Lycée Louis Thuillier — Année 2025-2026
BCPST2B

TD 7 - Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Compétences à acquérir :

- ▷ C1 : Déterminer la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires discrètes
- ▷ C2 : Calculer des lois marginales
- ▷ C3 : Déterminer la loi conditionnelle d'une marginale du couple
- ▷ C4 : Calculer la loi d'une variable aléatoire du type $X+Y$, $\min(X,Y)$ ou $\max(X,Y)$
- ▷ C5 : Étudier l'indépendance de deux variables aléatoires
- ▷ C6 : Utiliser le théorème de transfert pour un couple de va discrètes finies
- ▷ C7 : Calculer la covariance avec le théorème de Kœnig-Huygens, connaître les propriétés de la covariance et lien avec l'indépendance
- ▷ C8 : Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire discrète (après en avoir prouvé l'existence)

Exercice 1 (C2-C3-C4-C8) On considère un couple de variables aléatoires réelles (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi conjointe définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \qquad \mathrm{P}(X=i, Y=j) = \frac{a}{2^{i+j}\, j\,!}, \qquad \text{où} \qquad a = \frac{e^{-1/2}}{2}$$

1. Déterminer les lois marginales du couple.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On pose $S = X+Y$.
   (a) Déterminer la loi de S. On laissera cette expression sous la forme d'une somme.
   (b) Démontrer par le calcul que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{P}(S=k) = 0$. Cette égalité est-elle surprenante ?

Exercice 2 (C1-C2-C5-C6-C7-C8) Soit N un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard un nombre entier X dans l'intervalle $[\![1,N]\!]$ puis un nombre entier Y dans l'intervalle $[\![1,X]\!]$.

1. (a) Proposer une fonction `python` simulant cette expérience.
   (b) Écrire un programme qui permet d'évaluer l'espérance de Y.
2. Déterminer la loi du couple (X,Y).
3. Déterminer la loi de Y (écrite sous forme d'une somme) puis l'espérance de Y.
4. Calculer la covariance du couple (X,Y). En utilisant deux méthodes différentes, étudier l'indépendance des variables aléatoires X et Y.

Exercice 3 (C4) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (X,Y) un couple de variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

1. Calculer $\mathrm{P}(X+Y=n)$ et $\mathrm{P}(X=Y)$.
2. Calculer $\mathrm{P}(X \geqslant Y)$.

Exercice 4 (C3-C8) Soient X et Y deux variables aléatoire réelles indépendantes suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0,1[$.

1. Calculer $\mathrm{P}(X = Y)$.
2. Calculer $\mathrm{P}(X > Y)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(X+Y=n)$.
4. Calculer $\mathrm{E}(X|X+Y=n)$ et $\mathrm{V}(X|X+Y=n)$, c'est-à-dire les espérance et variance de X sachant $(X+Y=n)$.

Exercice 5 (C3-C4)

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ respectivement.
   (a) Quelle est la loi de $X+Y$?
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(X+Y=k)$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois binomiales $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$ où $(m,n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times]0,1[$.
   (a) Quelle est la loi de $X+Y$?
   (b) Soit $k \in [\![0, m+n]\!]$. Déterminer la loi de X sachant $(X+Y=k)$.

Exercice 6 (C3-C5-C8) Soit N une variable aléatoire réelle représentant le nombre de personnes entrant dans un bureau de poste. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $t > 0$. On estime que chaque personne vient pour poster un envoi avec la probabilité $p \in]0,1[$. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de personnes venues pour poster un envoi.

1.(a) Pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathrm{P}(X=k|N=j)$. Quelle est la loi de X ?
   (b) Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ si elles existent.
2. Les variables aléatoires X et N sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 (C1-C2-C3) Lors d'une étude de germination, on dispose d'un nombre aléatoire N de plantes donnant chacune une graine et on suppose que $N \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Chaque graine a la probabilité $\gamma \in]0,1[$ de germer (de manière indépendante des autres graines). On appelle S le nombre de graines qui germent.

1. Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$. Déterminer $\mathrm{P}(S=i|N=j)$.
2. En déduire la loi du couple (S,N).
3. Montrer que S suit la loi $\mathcal{B}(n, p\gamma)$.

Exercice 8 (C8) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X prenant les valeurs 1 et 2 de manière équiprobable. On pose alors $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Calculer l'espérance et la variance de Z si elles existent.

Exercice 9 (C7-C8) 1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes de même variance non nulle. On pose $U = \alpha X + \beta Y$ et $V = \lambda X + \mu Y$ où α, β, λ et μ sont quatre nombres réels. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que U et V soient non corrélées.

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathrm{E}(X) = \mathrm{V}(X) = 100$. On pose $Z = 3X - 10$.
   (a) Calculer $\mathrm{E}(Z)$, $\mathrm{V}(Z)$, $\mathrm{cov}(X, Z)$ et $\mathrm{V}(X + Z)$.
   (b) Soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{V}(Y) = 100$. Calculer $\mathrm{V}(X + Y + Z)$ et $\mathrm{cov}(Y + Z, X)$.

Exercice 10 (C1-C2-C5-C8) Soit $p \in]0, 1[$. Une urne contient une proportion p de boules vertes et une proportion $q = 1 - p$ de boules blanches. On effectue des tirages successifs avec remise. On note X (respectivement Y) la variable aléatoire réelle égale à la longueur de la première (respectivement deuxième) séquence de boules tirées consécutivement de la même couleur. Par exemple, le tirage BBBVVBBB... fournit les valeurs $X = 3$ et $Y = 2$.

1. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
2. Montrer que $\mathrm{E}(X)$ est minimale pour $p = q$.
3. Montrer que la loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathrm{P}(X = i, Y = j) = p^{i+1} q^j + q^{i+1} p^j$$

4. Donner la loi de Y.
5. Montrer qu'il existe une et une seule valeur de p à déterminer pour laquelle les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
6. Écrire une fonction `simulationXY` d'argument p qui renvoie une succession de tirages et la valeur correspondante de X et de Y.

Exercice 11 (C6-C7-C8) Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes deux à deux et suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_i = X_i + X_{i+1}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.
   (a) Calculer l'espérance de $T_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.
   (b) Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, calculer $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$.
   (c) En déduire que $\mathrm{V}(T_n) = \dfrac{(4n - 2)p(1 - p)}{n^2}$.
2. (a) Écrire une fonction en langage `python` qui prend en paramètre un nombre réel p compris entre 0 et 1 et qui renvoie 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $1 - p$.
   (b) Écrire une fonction `listeXi` qui prend en paramètre un nombre entier n non nul et un nombre réel p compris entre 0 et 1 et qui retourne une liste de longueur n dont chaque élément est une valeur de X_i.
   (c) En déduire une fonction `listeYi` renvoyant une liste de longueur n dont le i^{e} élément est une valeur prise par Y_i.
   (d) Écrire enfin une fonction `valeurTn` qui prend en paramètre un nombre entier n non nul et le nombre p et qui retourne une valeur simulée de T_n.

Exercice 12 (C4-C5-C8) On lance une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'on obtienne *pile* pour la deuxième fois. On suppose qu'à chaque lancer de la pièce, la probabilité d'obtenir *pile* est égale à $p \in]0,1[$. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux *pile* pour la première fois. On supposera qu'il est presque certain d'obtenir au moins une fois deux *pile* consécutivement.
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Si $X = n$, on place $n-1$ boules numérotées de 2 à n dans une urne et on tire au hasard l'une de ces boules. On note alors Y le numéro de la boule tirée.

