Fiche de révision 8 - Correction
Calcul matriciel et applications linéaires

1 Compétences et notions à maîtriser

- ▷ C1 : Effectuer un produit matriciel
- ▷ C2 : Étudier l'inversibilité d'une matrice (en résolvant un système linéaire ou en utilisant une équation vérifiée par la matrice)
- ▷ C3 : Calculer des puissances de matrices (en utilisant la formule du binôme de Newton ou un raisonnement par récurrence)

2 Correction des exercices

Exercice 1 (C2) Les matrices A, B et C suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer l'expression de la matrice inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- La matrice A est d'ordre 2 et son déterminant vaut :

  $$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 3 \times 1 = 1 \neq 0$$

  Donc :

  $$\boxed{\text{la matrice } B \text{ est inversible et } B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

- Notons C_1 et C_3 les première et troisième colonne de B respectivement. On remarque que $C_1 = -C_3$. Le rang de la matrice est donc inférieur ou égal à 2. En particulier, B n'est pas de rang maximal égal à 3 donc :

  $$\boxed{\text{la matrice } B \text{ n'est pas inversible}}$$

- Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On résout l'équation $C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

  $$\begin{aligned}
  C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\
  &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & & & + & 3z & = & X & L_1 \\ x & + & y & - & z & = & Y & L_2 \\ 2x & & & + & 5z & = & Z & L_3 \end{array}\right. \\
  &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & & & + & 3z & = & X & L_1 \\ & & y & - & 4z & = & -X+Y & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & & - & z & = & -2X+Z & L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_1 \end{array}\right.
  \end{aligned}$$

  Le système obtenu est un système de Cramer donc la matrice C est inversible. De plus :

  $$\begin{aligned}
  C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & X - 3z = -5X + 3Z \\ y & = & -X + Y + 4z = 7X + Y - 4Z \\ z & = & 2X - Z \end{array}\right. \\
  &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}
  \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{la matrice } C \text{ est inversible d'inverse } C^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 2 (C2) Soient $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 2 & m+1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour quelle(s) valeur(s) de m la matrice A_m est-elle inversible ? Dans ce(s) cas, déterminer l'expression de la matrice inverse.

Soit $m \in \mathbb{R}$. La matrice A_m est d'ordre 2 donc elle est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or :

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & m+1 \end{vmatrix} = m(m+1) - 2 = m^2 + m - 2$$

Les racines de ce trinôme du second degré sont 1 et -2. Ainsi :

$$\boxed{\text{la matrice } A_m \text{ est inversible si et seulement si } m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \text{ et, dans ce cas, } A_m^{-1} = \frac{1}{m^2 + m - 2} \begin{pmatrix} m+1 & -1 \\ -2 & m \end{pmatrix}}$$

Exercice 3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.

   On fixe $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et on cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = Y$.

$$\begin{aligned} AX = Y &\iff \begin{cases} y + z = a \\ x + z = b \\ z = c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = a - c \\ x = b - c \\ z = c \end{cases} \end{aligned}$$

   donc A est inversible et $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

2. Calculer A^2. En déduire, pour tout entier naturel n, la matrice A^n.

   On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $A^2 = I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notons $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que $N^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, donc pour tout $k \geq 2$, on a $N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

   On a donc $\boxed{A^2 = I_3 + N}$ avec $\boxed{\forall k \geq 2,\ N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$. On fixe $n \in \mathbb{N}$, les matrices I_3 et N commutent donc par formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (A^2)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} + 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \\ &= \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} N \\ &= I_3 + nN \end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^{2n} = I_3 + nN}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ A^{2n+1} = A + nAN$ or par calcul $AN = N$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^{2n+1} = A + nN}$.

Exercice 4 (C1-C3) On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de A et I_3.
   On trouve $A^2 = 4A - 4I_3$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.
   D'après ce qui précède, on a $A^2 - 4A = -4I_3$ donc $-\frac{1}{4}(A^2 - 4A) = I_3$, ce qui se réécrit :
   $$A\Big(-\frac{1}{4}A + I_3\Big) = \Big(-\frac{1}{4}A + I_3\Big)A = I_3$$
   Donc la matrice A est inversible d'inverse $-\frac{1}{4}A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$.
3. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
   On utilise un raisonnement par récurrence simple. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition :
   $$\mathcal{P}_n : \text{« il existe } (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } A^n = a_n A + b_n I_3 \text{ »}$$
   - **Initialisation :** en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, on a :
     $$A^0 = I_3 = a_0 \times A + b_0 I_3$$
     donc la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = a_n A + b_n I_3$. Donc :
     $$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n A = (a_n A + b_n I_3)A = a_n A^2 + b_n A &= a_n(4A - 4I_3) + b_n A \qquad \text{(d'après la question 1)} \\ &= (4a_n + b_n)A - 4a_n I_3 \end{aligned}$$
     En posant $a_{n+1} = 4a_n + b_n \in \mathbb{R}$ et $b_{n+1} = -4a_n \in \mathbb{R}$, on a l'égalité $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_3$. La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.
   - **Conclusion :** pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple.

