

Fiche de révision 9 - Correction

Primitives et intégration

1 Compétences et notions à maîtriser

- ▷ C1 : Calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, déterminer une primitive et utiliser le théorème fondamental de l'analyse
- ▷ C2 : Intégrer par parties, effectuer un changement de variables
- ▷ C3 : Utiliser le théorème relatif aux sommes de Riemann
- ▷ C4 : Utiliser les propriétés des intégrales : relation de Chasles, linéarité de l'intégrale, positivité de l'intégrale, croissance de l'intégrale (avec des bornes *dans le bon sens*)

2 Correction des exercices

Exercice 1 (C1-C2)  Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur un ensemble à déterminer :

On note à chaque fois F une primitive de la fonction f et $\mathcal{D}$ un ensemble sur lequel elle admet des primitives.

COMMENTAIRE

L'ensemble $\mathcal{D}$ est tout simplement le domaine de continuité de f (toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur celui-ci).

1. $f : x \mapsto \tan(x)$

La fonction tangente est continue sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, elle y admet donc des primitives. De plus :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$$

Une primitive de f sur $\mathcal{D}$ est $F : x \mapsto -\ln(|\cos(x)|)$.

2. $f : x \mapsto \frac{\arctan(x)}{1+x^2}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont donc elle y admet des primitives. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan'(x) \arctan(x)$$

Donc $F : x \mapsto \frac{\arctan(x)^2}{2}$.

3. $f : x \mapsto \sqrt[3]{x+1}$

La fonction $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de même que la fonction $x \mapsto x+1$. Par composition, f est donc continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \frac{3}{4}(1+x)^{4/3}$.

4. $f : x \mapsto \frac{1 + \tan(\ln(x))^2}{x}$

La fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ tandis que la fonction tangente est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Par composition, la fonction f est donc continue en tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\ln(x) \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \iff x \in \underbrace{\mathbb{R}_+^* \setminus \left\{e^{\frac{\pi}{2} + k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}_{=\mathcal{D}}$$

Comme f est continue sur $\mathcal{D}$, elle y admet des primitives. De plus :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) = \ln'(x) \times \tan'(\ln(x))$$

donc une primitive de f sur $\mathcal{D}$ est $F : x \mapsto \tan(\ln(x))$.

5. $f : x \mapsto \tan(x)^2$

La fonction f est continue sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ donc elle y admet des primitives. On sait de plus que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) = \tan(x)^2 = \tan'(x) - 1$$

donc $F : x \mapsto \tan(x) - x$.

6. $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $3x^2 + 4 \geq 4 > 0$. La fonction $x \mapsto 3x^2 + 4$ est continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par composition, la fonction $x \mapsto \sqrt{3x^2 + 4}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, cette fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto x$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$. Par quotient, la fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$ donc elle y admet des primitives. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 4}}$$

Donc $F : x \mapsto \frac{\sqrt{3x^2 + 4}}{3}$.

7. $f : x \mapsto \sin(x) \cos(2x)$

Par produit, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle y admet des primitives. Pour trouver une primitive de f , on linéarise cette fonction. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les formules d'Euler, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \times \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} = \frac{(e^{i3x} - e^{-i3x}) - (e^{ix} - e^{-ix})}{4i} \\ &= \frac{\sin(3x) - \sin(x)}{2} \end{aligned}$$

en utilisant à nouveau la formule d'Euler du sinus. On obtient donc que $F : x \mapsto -\frac{\cos(3x)}{6} + \frac{\cos(x)}{2}$.

8. $f : x \mapsto (2x + 1)e^{3x}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (par produit de fonctions continues) donc elle y admet des primitives. Si F désigne la primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0, alors (d'après le théorème fondamental de l'Analyse) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (2t + 1)e^{3t} dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons :

$$u'(t) = e^{3t} \quad v(t) = 2t + 1$$

et :

$$u(t) = \frac{e^{3t}}{3} \quad v'(t) = 2$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\min(0, x), \max(0, x)]$ donc on peut intégrer par parties sur ce segment et on a :

$$F(x) = \left[(2t + 1) \frac{e^{3t}}{3} \right]_0^x - \frac{2}{3} \int_0^x e^{3t} dt = \frac{(2x + 1)e^{3x}}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{9}e^{3x} + \frac{2}{9}$$

donc $F : x \mapsto \frac{(2x + 1)e^{3x}}{3} - \frac{1}{9} - \frac{2}{9}e^{3x}$.

9. $f : x \mapsto \frac{\cos(\ln(x))}{x}$

Les fonctions inverse et logarithme sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition et quotient, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle y admet des primitives. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \ln'(x) \cos(\ln(x))$$

donc $F : x \mapsto \sin(\ln(x))$.

10. $f : x \mapsto \arctan(x)$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle y admet des primitives. La primitive F de f s'annulant en 0 est définie par (d'après le théorème fondamental de l'Analyse) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \arctan(t) \, dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose :

$$u'(t) = 1 \qquad v(t) = \arctan(t)$$

et :

$$u(t) = t \qquad v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\min(0, x), \max(0, x)]$ donc on peut intégrer par parties sur ce segment et on a :

$$F(x) = \left[t \arctan(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \, dt = x \arctan(x) - \left[\frac{\ln(1+t^2)}{2} \right]_0^x$$

$$\text{donc } F : x \mapsto x \arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2}.$$

11. $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$

La fonction $x \mapsto 1+x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction f est donc continue en tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $1+x^2 > 0$ ce qui est toujours vrai (puisque $1+x^2 \geq 1$). Autrement dit, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle y admet des primitives. La primitive F de f qui s'annule en 0 est définie par (d'après le théorème fondamental de l'Analyse) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \ln(1+t^2) \, dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose :

$$u'(t) = 1 \qquad v(t) = \ln(1+t^2)$$

et :

$$u(t) = t \qquad v'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\min(0, x), \max(0, x)]$ donc on peut intégrer par parties sur ce segment et on a :

$$F(x) = \left[t \ln(1+t^2) \right]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2} \, dt = x \ln(1+x^2) - \int_0^x \left(2 - \frac{2}{1+t^2} \right) \, dt$$

$$\text{et donc } F : x \mapsto x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan(x).$$

12. $f : x \mapsto x\sqrt{x}$

La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$ (et l'identité sur $\mathbb{R}$) donc (par produit), f est continue sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f admet donc des primitives sur $\mathbb{R}_+$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x^{3/2}$$

$$\text{donc } F : x \mapsto \frac{2}{5}x^{5/2}.$$

Exercice 2 (C1)  On considère la fonction f d'expression $f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .

On remarque que 1 est racine du polynôme $X^3 - X^2 + X - 1$ donc on peut le factoriser par $X - 1$. On a :

$$X^3 - X^2 + X - 1 = X^2(X - 1) + (X - 1) = (X^2 + 1)(X - 1)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\iff x^3 - x^2 + x - 1 \neq 0 \iff (x^2 + 1)(x - 1) \neq 0 \iff \underbrace{x^2 + 1 \neq 0}_{\text{toujours vrai dans } \mathbb{R}} \quad \text{et} \quad x - 1 \neq 0 \\ &\iff x \neq 1 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1} &\iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \frac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-2} = \frac{(a+b)x^2 + (c-b)x + (a-c)}{x^3-x^2+x-2} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, 3x^2+x-2 = (a+b)x^2 + (c-b)x + (a-c) \\ &\iff \begin{cases} a+b &= 3 \\ c-b &= 1 \\ a-c &= -2 \end{cases} \end{aligned}$$

car deux polynômes qui coïncident en une infinité de points sont égaux et par unicité des coefficients d'un polynôme. De plus :

$$\begin{cases} a+b &= 3 \\ c-b &= 1 \\ a-c &= -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 2 \\ c &= 3 \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2x+3}{x^2+1}}$$

