frequence(100000,1,2)
Out[4]: 0.02222
```

```
In [5]: frequence(100000,2,8)
Out[5]: 0.02204
```

Exercice 17 (C3-C8, oral Agro-Véto 2016)  Soit N un entier naturel non nul. Un joueur dispose de N d  s équilibrés à 6 faces. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de 6 obtenus. Il met de côté les d  s correspondants et relance les autres d  s (s'il en reste). On note X_2 le nombre de 6 obtenus et on répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots$. S'il ne reste plus de d  s au m^{e} lancer, on a alors, pour tout entier $k \geq m$, $X_k = 0$.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ qui correspond alors au nombre de 6 obtenus après n lancers.

1.   crire une fonction python `X(N)` qui prend en argument le nombre N de d  s et renvoie la valeur de X_1 .

On simule un lancer de d   en choisissant de manière équiprobable un entier dans l'intervalle $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ (   l'aide de la commande `randint(1,6)`). On calcule le nombre `nbsix` de 6 obtenus après avoir lancé les N d  s.

```

1 import random as rd
2 def X(N) :
3     nbsix = 0
4     for k in range(N) :
5         x = rd.randint(1,6)
6         if (x == 6) :
7             nbsix += 1
8     return nbsix

```

COMMENTAIRE

- Il s'agit de simuler une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
- On peut aussi simuler un lancer de d   en générant aléatoirement un nombre réel compris entre 0 et 1 (commande `random()`). On a obtenu un 6 si (par exemple) `random() < 1/6`.

2. En déduire une fonction python `S(N,n)` qui prend en argument le nombre N de d  s et le nombre n de lancers effectués et renvoie la valeur de S_n .

On simule n lancers de d  s à l'aide de la fonction précédente. Si    l'issue du k^{e} jet de d  s on a cumulé `nbsix` $\in \llbracket 0, N \rrbracket$ chiffres 6, alors on lance $N - \text{nbsix}$ d  s au $(k + 1)^{\text{e}}$ jet de d  s. Notons que si `nbsix` $= N$, alors il n'y a plus de d   à lancer (puisqu'ils ont tous déjà donné un 6). Comme `X(0)` renvoie la valeur 0, l'instruction `nbsix += X(0)` reste valable dans ce cas.