   Ainsi :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, \qquad A^n = a_n A + b_n I_3} \tag{2.1}$$

   (b) Déterminer l'expression de a_n et b_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis celle de A^n.
   On sait que $a_0 = 0$, $b_1 = 1$ et :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = 4a_n + b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = -4a_n$$
   Remarquons de plus que $A^1 = A = 1 \times A + 0 \times I_3$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. Les relations de récurrences précédentes impliquent que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n$$
   La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée $x^2 - 4x + 4 = 0$ admet pour racine double 2. Il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = (An + B)2^n$$

Déterminons A et B. On résout :

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} B = 0 \\ 2(A+B) = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} B = 0 \\ A = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = n2^{n-1} \qquad \text{et, si } n \geqslant 1, \qquad b_n = -4a_{n-1} = -(n-1)2^n$$

Cette dernière égalité est vraie pour $n = 0$ puisque $b_0 = 1$. On obtient l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en remplaçant les valeurs de a_n et b_n dans (2.1). On obtient $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I_3}$.

Exercice 5 (C2-C3) On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq k,\ M^n = 0$.

   On calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall \ell \geq 3,\ M^\ell = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.

   On constate que $\boxed{A = 2I_3 + M}$. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Comme I_3 et M commutent, on applique la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M^k (2I_3)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} M^k (2I_3)^{n-k} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} M^k (2I_3)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} M^k (2I_3)^{n-k} + 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \\
&= \binom{n}{0} 2^n I_3 + \binom{n}{1} 2^{n-1} M + \binom{n}{2} 2^{n-2} M^2 \\
&= 2^n I_3 + 2^{n-1} n M + n(n-1)2^{n-3} M^2 \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & -n2^{n-1} & n2^n - 3n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 2^n & -n2^{n-1} & n2^n - 3n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$.

3. Déterminer A^{-1}.

   On fixe $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et on cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = Y$.

$$\begin{aligned}
AX = Y &\iff \left\{\begin{array}{l} 2x - y + 2z = a \\ 2y + 3z = b \\ 2z = c \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b - \frac{7}{8}c \\ y = \frac{1}{2}b - \frac{3}{4}c \\ z = \frac{1}{2}c \end{array}\right.
\end{aligned}$$

   donc $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & -7/8 \\ 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$.

Exercice 6 (C3) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout entier naturel n, calculer A^n en utilisant la formule du binôme de Newton.

On a l'égalité $A = N + 2I_3$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Commençons par calculer les puissances de N.
  On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Ensuite, pour tout entier $k \geqslant 3$, on a (puisque $k-3 \in \mathbb{N}$) :
  $$N^k = N^3 N^{k-3} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} N^{k-3} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$
- Par ailleurs, pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, on a :
  $$(2I_3)^j = 2^j I_3^j = 2^j$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Les matrices N et $2I_3$ commutent car $2I_3$ est une matrice scalaire. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton et on a :
  $$\begin{aligned} A^n = (N+2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I_3)^k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k \\ &= \underbrace{2^n I_3}_{k=0} + \underbrace{n2^{n-1}N}_{k=1} + \underbrace{2^{n-2}\binom{n}{2}N^2}_{k=2} + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \underbrace{N^k}_{=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}}_{=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}} \end{aligned}$$
  (par relation de Chasles)

  Comme $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, on obtient :
  $$\begin{aligned} A^n &= 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n(n-1)2^{n-3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 7 (C1-C3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n I_3 + b_n J$.
   Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété : $\mathcal{P}(n)$:« $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = a_n I_3 + b_n J$ »est vraie.
   — *Initialisation :* Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_3$ donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ conviennent et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   — *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :
   $$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times (a_n I_3 + b_n J) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= a_n \underbrace{A}_{I_3 - J} + b_n \underbrace{AJ}_{-2I_3} \\ &= \underbrace{a_n - 2b_n}_{a_{n+1}} I_3 + \underbrace{(-a_n)}_{b_{n+1}} J \end{aligned}$$
   donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— : *Conclusion :* En posant $\boxed{a_0 = 1,\ b_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n - 2b_n \text{ et } b_{n+1} = -a_n}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n I_3 + b_n J$.

2. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on remarque que :

$$a_{n+2} = a_{n+1} - 2b_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$$

donc on reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est :

$$r^2 = r + 2 \iff (r+1)(r-2) = 0$$

donc il existe des constantes $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = A(-1)^n + B2^n.$$

Or $a_0 = 1$ et $a_1 = a_0 - 2b_0 = 1$ donc on résout le système suivant :

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A + 2B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2^{n+1}}{3}$ et donc pour $n \geq 1$, $b_n = \frac{1}{3}(-1)^{n-1} + \frac{2^n}{3}$. On remarque que la formule est aussi exacte pour b_0.
On obtient alors :

$$\boxed{\forall n \geq 0,\ A^n = \left(\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2^{n+1}}{3}\right) I_3 + \left(\frac{1}{3}(-1)^{n-1} + \frac{2^n}{3}\right) J}.$$

Exercice 8 (C1-C2-C3) Soit A la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 - 3A + 2I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{A^2 - 3A + 2I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$.

2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
On a :

$$\begin{aligned} A^2 - 3A + 2I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \iff & A^2 - 3A = -2I_3 \\ & = A(A - 3I_3) = -2I_3 \\ & = A \times \left(-\frac{1}{2}(A - 3I_3)\right) = I_3 \end{aligned}$$

donc A est inversible, d'inverse : $\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3I_3)}$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = A^n + A - 2I_3$.
   (a) Montrer que $A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n$.
   On pose $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} A^{n+2} - 2A^{n+1} &= A^n \times \underbrace{(A^2 - 2A)}_{A - 2I_3} \\ &= A^n \times (A - 2I_3) \\ &= A^{n+1} - 2A^n \end{aligned}$$

   donc $\boxed{A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{n+2} = 2A^{n+1} + A - 2I_3$.
   Par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^{n+2} - 2A^{n+1} = A - 2I_3$.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+2} = 2B_{n+1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} B_{n+2} &= A^{n+2} + A - 2I_3 \\ &= A^{n+2} - 2A^{n+1} + 2A^{n+1} + A - 2I_3 \\ &= A - 2I_3 + 2A^{n+1} + A - 2I_3 \\ &= 2(A^{n+1} + A - 2I_3) \\ &= 2B_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{B_{n+2} = 2B_{n+1}}$.

(d) Calculer A^n.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$:« $B_n = 2^n(A - I_3)$ »est vraie.

— *Initialisation :* On a $B_0 = A^0 + A - 2I_3 = I_3 + A - 2I_3 = A - I_3$ et $2^0(A - I_3) = A - I_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— *Hérédité :* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= 2B_n \\ &= 2 \times 2^n(A - I_3) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 2^{n+1}(A - I_3) \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— *Conclusion :* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = 2^n(A - I_3)}$.

On a alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n} = B_n - A + 2I_3 \boxed{= 2^n(A - I_3) - A + 2I_3}.$$

Exercice 9 (C1-C3) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Montrons que le produit de deux matrices du type $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donne une matrice du même type :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & a' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + a' & b + aa' + b' \\ 0 & 1 & a + a' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{A^n \text{ sera de la même forme}}$.

2. Donner une relation de récurrence sur a_n et b_n. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on sait que $A_n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a donc :

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 + a_n & a_n + b_n \\ 0 & 1 & 1 + a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   On pose donc $\boxed{a_{n+1} = a_n + 1 \text{ et } b_{n+1} = a_n + b_n, \text{ et on a } a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 0}$.

   La suite (a_n) est arithmétique de raison 1 donc pour tout $\boxed{n \in \mathbb{N},\ a_n = n}$.

   On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = b_n + n$, donc on montre par récurrence que

$$\boxed{b_n} = \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{n(n+1)}{2} - n \boxed{= \frac{n(n-1)}{2}}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 10 (C2) On dit qu'une matrice M est *nilpotente* si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $M^k = 0$. Montrer que la matrice $I_n - M$ est inversible et que ;

$$(I_n - M)^{-1} = I_n + M + \cdots + M^{k-1}$$

Application : Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule le produit matriciel :

$$\begin{aligned}(I_n - M) \times \sum_{\ell=0}^{k-1} M^\ell &= \sum_{\ell=0}^{k-1} M^\ell - \sum_{\ell=0}^{k-1} M^{\ell+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{k-1} M^\ell - \sum_{m=1}^{k} M^m \text{ en posant } m = \ell + 1 \\ &= M^0 - M^k \text{ par télescopage} \\ &= I_3 \text{ car } M^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{I_n - M \text{ est inversible, d'inverse } \sum_{\ell=0}^{k-1} M^\ell.}$

On note $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on remarque que $A = I_4 - M$.

On calcule :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M^4 = O_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}.$$

On en déduit par ce qui précède que $\boxed{A \text{ est inversible}}$ et

$$A^{-1} = I_4 + M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$