3. Calculer l'intégrale $\int_2^3 f(x) \, dx$.

La fonction f est continue sur le segment $[2, 3]$ donc l'intégrale $\int_2^3 f(x) \, dx$ est bien définie. De plus, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_2^3 f(x) \, dx &= \int_2^3 \frac{1}{x-1} \, dx + \int_2^3 \frac{2x}{x^2+1} \, dx + \int_2^3 \frac{3}{1+x^2} \, dx \\ &= \left[\ln(|x-1|) \right]_2^3 + \left[\ln(x^2+1) \right]_2^3 + \left[3 \arctan(x) \right]_2^3 \\ &= \ln(2) + \ln(10) - \ln(5) + 3 \arctan(3) - 3 \arctan(2) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{\int_2^3 f(x) \, dx = 2 \ln(2) + 3 \arctan(3) - 3 \arctan(2)}.$$

Exercice 3 (C1-C2)  Calculer les intégrales suivantes :

Chacune des fonctions mise en jeu est continue sur les segments d'intégrations donc les intégrales sont bien définies.

$$1. I = \int_0^1 x \arctan(x) \, dx$$

Posons :

$$u'(x) = x \qquad v(x) = \arctan(x)$$

et :

$$u(x) = \frac{x^2}{2} \qquad v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$ donc on peut intégrer par parties sur ce segment et on a :

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{x^2}{2} \arctan(x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \, dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left[x - \arctan(x) \right]_0^1 \end{aligned}$$

et donc $\boxed{I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$.

$$2. J = \int_{-1}^1 x \arctan(x) \, dx$$

On peut procéder comme dans la question 1.

La fonction $x \mapsto x \arctan(x)$ est paire sur $\mathbb{R}$ (par produit des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \arctan(x)$ qui sont impaires) donc :

$$\boxed{J = 2 \int_0^1 x \arctan(x) \, dx = 2I = \frac{\pi}{2} - 1}$$

$$3. K = \int_0^\pi \cos(2x) \cos(3x) \, dx$$

Soit $x \in [0, \pi]$. Linéarisons $\cos(2x) \cos(3x)$. D'après la formule de d'Euler du cosinus, on a :

$$\begin{aligned} \cos(2x) \cos(3x) &= \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} \times \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} = \frac{(e^{i5x} + e^{-i5x}) + (e^{ix} + e^{-ix})}{4} \\ &= \frac{\cos(5x) + \cos(x)}{2} \end{aligned}$$

en utilisant à nouveau la formule d'Euler du cosinus. On a donc :

$$\boxed{K = \left[\frac{\sin(5x)}{10} + \frac{\sin(x)}{2} \right]_0^\pi = 0}$$

$$4. L = \int_0^\pi e^{-x} \cos(x) \, dx$$

On utilise deux intégrations par parties et on obtient $\boxed{L = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}}$.

$$5. M = \int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3} \, dx$$

On a $\boxed{M = \left[\ln(|x^2+x-3|) \right]_2^3 = \ln(3)}$.

$$6. N = \int_0^\pi \cos(x)^2 \, dx$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$ donc $\cos(x)^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ donc :

$$\boxed{N = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}}$$

7. $O = \int_0^1 \frac{1}{e^{-x} + 1} dx$

On a :

$$O = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x(e^{-x} + 1)} dx = \left[\ln(e^x + 1) \right]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln(2)$$

8. $P = \int_0^{\ln(2)} (t + 1) e^{-2t} dt$

On utilise une intégration par parties (en dérivant le polynôme). On obtient $P = \frac{9}{16} - \frac{\ln(2)}{8}$.

9. $Q = \int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt$ en posant $x = e^t$

La fonction $\varphi : t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \ln(\sqrt{3})]$ et elle y est strictement croissante. On peut donc faire le changement de variable $x = e^t$ (c'est-à-dire $t = \ln(x)$) et on a :

$$Q = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \times \frac{1}{x} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \left[\arctan(x) \right]_1^{\sqrt{3}}$$

et donc $Q = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

10. $R = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \sqrt{e^x - 1} dx$ en posant $u = \sqrt{e^x - 1}$

La fonction $x \mapsto e^x - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{e^x - 1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^x - 1 > 0$ c'est-à-dire tel que $x > 0$ (en utilisant la stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour résoudre l'inéquation). Donc φ est en particulier de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[\ln(2), \ln(3)]$. De plus :

$$\forall x \in [\ln(2), \ln(3)], \quad \varphi'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

donc φ est aussi strictement croissante sur $[\ln(2), \ln(3)]$. On peut donc effectuer le changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}$ (c'est-à-dire $x = \ln(u^2 + 1)$) et on a :

$$R = \int_1^{\sqrt{2}} u \times \frac{2u}{1 + u^2} du = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{u^2}{1 + u^2} du = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + u^2} \right) du = 2 \left[u - \arctan(u) \right]_1^{\sqrt{2}}$$

et donc $R = 2\sqrt{2} - 2 - 2 \arctan(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2}$.

11. $S = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1 + \ln(x)^2}} dx$

On a $S = \left[\sqrt{1 + \ln(x)^2} \right]_1^e = \sqrt{2} - 1$.

12. $T = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^3 \cos(x)^5 dx$ en posant $t = \sin(x)$

La fonction $\varphi : x \mapsto \sin(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc on peut faire le changement de variable $t = \sin(x)$ (on a $dt = \cos(x) dx$) et on a :

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\pi/2} \sin(x)^3 \cos(x)^4 \cos(x) dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^3 (1 - \sin(x)^2)^2 \cos(x) dx = \int_0^1 t^3 (1 - t^2)^2 dt \\ &= \int_0^1 t^3 (t^4 - 2t^2 + 1) dt \\ &= \int_0^1 (t^7 - 2t^5 + t^3) dt \end{aligned}$$

et on obtient $T = \frac{1}{24}$.

13. $U = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$

Indication : pour l'intégrale U , commencer par mettre $x^2 - x + 1$ sous forme canonique.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

et donc :

$$\begin{aligned} U &= \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{\frac{4}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \arctan \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) \end{aligned}$$

Or $\arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{\pi}{6}$ et la fonction $\arctan$ est impaire donc $\boxed{U = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$.

14. En déduire $V = \int_0^1 \frac{x}{x^2 - x + 1} dx$.

Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2-x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left[\ln(|x^2-x+1|) \right]_0^1}_{=0} + \frac{U}{2} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{V = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$.

Exercice 4 (C3)  Déterminer les limites suivantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note à chaque fois S_n la somme dont on cherche la limite.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n \left(1 + \frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Ainsi, S_n est une somme de Riemann associée à la fonction f . Comme f est continue sur $[0, 1]$:

la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx = \ln(2)$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n \left(1 + \frac{k}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}$. Ainsi, S_n est une somme de Riemann associée à la fonction f . Comme f est continue sur $[0, 1]$, la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite :

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[\arctan(x) + \frac{\ln(1+x^2)}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

On applique de même le théorème sur les sommes de Riemann et on trouve que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $\int_0^1 x^2 \sin(\pi x) dx = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$ (avec deux intégration par parties en dérivant deux fois la partie polynomiale).

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}$$

On recommence et on trouve que $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \dots = \frac{2}{3}$.

$$5. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n \sqrt{n^2 - \frac{k^2}{4}}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors (puisque $|n| = n$) :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}$. Donc S_n est une somme de Riemann associée à la fonction f . Comme f est continue sur $[0, 1]$, la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite :

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} dx = \int_0^1 (-4) \frac{-\frac{x}{2}}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} dx = \left[-4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right]_0^1 = 4 - 4\sqrt{\frac{3}{4}} = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n+k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+k} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k}{2n}} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \frac{k}{n}} = u_{2n} - v_n$$

où :

$$u_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k}{2n}} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{2+x}$. Donc u_{2n} et v_n sont des sommes de Riemann des fonctions continues f et g sur $[0, 1]$ donc les suites $(u_{2n})_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont convergentes de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(2)$$

et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2+x} dx = \ln(3) - \ln(2)$$

Par linéarité de la limite :

la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $2 \ln(2) - \ln(3)$

Exercice 5 (C1-C2-C4) Pour tout entier naturel n , on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n dt$$

1. En utilisant un changement de variable affine, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$. La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\varphi\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $t \mapsto \sin(t)^n$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc on peut faire le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$ (alors $x = \frac{\pi}{2} - t$) et on a :

$$W_n = \int_{\pi/2}^0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^n (-1) dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n dt$.