1. Montrer que la loi de X est déterminée par :
$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad \mathrm{P}(X = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$$
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
3. Démontrer que la variable aléatoire Y admet une espérance qui vaut $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{1+p}{p}$.
4. (a) Écrire une fonction `experience` qui prend comme argument d'entrée p et sort une succession de 0 (pour face) et de 1 (pour pile) représentant les lancers jusqu'au deuxième pile.
   (b) Écrire une fonction `X` qui prend comme argument p et renvoyant la valeur de X correspondante.
   (c) Écrire une fonction `Y` simulant la variable aléatoire Y.
   (d) Estimer l'espérance de Y dans le cas où $p = \dfrac{1}{4}$.
5. On pose maintenant $Z = X - Y$.
   (a) Déterminer la loi de Z.
   (b) Montrer que Y et Z sont indépendantes.

Exercice 13 (C1-C2-C4-C5-C8, oral Agro-Véto 2010) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p \in]0,1[$, c'est-à-dire telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{P}(X = n) = \mathrm{P}(Y = n) = pq^n$$
où $q = 1 - p$. On pose $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X si elles existent.
2. Donner la loi conjointe du couple (U, V).
3. Déterminer les lois de U et V. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
4. Exprimer $U + V$ en fonction de X et Y. En déduire la loi de $U + V$ et son espérance si elle existe.
5. On pose $D = X - Y$. Déterminer la loi de D et montrer que U et D sont indépendantes.

Exercice 14 (C2-C4-C5-C6-C7) Soient $(p,q,r) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tel que $p+q+r=1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le vecteur aléatoire $Y_n = (U_n, V_n)$ dont la loi conjointe est appelée la *loi trinomiale* : pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leqslant k+\ell \leqslant n$, on a :

$$\mathrm{P}(Y_n = (k,\ell)) = \frac{n\,!}{k\,!\,\ell\,!\,(n-k-\ell)\,!} p^k q^\ell r^{n-k-\ell}$$

et, si la condition $0 \leqslant k+\ell \leqslant n$ n'est pas satisfaite, on a $\mathrm{P}(Y_n = (k,\ell)) = 0$.

1. Démontrer que les lois marginales de Y_n sont des lois binomiales à préciser.
2. Les variables aléatoires U_n et V_n sont-elles indépendantes ? Justifier.
3. (a) Déterminer la loi de $W_n = U_n + V_n$.
   (b) En déduire que $\mathrm{cov}(U_n, V_n) = n\dfrac{1-p^2-q^2-r^2}{2}$ et montrer que cette covariance est strictement positive. Que peut-on en déduire ?
4. Soit $\ell \in [\![0,n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de U_n sachant $(V_n = \ell)$.

Exercice 15 (C1) Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On pioche dans une urne contenant a boules blanches et b boules noires, avec remise. On note X la variable aléatoire donnant le rang de la première boule blanche tirée.

1. (a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
   (b) Calculer $\mathrm{P}(X \geqslant k)$ pour tout entier naturel k.
2. Tic et Tac tirent des boules dans l'urne, avec remise, en attendant leur première boule blanche. On note X (respectivement Y) la variable aléatoire donnant le rang de la première boule blanche obtenue par Tic (respectivement par Tac).
   (a) Soit m un entier naturel non nul. Calculer $\mathrm{P}(X \geqslant mY)$ et en donner un équivalent simple quand m tend vers $+\infty$.
   (b) Déterminer la probabilité que Tic doive faire au moins deux fois plus (au sens large) de tirages que Tac pour obtenir sa première boule blanche.
3. Écrire une fonction `premiereblanche` qui modélise les tirages pour Tic jusqu'à la première boule blanche. Elle prendra a et b en argument.
4. Écrire une fonction `proba` qui estime la probabilité de la question 2.(b)

Exercice 16 (C1-C2-C5) Soit N un entier supérieur ou égal à 3.
Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, une par une et sans remise, les N boules de cette urne.
Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

1. Dans le cas où $N=10$, simuler informatiquement une expérience et afficher les valeurs prises par X_1 et X_2.
   On rappelle à cet effet que la fonction `random()` de la bibliothèque `random` renvoie un nombre pseudo-aléatoire que l'on peut supposer uniformément distribué entre 0 et 1.
2. Montrer que la loi du couple (X_1, X_2) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,N]\!]^2, \qquad \mathrm{P}((X_1=i)\cap(X_2=j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{sinon} \end{cases}$$