```

1 def S(N,n) :
2     nbsix = 0
3     for k in range(n) :
4         nbsix += X(N-nbsix) #N-nbsix est le nombre de d  s restants
5     return nb_six

```

COMMENTAIRE

On peut bien sûr ajouter la condition « `if nbSix != N :` » dans la boucle `for`, avant l'incrément de la variable `nbSix`.

3. On se propose de montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que S_n suit une loi binomiale de paramètre N et p_n et on cherchera à déterminer p_n .

(a) **Question préliminaire :** soient N, M et k des entiers naturels tels que $M \leq k \leq N$. Montrer que :

$$\binom{N}{M} \binom{N-M}{k-M} = \binom{N}{k} \binom{k}{M}$$

Soit $(N, M, k) \in \mathbb{N}^3$ tel que $M \leq k \leq N$. Alors :

$$\begin{aligned} \binom{N}{M} \binom{N-M}{k-M} &= \frac{N!}{M!(N-M)!} \times \frac{(N-M)!}{(k-M)!(N-k)!} \\ &= \frac{N!}{k!(N-k)!} \times \frac{k!}{M!(k-M)!} \\ &= \binom{N}{k} \binom{k}{M} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\text{pour tout } (N, M, k) \in \mathbb{N}^3 \text{ tel que } M \leq k \leq N, \text{ on a } \binom{N}{M} \binom{N-M}{k-M} = \binom{N}{k} \binom{k}{M}$$

(b) Montrer que la proposition est vérifiée pour $n = 1$ et déterminer p_1 .

Par définition, on a $S_1 = X_1$. On répète N fois la même épreuve de Bernoulli (qui consiste à lancer un dé) dont le succès (à savoir obtenir un 6) a pour probabilité $\frac{1}{6}$ (car les dés sont supposés équilibrés). Ces épreuves sont indépendantes et S_1 correspond au nombre de succès obtenus. Ainsi :

$$\text{la variable aléatoire } S_1 \text{ suit la loi binomiale de paramètres } N \text{ et } p_1 = \frac{1}{6}$$

COMMENTAIRE

Le fait que X_1 suive une loi binomiale a déjà été remarqué dans la première question (en écrivant le programme informatique).

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n .

i. Soient M et k deux entiers naturels tels que $M \leq k \leq N$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = k - M \mid S_n = M)$.

Soit $(M, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $M \leq k \leq N$. Si l'événement $(S_n = M)$ est réalisé, alors il reste $N - M$ dés pour le $(n + 1)^{\text{e}}$ lancer. On distingue deux cas.

— **Premier cas : $N - M = 0$.**

On a donc $M = k = N$. Comme il n'y a plus de dés disponibles pour le $(n + 1)^{\text{e}}$ lancer, on a $X_{n+1} = 0 = k - M$ d'après les hypothèses faites sur les variables aléatoires dans l'énoncé. Ainsi :

$$P(X_{n+1} = k - M \mid S_n = M) = P(X_{n+1} = 0 \mid S_n = N) = 1$$

— **Deuxième cas : $N - M \geq 1$.**

Il reste alors au moins un dé pour le $(n + 1)^{\text{e}}$ lancer. Cela revient à reprendre l'expérience au début en considérant qu'il y a initialement $N - M$ dés. Notons Y_1 la variable aléatoire comptant le nombre de 6 obtenus après le lancer de $N - M$ dés équilibrés. D'après la question 3.(b), on sait que Y_1 suit la loi binomiale de paramètres $N - M$ et $\frac{1}{6}$. Comme $k - M \in \llbracket 0, N - M \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k - M \mid S_n = M) &= P(Y_1 = k - M) \\ &= \binom{N - M}{k - M} \left(\frac{1}{6}\right)^{k - M} \left(\frac{5}{6}\right)^{N - k} \end{aligned}$$

Remarquons que cette formule vaut aussi dans le cas où $N - M = 0$.

Finalement :

pour tout $(M, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $M \leq k \leq N$, on a :

$$P(X_{n+1} = k - M \mid S_n = M) = \binom{N - M}{k - M} \left(\frac{1}{6}\right)^{k - M} \left(\frac{5}{6}\right)^{N - k}$$

COMMENTAIRE

En d'autres termes, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(S_n = M)$ est la loi binomiale de paramètres $N - M$ et $\frac{1}{6}$.

ii. En déduire que S_{n+1} suit une loi binomiale de paramètres N et p_{n+1} où

$$p_{n+1} = \frac{1 + 5p_n}{6}$$

   l'issue du $(n + 1)^{\text{e}}$ lancer, le nombre de 6 cumulés peut a priori être égal à tout entier de l'intervalle $\llbracket 0, N \rrbracket$, c'est-à-dire $S_{n+1}(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$. Par hypothèse de récurrence, on a $S_n(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket$ donc $\{(S_n = M) \mid M \in \llbracket 0, N \rrbracket\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. La formule des probabilités totales nous donne :

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{M=0}^N P(S_{n+1} = k \mid S_n = M) P(S_n = M)$$

Comme $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, on a pour tout entier $M \in \llbracket 0, N \rrbracket$:

$$P(S_{n+1} = k \mid S_n = M) = P(X_{n+1} = k - M \mid S_n = M)$$

De plus, la variable aléatoire X_{n+1} est à valeurs positives ou nulles donc :

$$\forall M \in \llbracket k + 1, N \rrbracket, \quad P(X_{n+1} = k - M \mid S_n = M) = 0$$

En utilisant la relation de Chasles, il reste :

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{M=0}^k P(X_{n+1} = k - M \mid S_n = M) P(S_n = M)$$

En utilisant maintenant la question 3.(c)i. et le fait que S_n suit la loi binomiale de paramètres N et p_n (par hypothèse de récurrence), il vient :

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k) &= \sum_{M=0}^k \binom{N-M}{k-M} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-M} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k} \binom{N}{M} p_n^M (1-p_n)^{N-M} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k} (1-p_n)^{N-k} \sum_{M=0}^k \binom{N}{M} \binom{N-M}{k-M} p_n^M \left(\frac{1-p_n}{6}\right)^{k-M} \end{aligned}$$

par linéarité de la somme. L'égalité obtenue à la question 3.(a) (qu'on peut appliquer puisque l'indice de sommation M est tel que $M \leq k \leq N$) et la linéarité de la somme nous donnent :