2. Calculer W_0 et W_1 .

On a $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = \left[-\cos(t)\right]_0^{\pi/2} = 1$.

3. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(t)^2) \sin(t)^n dt = W_n - \int_0^{\pi/2} \cos(t) (\cos(t) \sin(t)^n) dt$$

On calcule l'intégrale de droite à l'aide d'une intégration par parties. Posons :

$$u'(t) = \cos(t) \sin(t)^n \quad \text{et} \quad v(t) = \cos(t)$$

et :

$$u(t) = \frac{\sin(t)^{n+1}}{n+1} \quad \text{et} \quad v'(t) = -\sin(t)$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc on peut intégrer par parties sur ce segment et on a :

$$\int_0^{\pi/2} \cos(t) (\cos(t) \sin(t)^n) dt = \underbrace{\left[\cos(t) \frac{\sin(t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + \frac{1}{n+1} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n+2} dt}_{=W_n}$$

On a donc $W_{n+2} = W_n - \frac{1}{n+1} W_n$ et donc $\frac{n+2}{n+1} W_{n+2} = W_n$. Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \frac{(2n)!}{2(2^n n!)^2} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

On utilise un raisonnement par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « $W_{2n} = \frac{\pi(2n)!}{2(2^n n!)^2}$ et $W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ ».

- **Initialisation** : montrons que la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie. On a :

$$\frac{\pi 0!}{2 \times (2^0 0!)^2} = \frac{\pi}{2} = W_0 \quad \text{et} \quad \frac{(2^0 0!)^2}{1!} = 1 = W_1$$

donc la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons qu'elle entraîne la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$. D'après la question 3. et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)} = W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{\pi(2n)!}{2(2^n n!)^2} = \frac{\pi(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2^2(n+1)^2(2^n)^2(n!)^2} \\ &= \frac{\pi(2n+2)!}{(2 \times 2^n)^2((n+1)n!)^2} \\ &= \frac{\pi(2(n+1))!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)+1} = W_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2^2(n+1)^2(2^n n!)^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \\ &= \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!} \end{aligned}$$

donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion** : pour tout entier naturel n , la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie par principe de récurrence simple.

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \frac{\pi(2n)!}{2(2^n n!)^2} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$$

5. Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On distingue deux cas suivant la parité de l'entier n .

• **Premier cas :** n est pair

Il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2n$. D'après la question 4., on a :

$$\begin{aligned} (n+1)W_{n+1}W_n &= (2m+1)W_{2m+1}W_{2m} = (2m+1) \times \frac{(2^m m!)^2}{(2m+1)!} \times \frac{\pi(2m)!}{2(2^m m!)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \underbrace{\frac{(2m+1)(2m)!}{(2m+1)!}}_{=1} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

• **Deuxième cas :** n est impair

Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m+1$ et :

$$\begin{aligned} (n+1)W_{n+1}W_n &= (2m+2)W_{2m+2}W_{2m+1} = (2m+2) \times \frac{\pi(2m+2)!}{2(2^{m+1}(m+1)!)^2} \times \frac{(2^m m!)^2}{(2m+1)!} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{(2m+2)^2(2m+1)!}{(2m+1)!} \times \frac{(2^m m!)^2}{2^2(m+1)^2(2^m m!)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$$

6. Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et décroissante.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors $\sin(t) \geq 0$ et donc (par positivité de la fonction $u \mapsto u^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sin(t)^n \geq 0$. De plus :

$$\sin(t)^n - \sin(t)^{n+1} = \underbrace{\sin(t)^n}_{\geq 0} \underbrace{(1 - \sin(t))}_{\geq 0} \geq 0 \quad \text{donc} \quad \sin(t)^{n+1} \leq \sin(t)^n$$

On obtient donc $0 \leq \sin(t)^{n+1} \leq \sin(t)^n$. Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n+1} dt \leq \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 \leq W_{n+1} \leq W_n$$

Finalement :

la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et décroissante

7. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\pi}{2} \leq (n+1)W_n^2 \leq \frac{\pi(n+1)}{2n}$$

En déduire un équivalent de W_n quand n tend vers $+\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $W_{n+1} \leq W_n$ et $(n+1)W_n \geq 0$ donc (par produit) on obtient :

$$(n+1)W_{n+1}W_n \leq (n+1)W_n^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\pi}{2} \leq (n+1)W_n^2$$

d'après la question 5. De plus, on a aussi $W_n^2 \leq W_n W_{n-1}$ (car $W_n \leq W_{n-1}$ et $W_n \geq 0$) donc :

$$(n+1)W_n^2 \leq (n+1)W_n W_{n-1} = \frac{(n+1)}{n} \times nW_n W_{n-1} = \frac{(n+1)\pi}{2n}$$

d'après la question 5. (pour l'entier $n-1$). Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\pi}{2} \leq (n+1)W_n^2 \leq \frac{\pi(n+1)}{2n}}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi(n+1)}{2n} = \frac{\pi}{2}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)W_n^2 = \frac{\pi}{2}$. On a alors :

$$W_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n} \quad \text{car } n+1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$$

On a alors $|W_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et donc, par positivité de la suite $(W_n)_{n \geq 1}$, on obtient :

$$\boxed{W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

8. Dédurre de ce qui précède un équivalent de $\binom{2n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = 2^{2n+1}W_{2n}$ d'après la question 4. En utilisant l'équivalent obtenu à la question 7., il vient :

$$\boxed{\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{2n+1} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}}$$

Exercice 6 (C1-C2-C4)  Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan(t)^n dt$.

1. Justifier, pour tout entier naturel n , l'existence de I_n .

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \tan(t)^n$ est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ donc :

l'intégrale I_n est bien définie

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} en calculant $I_n + I_{n+2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\pi/4} (1 + \tan(x)^2) \tan(x)^n dx = \int_0^{\pi/4} \tan'(x) \tan(x)^n dx \\ &= \left[\frac{\tan(x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\pi/4} \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

(b) Calculer I_0 et I_1 . En déduire I_2 et I_3 .

On a $I_0 = \int_0^{\pi/4} 1 \, dx = \frac{\pi}{4}$ et :

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, dx = \left[-\ln(|\cos(x)|) \right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2}$$

D'après la question 2., on a $I_2 = 1 - I_0 = 1 - \frac{\pi}{4}$ et $I_3 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1 - \ln(2)}{2}$.

(c) Écrire une fonction **python** qui prend en entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de I_n .
On peut par exemple utiliser une fonction récursive.

```

1 from math import *
2 def integrale(n) :
3     if (n == 0) :
4         return pi/4
5     elif (n == 1) :
6         return log(2)/2
7     else :
8         return 1/(n-1)-integrale(n-2)

```

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a $\tan(t) \geq 0$ et (par positivité de la fonction $u \mapsto u^n$ sur $\mathbb{R}_+$), il vient $\tan(t)^n \geq 0$. De plus :

$$\tan(t)^n - \tan(t)^{n+1} = \underbrace{\tan(t)^n}_{\geq 0} \underbrace{(1 - \tan(t))}_{\geq 0} \geq 0$$

car la fonction tangente est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. On a donc $0 \leq \tan(t)^{n+1} \leq \tan(t)^n$ puis, par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^{\pi/4} \tan(t)^{n+1} \, dt \leq \int_0^{\pi/4} \tan(t)^n \, dt \quad \text{c'est-à-dire} \quad 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$$

Ainsi, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone.

On note ℓ la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \ell$ donc, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence obtenue à la question 2. et en utilisant la linéarité de la limite, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2\ell = 0 \quad \text{soit} \quad \ell = 0$$

Finalement, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite 0.