3.(a) Justifier que les lois de X_1 et X_2 sont données par :

$$\forall k \in [\![1,N-1]\!], \qquad \mathrm{P}(X_1=k) = \frac{2(N-k)}{N(N-1)}$$

et :

$$\forall k \in [\![2,N]\!], \qquad \mathrm{P}(X_2=k) = \frac{2(k-1)}{N(N-1)}$$

(b) Ces variables sont-elles indépendantes ?

4. Démontrer que la variable aléatoire $N+1-X_2$ a la même loi que X_1.
5. On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1,N]\!]$ et on désigne par D l'événement : « A ne prend pas la même valeur que B ».

(a) Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à $\dfrac{N-1}{N}$.

(b) On définit les variables aléatoires $Y_1 = \min(A,B)$ et $Y_2 = \max(A,B)$.
Calculer, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, la probabilité conditionnelle :

$$\mathrm{P}_D((Y_1=i)\cap(Y_2=j))$$

(c) Expliquer pourquoi le programme suivant permet de simuler des variables aléatoires qui suivent les mêmes lois que X_1 et X_2 dans le cas où $N=10$:

```
from random import *
a=randint(1,10)
b=randint(1,10)
while (a==b) :
     b=randint(1,10)
print(min(a,b))
print(max(a,b))
```

Exercice 17 (C3-C8) Soit N un entier naturel non nul. Un joueur dispose de N dés équilibrés à 6 faces. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de 6 obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de 6 obtenus et on répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires X_1, X_2,... S'il ne reste plus de dés au m^{e} lancer, on a alors, pour tout entier $k \geqslant m$, $X_k = 0$. Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ qui correspond alors au nombre de 6 obtenus après n lancers.

1. Écrire une fonction `python` `X(N)` qui prend en argument le nombre N de dés et renvoie la valeur de X_1.
2. En déduire une fonction `python` `S(N,n)` qui prend en argument le nombre N de dés et le nombre n de lancers effectués et renvoie la valeur de S_n.
3. On se proposer de montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que S_n suit une loi binomiale de paramètre N et p_n et on cherchera à déterminer p_n.
   (a) **Question préliminaire :** soient N, M et k des entiers naturels tels que $M \leqslant k \leqslant N$. Montrer que :
   $$\binom{N}{M}\binom{N-M}{k-M} = \binom{N}{k}\binom{k}{M}$$
   (b) Montrer que la proposition est vérifiée pour $n = 1$ et déterminer p_1.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n.
      i. Soient M et k deux entiers naturels tels que $M \leqslant k \leqslant N$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(X_{n+1} = k - M \,|\, S_n = M)$.
      ii. En déduire que S_{n+1} suit une loi binomiale de paramètres N et p_{n+1} où
      $$p_{n+1} = \frac{1 + 5p_n}{6}$$
   (d) Déterminer une expression explicite de p_n.
4. On admet qu'il est presque sûr qu'on obtienne tous les 6 au bout d'un nombre fini de lancers, c'est-à-dire qu'il existe presque sûrement un rang $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $S_n = N$.

   On note T le nombre de lancers nécessaires pour n'avoir que des 6 (et on pose par convention $T = +\infty$ si on n'obtient jamais tous les 6, ce qui a une probabilité nulle d'arriver), c'est-à-dire :
   $$T = \min(\{n \geqslant 1 \,|\, S_n = N\} \cup \{+\infty\})$$
   Déterminer la fonction de répartition de T.
5. Vérifier que la variable aléatoire T admet une espérance et donner une formule exprimant celle-ci.

   On admettra le résultat suivant : T admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{P}(T > n)$ est convergente et dans ce cas on a l'égalité $\mathrm{E}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(T > n)$.