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k) &= \binom{N}{k} \left(\frac{5(1-p_n)}{6}\right)^{N-k} \sum_{M=0}^k \binom{k}{M} p_n^M \left(\frac{1-p_n}{6}\right)^{k-M} \\ &= \binom{N}{k} \left(\frac{5(1-p_n)}{6}\right)^{N-k} \left(p_n + \frac{1-p_n}{6}\right)^k \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton. On a finalement :

$$P(S_{n+1} = k) = \binom{N}{k} \left(\frac{1+5p_n}{6}\right)^k \left(1 - \frac{1+5p_n}{6}\right)^{N-k}$$

ce qui correspond bien aux probabilités relatives à la loi binomiale de paramètres :

$$N \quad \text{et} \quad p_{n+1} = \frac{1 + 5p_n}{6}$$

Ainsi :

la variable aléatoire S_{n+1} suit la loi binomiale de paramètres N et $p_{n+1} = \frac{1+5p_n}{6}$

COMMENTAIRE

- La formule des probabilités totales et le système complet d'événements à adopter sont suggérés par la question 3.(c)i.
- Pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire S_n suit la loi binomiale de paramètres N et p_n par principe de récurrence simple.

(d) Déterminer une expression explicite de p_n .

La suite $(p_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmético-géométrique. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\ell = \frac{1+5\ell}{6} \iff 6\ell = 1+5\ell \iff \ell = 1$$

Montrons que la suite $(q_n)_{n \geq 1}$ définie par $q_n = p_n - \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ est une suite géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que :

$$p_{n+1} = \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \ell = \frac{5}{6}\ell + \frac{1}{6}$$

donc (en soustrayant la deuxième équation à la première) :

$$q_{n+1} = p_{n+1} - \ell = \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{6}\ell + \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}(p_n - \ell) = \frac{5}{6}q_n$$

La suite $(q_n)_{n \geq 1}$ est donc géométrique de raison $\frac{5}{6}$ et de premier terme $q_1 = p_1 - 1 = -\frac{5}{6}$ car $p_1 = \frac{1}{6}$ d'après la question 3.(b). Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_n = -\frac{5}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = -\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

ce qui implique que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

COMMENTAIRE

Cette question ne nécessite pas d'avoir répondu correctement à la question précédente (qui est bien plus technique).

4. On admet qu'il est presque sûr qu'on obtienne tous les 6 au bout d'un nombre fini de lancers, c'est-à-dire qu'il existe presque sûrement un rang $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $S_n = N$. On note T le nombre de lancers nécessaires pour n'avoir que des 6 (et on pose par convention $T = +\infty$ si on n'obtient jamais tous les 6, ce qui a une probabilité nulle d'arriver), c'est-à-dire :

$$T = \min(\{n \geq 1 \mid S_n = N\} \cup \{+\infty\})$$

Déterminer la fonction de répartition de T .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dire que T est inférieur ou égal à n signifie qu'il a fallu au plus n jets de dés pour obtenir tous les 6, ce qui revient encore à dire que tous les 6 sont obtenus (au plus tard) à l'issue du n^{e} jet (si celui-ci a lieu). Autrement dit, on a l'égalité :

$$(T \leq n) = (S_n = N)$$

Comme S_n suit la loi binomiale de paramètre N et p_n (d'après la question 3.), on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(T \leq n) = p_n^N = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N$$

Remarquons que cette égalité est valable aussi pour $n = 0$. En effet, le membre de droite est égal à 0 et l'événement $(T \leq 0)$ est impossible (et donc de probabilité nulle).

5. Vérifier que la variable aléatoire T admet une espérance et donner une formule exprimant celle-ci.

On admettra le résultat suivant : T admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{n \geq 1} P(T > n) \text{ est convergente et dans ce cas on a l'égalité } E(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T > n).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a d'après la question 4. et la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} P(T > n) &= 1 - P(T \leq n) = 1 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N \\ &= 1 - \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (-1)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{kn} \\ &= \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} (-1)^{k+1} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^k\right]^n \end{aligned} \quad (1)$$

car le sommant vaut 1 pour $k = 0$. D'après le résultat admis dans l'énoncé, on sait que T admet une espérance si la série $\sum_{n \geq 0} P(T > n)$ est convergente. Or pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

on a $\left(\frac{5}{6}\right)^k \in]-1, 1[$ donc la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^k\right]^n$ est convergente. Ainsi, $P(T > n)$ s'exprime comme une combinaison linéaire (finie) de termes généraux de séries convergentes (d'après (1)). La série $\sum_{n \geq 0} P(T > n)$ est donc une série convergente et l'égalité

(1) nous donne (par linéarité de la somme) :

$$E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n) = \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \binom{N}{k} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^k\right]^n \quad (2)$$

Finalement (en calculant la somme de la série géométrique qui apparaît dans le second membre de (2)) :

la variable aléatoire T admet une espérance qui vaut :

$$E(T) = \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k}$$

COMMENTAIRE

Il est demandé de trouver une formule qui permet d'exprimer l'espérance de T . On ne peut pas obtenir une expression plus simple de celle-ci.