Exercice 7 (C1-C2-C4) Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{5 + 4\cos(t)} dt$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|I_n| \leq \pi$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité triangulaire (pour les intégrales), on a :

$$|I_n| \leq \int_0^\pi \left| \frac{\cos(nt)}{5 + 4\cos(t)} \right| dt \quad \text{c'est-à-dire} \quad |I_n| \leq \int_0^\pi \frac{|\cos(nt)|}{|5 + 4\cos(t)|} dt \quad (1)$$

Soit $t \in [0, \pi]$. Alors $-1 \leq \cos(nt) \leq 1$ donc $|\cos(nt)| \leq 1$. De plus, $4\cos(t) \geq -4$ donc $5 + 4\cos(t) \geq 1$. On a donc :

$$|5 + 4\cos(t)| = 5 + 4\cos(t) \geq 1$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient $\frac{1}{|5 + 4\cos(t)|} \leq 1$ puis (par produit) $\frac{|\cos(nt)|}{|5 + 4\cos(t)|} \leq$

1. Par croissance de l'intégrale et d'après (1), on a donc $|I_n| \leq \int_0^\pi 1 dt$. Finalement :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } |I_n| \leq \pi}$$

2. Dans cette question, on souhaite calculer l'intégrale I_0 .

- (a) Montrer que :

$$\forall (a, X) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \int_0^X \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{X}{a}\right)$$

Soit $(a, X) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_0^X \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int_0^X \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{1}{a} \int_0^X \frac{\frac{1}{a}}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \frac{1}{a} \left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^X$$

et donc $\boxed{\int_0^X \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{X}{a}\right)}$.

- (b) Montrer que pour tout $t \in [0, \pi[$, on a l'égalité $\cos(t) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ où $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

Soit $t \in [0, \pi[$. Alors $\frac{t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ est bien défini :

$$\begin{aligned} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos\left(2 \times \frac{t}{2}\right)}{1} \end{aligned}$$

d'après la formule de duplication du cosinus. Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } t \in [0, \pi[, \text{ on a } \cos(t) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \text{ où } x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)}$$

- (c) En déduire une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{5 + 4 \cos(t)}$ sur l'intervalle $[0, \pi[$ en utilisant le changement de variable $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{5 + 4 \cos(t)}$ est continue sur l'intervalle $[0, \pi[$ donc elle y admet des primitives. La primitive de f qui s'annule en 0 est la fonction :

$$F : \begin{cases} [0, \pi[& \longrightarrow \\ u & \longmapsto \int_0^u \frac{1}{5 + 4 \cos(t)} dt \end{cases} \quad \mathbb{R}$$

Soit $u \in [0, \pi[$. La fonction $\varphi : t \mapsto \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, x]$ et est strictement croissante sur $[0, x]$. On peut donc faire le changement de variable $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. On a $t = 2 \arctan(x)$ donc $dt = \frac{2}{1 + x^2} dx$. De plus $\cos(t) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ donc :

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^{\tan(\frac{u}{2})} \frac{1}{5 + 4 \times \frac{1-x^2}{1+x^2}} \times \frac{2}{1+x^2} dx = 2 \int_0^{\tan(\frac{u}{2})} \frac{1}{x^2 + 3^2} dx \\ &= \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{\tan(\frac{u}{2})}{3}\right) \end{aligned}$$

d'après la question 2.(b). Donc :

$$\boxed{\forall u \in [0, \pi[, \quad F(u) = \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{\tan(\frac{u}{2})}{3}\right)}$$

- (d) Justifier que $I_0 = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \int_0^x \frac{1}{5 + 4 \cos(t)} dt$ et en déduire que $I_0 = \frac{\pi}{3}$.

On a $I_0 = \int_0^\pi \frac{1}{5 + 4 \cos(t)} dt$. Or la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{5 + 4 \cos(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{5 + 4 \cos(t)} dt$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. En particulier, cette fonction est continue en π donc $\lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) = F(\pi)$. En utilisant la question 2.(c), on obtient :

$$\begin{aligned} I_0 &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{\tan(\frac{x}{2})}{3}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \arctan(y) \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{3}}$.

3. Calculer $I_1 + \frac{5}{4}I_0$ et en déduire la valeur de I_1 .

Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I_1 + \frac{5}{4} I_0 = \int_0^\pi \left(\frac{\cos(t)}{5 + 4 \cos(t)} + \frac{5}{4(5 + 4 \cos(t))} \right) dt = \int_0^\pi \frac{4 \cos(t) + 5}{4(5 + 4 \cos(t))} dt = \int_0^\pi \frac{1}{4} dt = \frac{\pi}{4}$$

On en déduit donc que $\boxed{I_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{5}{4} \times \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}}$.

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} + I_n = -\frac{5}{2} I_{n+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I_{n+2} + I_n = \int_0^\pi \frac{\cos((n+2)t) + \cos(nt)}{5 + 4\cos(t)} dt$$

Or pour tout $t \in [0, \pi]$, on a :

$$\begin{aligned} \cos((n+2)t) + \cos(nt) &= \cos((n+1)t + t) + \cos((n+1)t - t) \\ &= \cos((n+1)t) \cos(t) - \sin((n+1)t) \sin(t) + \cos((n+1)t) \cos(t) + \sin((n+1)t) \sin(t) \\ &= 2 \cos((n+1)t) \cos(t) \\ &= 2 \cos((n+1)t) \times \frac{(5 + 4 \cos(t)) - 5}{4} \\ &= \cos((n+1)t) \times \frac{(5 + 4 \cos(t)) - 5}{2} \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+2} + I_n &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n+1)t) dt - \frac{5}{2} \int_0^\pi \frac{\cos((n+1)t)}{5 + 4 \cos(t)} dt \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left[\frac{\sin((n+1)t)}{n+1} \right]_0^\pi}_{=0} - \frac{5}{2} I_{n+1} \end{aligned}$$

Finalement :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} + I_n = -\frac{5}{2} I_{n+1}$

5. En déduire la valeur de I_n pour tout entier naturel n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} = -\frac{5}{2} I_{n+1} - I_n$. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc récurrente linéaire d'ordre deux.

L'équation caractéristique associée $x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0$ admet pour racines -2 et $-\frac{1}{2}$. On en déduit donc que :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = A(-2)^n + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Déterminons les valeurs de A et B . On résout :

$$\begin{cases} I_0 = \frac{\pi}{3} \\ I_1 = -\frac{\pi}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = \frac{\pi}{3} \\ -2A - \frac{B}{2} = -\frac{\pi}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} B = \frac{\pi}{3} \\ A = 0 \end{cases}$$

Finalement,

pour tout entier naturel n , on a $I_n = \frac{\pi}{3(-2)^n}$.

Exercice 8 (C3)  On considère la fonction :

$$f : x \mapsto \int_0^\pi e^{-x \sin(t)} dt$$

et on pose :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, \quad S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-x \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

1. (a) Écrire une fonction **somme** de paramètres x et n permettant de calculer $S_n(x)$.
Il s'agit ici de calculer une somme.

```

1 def somme(x,n) :
2     S = 0
3     for k in range(n) :
4         S = S+exp(-x*sin(k*pi/n))
5     return S/n

```

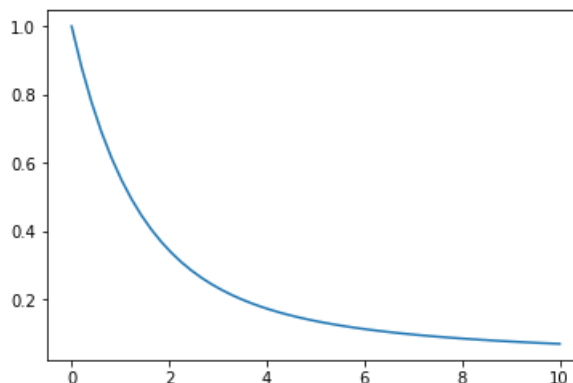
- (b) Écrire un programme qui affiche le graphe de la fonction S_n sur un intervalle $[a, b]$.
On écrit un script qui demande à l'utilisateur les valeurs de a , b et n .

```

1 from pylab import *
2 a = eval(input("Donner la valeur de a"))
3 b = eval(input("Donner la valeur de b"))
4 n = eval(input("Donner la valeur de n"))
5 X = linspace(a,b)
6 Y = somme(X,n)
7 plot(X,Y)
8 show()

```

Pour $a = 0$, $b = 10$ et $n = 30$, on obtient le graphe suivant.



2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite en fonction de $f(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{où} \quad g : t \mapsto e^{-x \sin(\pi t)}$$

Donc $S_n(x)$ est une somme de Riemann associée à la fonction g . Comme g est continue sur $[0, 1]$, la suite $(S_n(x))_{n \geq 1}$ est convergente de limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 e^{-x \sin(\pi t)} dt$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \pi t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0, 1]$ donc on peut faire le changement de variable $u = \pi t$ et on a :

$$\int_0^1 g(t) dt = \int_0^\pi e^{-x \sin(u)} \frac{1}{\pi} du = \frac{1}{\pi} f(x)$$

Finalement, la suite $(S_n(x))_{n \geq 1}$ est convergente de limite $\frac{f(x)}{\pi}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction S_n est dérivable en 0 et exprimer $S'_n(0)$ sous forme d'une somme. Trouver une expression condensée de $S'_n(0)$ et calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la fonction $x \mapsto -x \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc (par composition) la fonction $x \mapsto e^{-x \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par somme, la fonction S_n est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier, S_n est donc dérivable en 0. De plus, on a par linéarité de la dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S'_n(x) = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{-x \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

et donc, en particulier :

$$S'_n(0) = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Posons $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{i \frac{k\pi}{n}}\right)$. Par linéarité de la partie imaginaire et d'après la formule de Moivre, on a :

$$u_n = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{k\pi}{n}}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i \frac{\pi}{n}}\right)^k\right) = \operatorname{Im}(v_n) \quad \text{où} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i \frac{\pi}{n}}\right)^k$$

Or v_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i \frac{\pi}{n}} \neq 1$ car $\frac{\pi}{n} \in]0, \pi[$ (donc en particulier $\frac{\pi}{n} \neq 0 \pmod{2\pi}$). Ainsi :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1 - \left(e^{i \frac{\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i \frac{\pi}{n}}} = \frac{1 - e^{i \pi}}{1 - e^{i \frac{\pi}{n}}} = \frac{2}{e^{i \frac{\pi}{2n}} \left(e^{-i \frac{\pi}{2n}} - e^{i \frac{\pi}{2n}}\right)} = \frac{2 e^{i \frac{\pi}{2n}}}{-2 i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\ &= \frac{i \left(\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\ &= -1 + \frac{i}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \end{aligned}$$

On a donc $u_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$ et $S'_n(0) = -\frac{1}{n \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$, on a $\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ donc (par produit) $n \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$. On en déduit donc que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n(0) = -\frac{2}{\pi}$$

4. (a) Montrer que :

$$\forall u \in]-\infty, 0], \quad 0 \leq e^u - 1 - u \leq \frac{u^2}{2}$$

On montre que pour tout $u \in \mathbb{R}$ (en particulier pour tout $u \in]-\infty, 0]$), on a l'inégalité $e^u \geq 1 + u$ (il suffit ou bien d'étudier la fonction $f : u \mapsto e^u - 1 - u$ ou bien d'appliquer le théorème des accroissements finis sur le segment $[u, 0]$ pour $u \leq 0$ à la fonction exponentielle), ce qui établit l'inégalité de gauche.

Soit la fonction $g : u \mapsto e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2}$. La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 0]$ et :

$$\forall u \in]-\infty, 0], \quad g'(u) = e^u - 1 - u = f(u) \geq 0 \quad \text{d'après ce qui précède}$$

La fonction g est donc croissante sur $]-\infty, 0]$ et comme $g(0) = 0$, on a :

$$\forall u \in]-\infty, 0], \quad g(u) \leq g(0) \quad \text{c'est-à-dire} \quad g(u) \leq 0$$

Finalement :

$$\boxed{\forall u \in]-\infty, 0], \quad 0 \leq e^u - 1 - u \leq \frac{u^2}{2}}$$

(b) En déduire que :

$$\forall x > 0, \forall t \in [0, \pi], \quad 0 \leq \frac{e^{-x \sin(t)} - 1}{x} + \sin(t) \leq \frac{1}{2} x \sin(t)^2$$

Soit $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, \pi]$. Alors :

$$\frac{e^{-x \sin(t)} - 1}{x} + \sin(t) = \frac{e^{-x \sin(t)} + x \sin(t) - 1}{x} = \frac{e^u - 1 - u}{x} \quad \text{en posant } u = -x \sin(t)$$

Comme $t \in [0, \pi]$, on a $\sin(t) \geq 0$ et $-x < 0$ (car $x > 0$). Par produit, on a $-x \sin(t) \leq 0$. On peut donc appliquer la question 4.(a) et on a :

$$0 \leq e^{-x \sin(t)} + x \sin(t) - 1 \leq \frac{x^2 \sin(t)^2}{2}$$

En multipliant par $\frac{1}{x} > 0$, on obtient bien :

$$\boxed{\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, \pi], \quad 0 \leq \frac{e^{-x \sin(t)} - 1}{x} + \sin(t) \leq \frac{1}{2} x \sin(t)^2}$$

(c) En déduire que f est dérivable en à droite en 0 et que le nombre dérivée à droite de f en 0 vaut -2 . Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \int_0^\pi \frac{e^{-x \sin(t)} - 1}{x} dt = \int_0^\pi \left(\frac{e^{-x \sin(t)} - 1}{x} + \sin(t) \right) dt - \int_0^\pi \sin(t) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{e^{-x \sin(t)} - 1}{x} + \sin(t) \right) dt - 2 \end{aligned}$$

Par croissance (et linéarité) de l'intégrale et d'après la question 4.(b), on a (puisque $x > 0$ et qu'on intègre sur le segment $[0, \pi]$) :

$$0 \leq \int_0^\pi \left(\frac{e^{-x \sin(t)} - 1}{x} + \sin(t) \right) dt \leq \frac{x}{2} \int_0^\pi \sin(t)^2 dt$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} \int_0^\pi \sin(t)^2 dt = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on a aussi :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^\pi \left(\frac{e^{-x \sin(t)} - 1}{x} + \sin(t) \right) dt = 0$$

Par linéarité de la limite, on trouve donc que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable à droite en 0 et } f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2}$$

Exercice 9 (C4)  On note E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction $\Phi(f)$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \Phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) \, dt$$

1. Montrer que :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], \quad \Phi(f)(x) = \int_0^x t f(t) \, dt + x \int_x^1 f(t) \, dt$$

Soient $f \in E$ et $x \in [0, 1]$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\min(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq t \\ t & \text{si } t \leq x \end{cases}$. En utilisant la relation de Chasles, on a alors :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x \min(x, t) f(t) \, dt + \int_x^1 \min(x, t) f(t) \, dt = \int_0^x t f(t) \, dt + \int_x^1 x f(t) \, dt = \int_0^x t f(t) \, dt + x \int_x^1 f(t) \, dt$$

par linéarité de l'intégrale. Donc :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1], \quad \Phi(f)(x) = \int_0^x t f(t) \, dt + x \int_x^1 f(t) \, dt$$

2. Montrer que Φ est un endomorphisme de E .

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in E^2$. Montrons que $\Phi(f + \lambda g) = \Phi(f) + \lambda \Phi(g)$. Cela est équivalent à :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \Phi(f + \lambda g)(x) = \Phi(f)(x) + \lambda \Phi(g)(x)$$

Soit $x \in [0, 1]$. Par définition de Φ , on a :

$$\begin{aligned} \Phi(f + \lambda g)(x) &= \int_0^1 \min(x, t) (f + \lambda g)(t) \, dt \\ &= \int_0^1 \min(x, t) (f(t) + \lambda g(t)) \, dt \\ &= \int_0^1 (\min(x, t) f(t) + \lambda \min(x, t) g(t)) \, dt \\ &= \int_0^1 \min(x, t) f(t) \, dt + \lambda \int_0^1 \min(x, t) g(t) \, dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \Phi(f)(x) + \lambda \Phi(g)(x) \end{aligned}$$

Donc l'application Φ est linéaire.

Soit maintenant $f \in E$. On doit montrer que $\Phi(f) \in E$, c'est-à-dire que $\Phi(f)$ est une fonction continue sur $[0, 1]$. D'après la question 1., on sait que :

$$\Phi(f) : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \underbrace{\int_0^x t f(t) \, dt}_{\text{noté } g(x)} + x \underbrace{\int_x^1 f(t) \, dt}_{\text{noté } h(x)} \end{cases}$$

Comme $f \in E$, la fonction $t \mapsto t f(t)$ est continue sur $[0, 1]$ (par produit de fonctions continues). Ainsi, la fonction g est la primitive de $t \mapsto t f(t)$ sur $[0, 1]$ qui s'annule en 0. En particulier, g est dérivable et donc continue sur $[0, 1]$. Par ailleurs :

$$\forall x \in [0, 1], \quad h(x) = - \int_1^x f(t) \, dt$$

Comme f est continue sur $[0, 1]$, la fonction $-h$ est la primitive de f sur $[0, 1]$ qui s'annule en 1. En particulier, $-h$ (et donc h) est dérivable et donc continue sur $[0, 1]$. La fonction $\Phi(f) : x \mapsto g(x) + x h(x)$ est donc continue sur $[0, 1]$ (par produit et différence de fonctions continues). Autrement dit, $\Phi(f) \in E$. Finalement :

l'application Φ est un endomorphisme de E

3. (a) Soit $f \in E$. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et que $\Phi(f)'' = -f$.
 Soit $f \in E$. On a vu à la question 2. que $\Phi(f) : x \mapsto g(x) + xh(x)$ où les fonctions g et h sont dérivables sur $[0, 1]$. Par produit et somme, la fonction $\Phi(f)$ est dérivable sur $[0, 1]$. Comme g et $-h$ sont des primitives de la fonction f sur $[0, 1]$, on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \Phi(f)'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t) dt + x \times (-f(x)) = h(x)$$

avec les mêmes notations qu'à la question 2. On sait que la fonction h est dérivable sur $[0, 1]$ (de dérivée $-f$) donc $\Phi(f)'$ est dérivable sur $[0, 1]$ et $\Phi(f)'' = -f$. Finalement :

pour tout $f \in E$, la fonction $\Phi(f)$ est deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et $\Phi(f)'' = -f$

- (b) En déduire le noyau de Φ .

Soit $f \in E$. Si $f \in \text{Ker}(\Phi)$, alors $\Phi(f) = 0_E$. En dérivant deux fois, on obtient $\Phi''(f) = 0_E'' = 0_E$. En utilisant la question 3.(a), on obtient $-f = 0_E$, c'est-à-dire $f = 0_E$. On a donc démontré l'inclusion $\text{Ker}(\Phi) \subset \{0_E\}$.

On sait que $\text{Ker}(\Phi)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in \text{Ker}(\Phi)$. On a ainsi la deuxième inclusion $\{0_E\} \subset \text{Ker}(\Phi)$.

Finalement, le noyau de Φ est $\text{Ker}(\Phi) = \{0_E\}$ (et donc Φ est injective).

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- (a) Soit $f \in E$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in \text{Ker}(\Phi - \lambda \text{Id}_E)$;

(ii) f est deux fois dérivable sur $[0, 1]$, $f(0) = f'(1) = 0$ et $\lambda f'' + f = 0$.

Soit $f \in E$. On démontre l'équivalence (i) $\iff$ (ii) en raisonnant par double implication.

— Montrons que (i) $\implies$ (ii). On suppose donc que $f \in \text{Ker}(\Phi - \lambda \text{Id}_E)$. On a alors $\Phi(f) = \lambda f$ et comme $\lambda \neq 0$, on a aussi $\lambda = \frac{1}{\lambda} \Phi(f)$. D'après la question 3.(a), la fonction $\Phi(f)$ est deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et $\Phi(f)'' = -f$. D'après l'égalité précédente, f est donc deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et $(\lambda f)'' = -f$, c'est-à-dire $\lambda f'' + f = 0$.

De plus, l'égalité $\Phi(f) = \lambda f$ se réécrit :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \int_0^x tf(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt = \lambda f(x) \quad (2)$$

Pour $x = 0$, on obtient $\lambda f(0) = 0$ et donc $f(0) = 0$ puisque $\lambda \neq 0$. En dérivant (2) (les fonctions mises en jeu sont dérivables sur $[0, 1]$), on obtient :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \int_x^1 f(t) dt = \lambda f'(x)$$

Pour $x = 1$, on trouve $f'(1) = 0$ (car $\lambda \neq 0$). Ceci établit la proposition (ii).

— Réciproquement, supposons que la proposition (ii) soit satisfaite. On veut montrer que $f \in \text{Ker}(\Phi - \lambda \text{Id}_E)$. On a $\lambda f'' + f = 0$ donc $\lambda f'' = -f = \Phi(f)''$ d'après la question 3.(a), soit encore $(\Phi(f) - \lambda f)'' = 0$. En intégrant deux fois on trouve donc qu'il existe $(C, D) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(f)(x) - \lambda f(x) = Cx + D$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x tf(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt - \lambda f(x) = Cx + D \quad (3)$$

Pour $x = 0$, on trouve donc que $D = -\lambda f(0) = 0$ (car $f(0) = 0$ d'après (ii)). En dérivant (3), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^1 f(t) dt - \lambda f'(x) = C$$

ce qui donne, pour $x = 1$, $C = 0$ (puisque $f(1) = 0$ d'après (ii)). Finalement, $\Phi(f) - \lambda f = 0_E$, ce qui prouve que $f \in \text{Ker}(\Phi - \lambda \text{Id}_E)$.

Finalement, les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes.

(b) En déduire $\text{Ker}(\Phi - \lambda \text{Id}_E)$.

D'après la question 4., on sait que $\text{Ker}(\Phi - \lambda \text{Id}_E)$ est l'ensemble des fonctions f deux fois dérivables sur $[0, 1]$ telles que :

$$f(0) = f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda f'' + f = 0$$

Il s'agit donc de résoudre ce problème de Cauchy. L'équation différentielle $\lambda f'' + f = 0$ est linéaire, du second ordre (puisque $\lambda \neq 0$), à coefficients constants et homogène. L'équation caractéristique $\lambda x^2 + 1 = 0$ admet ou bien deux racines réelles qui sont $\pm \sqrt{\lambda^{-1}}$ dans le cas où $\lambda < 0$, ou bien deux racines complexes conjuguées distinctes qui sont $\pm i\sqrt{-\lambda^{-1}}$ dans le cas où $\lambda > 0$. Dans le premier cas, on peut donc dire que :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [0, 1], \quad f(x) = A e^{-\sqrt{\lambda^{-1}}x} + B e^{\sqrt{\lambda^{-1}}x}$$

et dans le second cas :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [0, 1], \quad f(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda^{-1}}x) + B \sin(\sqrt{-\lambda^{-1}}x)$$

On résout, dans chacun des deux cas, le système (en A et B) correspondant au problème de Cauchy $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$. On trouve (...) $A = B = 0$. On obtient donc :

$$\boxed{\text{Ker}(\Phi - \lambda \text{Id}_E) = \{0_E\}}$$

COMMENTAIRE

On peut éviter de résoudre l'équation différentielle issu de (ii) pour déterminer $\text{Ker}(\Phi - \lambda \text{Id}_E)$. En effet, on sait que $\text{Ker}(\Phi - \lambda \text{Id}_E)$, en tant qu'espace vectoriel, contient ou bien exactement un unique vecteur dans le cas où il est égal à $\{0_E\}$, ou bien contient une infinité de vecteurs (dès lors qu'il n'est pas égal à $\{0_E\}$). Or on sait aussi que le problème de Cauchy (ii) possède une seule solution, ce qui implique que le noyau $\text{Ker}(\Phi - \lambda \text{Id}_E)$ est constituée d'un unique élément. On a donc nécessairement $\text{Ker}(\Phi - \lambda \text{Id}_E) = \{0_E\}$.

Exercice 10 (C1-C2-C4)  Soit $x \in [0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$K_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$$

Soit $x \in [0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}}$ est continue sur le segment $[0, x]$ (puisque $1 \notin [0, x]$) donc l'intégrale $K_n(x)$ est bien définie.

1. Calculer $K_0(x)$ et $K_1(x)$.

On a :

$$K_0(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \left[-\ln(|1-t|) \right]_0^x = -\ln(1-x)$$

et :

$$\begin{aligned} K_1(x) &= \int_0^x \frac{x-t}{(1-t)^2} dt = \int_0^x \frac{(x-1) + (1-t)}{(1-t)^2} dt = \int_0^x \left(\frac{x-1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= \left[\frac{x-1}{1-t} - \ln(1-t) \right]_0^x \\ &= -1 - \ln(1-x) - x + 1 \end{aligned}$$

donc $\boxed{K_0(x) = -\ln(1-x) \text{ et } K_1(x) = -x - \ln(1-x)}$.

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K_n(x) = K_{n-1}(x) - \frac{x^n}{n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$u'(t) = \frac{1}{(1-t)^{n+1}} = (1-t)^{-n-1} \quad v(t) = (x-t)^n$$

et :

$$u(t) = \frac{1}{n(1-t)^n} \quad v'(t) = -n(x-t)^{n-1}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, x]$ donc on peut intégrer par parties et on a :

$$K_n(x) = \left[\frac{(x-t)^n}{n(1-t)^n} \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^n} dt = -\frac{x^n}{n} + K_{n-1}(x)$$

On a donc bien, $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, K_n(x) = K_{n-1}(x) - \frac{x^n}{n}$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n(x) = -\ln(1-x) - K_n(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad K_k(x) - K_{k-1}(x) = -\frac{x^k}{k}$$

En sommant ces égalités, on a alors :

$$\sum_{k=1}^n (K_k(x) - K_{k-1}(x)) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \quad \text{c'est-à-dire} \quad K_n(x) - K_0(x) = -S_n(x)$$

car la somme de gauche est télescopique. Or on sait que $K_0(x) = -\ln(1-x)$ (d'après la question 1.) donc on a bien :

$$\boxed{S_n(x) = -\ln(1-x) - K_n(x)}$$

4. Montrer que pour tout $t \in [0, x]$, on a $\frac{x-t}{1-t} \leq x$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq K_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Soit $t \in [0, x]$. On a :

$$x - \frac{x-t}{1-t} = \frac{x(1-t) - (x-t)}{1-t} = \frac{t(1-x)}{1-t} \geq 0 \quad \text{car } t \geq 0, 1-x \geq 0 \text{ et } 1-t \geq 0$$

On a donc $\frac{x-t}{1-t} \leq x$. On a de plus $\frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} = \frac{1}{1-t} \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n$. Par croissance de la fonction $u \mapsto u^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$0 \leq \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n \leq x^n$$

De plus $1-t \geq 1-x$ et donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$$

En multipliant ces inégalités, on obtient $0 \leq \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \leq \frac{x^n}{1-x}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leq K_n(x) \leq \int_0^x \frac{x^n}{1-x} dx$$

et donc, par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq K_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{1-x}}$$

5. Conclure que la suite $(S_n(x))_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Comme $x \in [0, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$. D'après la question 4. et le théorème des gendarmes, la suite $(K_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite 0. D'après la question 3., on peut donc conclure que :

la suite $(S_n(x))_{n \geq 1}$ est convergente de limite $-\ln(1-x)$

6. Écrire un programme **python** qui renvoie la plus petite valeur de n pour laquelle la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$ approche sa limite à 10^{-8} près.

On a $x = \frac{1}{2} \in [0, 1[$. On sait que la suite $\left(S_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $-\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln(2)$.

```

1 from math import *
2 def approximation() :
3     s = 0
4     n = 0
5     while (abs(s-log(2)) > 10**(-8)) :
6         n = n + 1
7         s = s + 1/(n*2**n)
8     return n

```

On obtient $n = 22$.

Exercice 11 (C4)  On considère la fonction :

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) dt$$

1. Démontrer que f est bien définie sur $]1, +\infty[$.

Pour tout $t \in]1, +\infty[$, on a $\frac{t+1}{t-1} > 0$ (car $t+1 > 0$ et $t-1 > 0$). Par quotient, la fonction $t \mapsto \frac{t+1}{t-1}$ est continue sur $]1, +\infty[$ tandis que la fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $\varphi : t \mapsto \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)$ est continue sur $]1, +\infty[$.

Soit $x \in]1, +\infty[$. Alors $[x, 2x] \subset]1, +\infty[$ donc la fonction φ est continue sur le segment $[x, 2x]$ et donc l'intégrale $f(x)$ est bien définie. Ainsi :

la fonction f est bien définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$

2. (a) Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f'(x) = 2 \ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

La primitive de la fonction (continue) φ sur l'intervalle $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2 (par exemple) est la fonction :

$$F : \begin{cases}]1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_2^x \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) dt \end{cases}$$

On sait que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $F' = \varphi$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \int_2^{2x} \varphi(t) dt - \int_2^x \varphi(t) dt = F(2x) - F(x)$$

Par composition et différence, la fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2 \ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

- (b) Étudier les variations de f sur $]1, +\infty[$.

Soit $x \in]1, +\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned}
 f'(x) \geq 0 &\iff 2 \ln \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right) - \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \geq 0 \\
 &\iff \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \leq \ln \left(\frac{(2x+1)^2}{(2x-1)^2} \right) \\
 &\iff \frac{x+1}{x-1} \leq \frac{(2x+1)^2}{(2x-1)^2} \quad \text{car } u \mapsto e^u \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\
 &\iff (x+1)(2x-1)^2 \leq (x-1)(2x+1)^2 \quad \text{car } x-1 > 0 \text{ et } (2x-1)^2 > 0 \\
 &\iff 4x^3 - 3x + 1 \leq 4x^3 - 3x - 1 \\
 &\iff 1 \leq -1
 \end{aligned}$$

On en déduit donc que la fonction f est (strictement) décroissante sur $]1, +\infty[$.

Exercice 12 (C3-C4)  On définit la fonction numérique f sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t)}{x+t} dt$$

1. (a) Énoncer le théorème sur les sommes de Riemann.

Soit f une fonction continue sur le segment $[0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. La suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx$$

- (b) Proposer une fonction **python** prenant en argument un nombre réel $x > 0$ et retournant une approximation de $f(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout entier naturel n non nul, posons :

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\cos\left(\frac{k}{n}\right)}{x + \frac{k}{n}}$$

Comme la fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{x+t}$ est continue sur $[0, 1]$, on sait d'après le théorème sur les sommes de Riemann que la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $f(x)$. On peut écrire une fonction **python** qui calcule les sommes $S_n(x)$:

```

1 from math import cos
2 def somme(x,n) :
3     s = 0
4     for k in range(1,n+1) :
5         s = s + cos(k/n)/(x+k/n)
6     return s/n

```

Il suffit alors, pour obtenir une approximation de $f(x)$, d'exécuter cette fonction pour une valeur de n assez grande (par exemple $n = 100$).

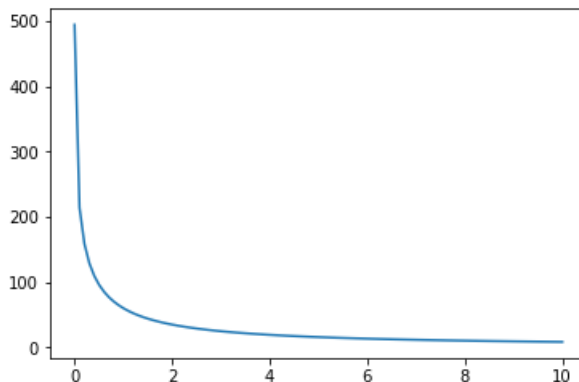
- (c) Proposer une approximation du graphe de la fonction f à l'aide de l'outil informatique. Conjecturer un résultat sur la monotonie de la fonction f et sur les limites au bord de son domaine de définition. Le programme suivant permet de donner une approximation graphique de la courbe représentative de f . On se place ici sur l'intervalle $]0, 10]$.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 x = np.linspace(0.1,10,100)
4 y = somme(x,100)
5 plt.plot(x,y)
6 plt.show

```

On obtient la représentation graphique suivante :



On conjecture que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. Soit $(x, x') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x \leq x'$. Déterminer le signe de $f(x) - f(x')$. En déduire que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $(x, x') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x \leq x'$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$f(x) - f(x') = \int_0^1 \left(\frac{\cos(t)}{x+t} - \frac{\cos(t)}{x'+t} \right) dt = \int_0^1 \frac{(x' - x) \cos(t)}{(x+t)(x'+t)} dt \quad (4)$$

On sait que $x' - x \geq 0$. De plus

$$(x+t)(x'+t) \geq 0$$

pour tout $t \in [0, 1]$ (car x, x' et t sont positifs) et $\cos(t) \geq 0$ (puisque $0 \leq t \leq 1 \leq \pi/2$). Ainsi :

$$\frac{(x' - x) \cos(t)}{(x+t)(x'+t)} \geq 0$$

Par positivité de l'intégrale, il vient $f(x) - f(x') \geq 0$ c'est-à-dire $f(x) \geq f(x')$. Finalement :

$$\forall (x, x') \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x \leq x' \implies f(x) \geq f(x')$$

donc :

la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (et est donc monotone)

3. Justifier que f admet une limite finie en $+\infty$. On ne demande pas de déterminer la valeur de cette limite à ce stade de l'exercice.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\frac{\cos(t)}{x+t} \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale, $f(x) \geq 0$. La fonction f est donc minorée par 0 sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme elle y est de plus décroissante, on peut conclure d'après le théorème de la limite monotone que :

la fonction admet une limite finie en $+\infty$

4. Dans cette question, on cherche à justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit x_0 un nombre réel strictement positif.

(a) Montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty \right[, \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty \right[$. On sait d'après (4) que :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \int_0^1 \frac{(x_0 - x) \cos(t)}{(x+t)(x_0+t)} dt \right| = |x - x_0| \left| \int_0^1 \frac{\cos(t)}{(x+t)(x_0+t)} dt \right| \\ &= |x - x_0| \int_0^1 \frac{\cos(t)}{(x+t)(x_0+t)} dt \end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale et car on a vu à la question 2. que $\int_0^1 \frac{\cos(t)}{(x+t)(x_0+t)} dt \geq 0$.
Soit $t \in [0, 1]$. Alors, par produit de nombres positifs :

$$(x+t)(x_0+t) \geq xx_0 \geq \frac{x_0^2}{2}$$

car $x \geq \frac{x_0}{2}$ et donc, comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$0 \leq \frac{1}{(x+t)(x_0+t)} \leq \frac{2}{x_0^2}$$

De plus, $0 \leq \cos(t) \leq 1$ donc, par produit :

$$\frac{\cos(t)}{(x+t)(x_0+t)} \leq \frac{2}{x_0^2}$$

Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$\int_0^1 \frac{\cos(t)}{(x+t)(x_0+t)} dt \leq \underbrace{\int_0^1 \frac{2}{x_0^2} dt}_{=2/x_0^2}$$

On conclut en multipliant par $|x - x_0| \geq 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty \right[, \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}}$$

- (b) En déduire que f est continue en x_0 .

Soient $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty \right[$. D'après la question 4.(a), on a :

$$-\frac{2|x - x_0|}{x_0^2} \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}$$

et donc :

$$f(x_0) - \frac{2|x - x_0|}{x_0^2} \leq f(x) \leq f(x_0) + \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}$$

Ces inégalités sont valables pour x dans un voisinage de x_0 et :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x_0) \pm \frac{2|x - x_0|}{x_0^2} \right) = f(x_0)$$

donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\text{on a } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ et donc } f \text{ est continue en } x_0}$$

5. Montrer qu'il existe un nombre réel $A > 0$ tel que pour tout nombre réel x strictement positif, on ait :

$$\frac{A}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{A}{x}$$

Ce résultat est-il cohérent avec le graphe de f ? En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [0, 1]$. Alors $x \leq x+t \leq x+1$. Comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient :

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x+t} \leq \frac{1}{x}$$

et, comme $\cos(t) \geq 0$:

$$\frac{\cos(t)}{x+1} \leq \frac{\cos(t)}{x+t} \leq \frac{\cos(t)}{x}$$

On utilise maintenant la croissance et la linéarité de l'intégrale :

$$\frac{1}{x+1} \int_0^1 \cos(t) dt \leq \int_0^1 \frac{\cos(t)}{x+t} dt \leq \frac{1}{x} \int_0^{\cos} (t) dt$$

Or :

$$\int_0^1 \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^1 = \sin(1)$$

Le nombre $A = \sin(1) > 0$ convient. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\sin(1)}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{\sin(1)}{x}}$$

Ceci est cohérent avec le graphe obtenu à la question 1.(b) car ce graphe à la même allure que celui de la fonction inverse (hyperbole).

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En divisant les inégalités précédentes par $\frac{\sin(1)}{x} > 0$, on obtient :

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{xf(x)}{\sin(1)} \leq 1$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)}{\sin(1)} = 1$. Finalement :

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin(1)}{x}}$$

6. Le but de cette question est de déterminer un équivalent simple de f en 0.

(a) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t) - 1}{x + t} dt$$

En admettant l'inégalité :

$$\forall t \in [0, 1], \quad |\cos(t) - 1| \leq \frac{t^2}{2}$$

établir que g est une fonction bornée.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales, on a :

$$|g(x)| \leq \int_0^1 \left| \frac{\cos(t) - 1}{x + t} \right| dt = \int_0^1 \frac{|\cos(t) - 1|}{x + t} dt$$

Soit $t \in]0, 1]$. Alors $x + t \geq t$ car $x \geq 0$ et comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{x + t} \leq \frac{1}{t}$. De plus $|\cos(t) - 1| \leq \frac{t^2}{2}$ donc, par produit :

$$\frac{|\cos(t) - 1|}{x + t} \leq \frac{t}{2}$$

Cette inégalité reste valable pour $t = 0$ car dans ce cas, les deux membres de cette inégalité vaut 0. Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$|g(x)| \leq \int_0^1 \frac{t}{2} dt$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |g(x)| \leq \frac{1}{4}$$

Finalement :

la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$

(b) En déduire un équivalent simple de f en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \frac{\cos(t) - 1}{x + t} dt + \int_0^1 \frac{1}{x + t} dt = g(x) + [\ln(x + t)]_0^1 \\ &= g(x) + \ln(x + 1) - \ln(x) \end{aligned}$$

et donc, si $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

$$\frac{f(x)}{-\ln(x)} = \frac{g(x)}{-\ln(x)} + \frac{\ln(1 + x)}{-\ln(x)} + 1$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + x)}{-\ln(x)} = 0$. De plus, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $-\frac{1}{4} \leq g(x) \leq \frac{1}{4}$ donc, pour tout $x \in]0, 1[$, on a puisque $-\ln(x) > 0$:

$$\frac{1}{4\ln(x)} \leq \frac{g(x)}{-\ln(x)} \leq \frac{1}{-4\ln(x)}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pm 4\ln(x)} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{-\ln(x)} = 0$ d'après le théorème des gendarmes. Finalement,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{-\ln(x)} = 1$ et donc :

$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$