Fiche de révision 9
Primitives et intégration

1 Compétences et notions à maîtriser

- ▷ C1 : Calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, déterminer une primitive et utiliser le théorème fondamental de l'analyse
- ▷ C2 : Intégrer par parties, effectuer un changement de variables
- ▷ C3 : Utiliser le théorème relatif au sommes de Riemann
- ▷ C4 : Utiliser les propriétés des intégrales : relation de Chasles, linéarité de l'intégrale, positivité de l'intégrale, croissance de l'intégrale (avec des bornes *dans le bon sens*)

2 Rappels de cours

2.1 Primitive d'une fonction continue

La fonction $\boldsymbol{F}$ **est une primitive de** la fonction $\boldsymbol{f}$ si F est dérivable et si

$$\boldsymbol{F' = f}.$$

Théorème 2.1.1 Si $\boldsymbol{f}$ est **une fonction continue sur** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ alors f **admet une primitive** F sur $[a, b]$.

Théorème 2.1.2 Si f admet une primitive F sur un intervalle I, alors **l'ensemble des primitives** est :

$$\boldsymbol{\{x \mapsto F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}}.$$

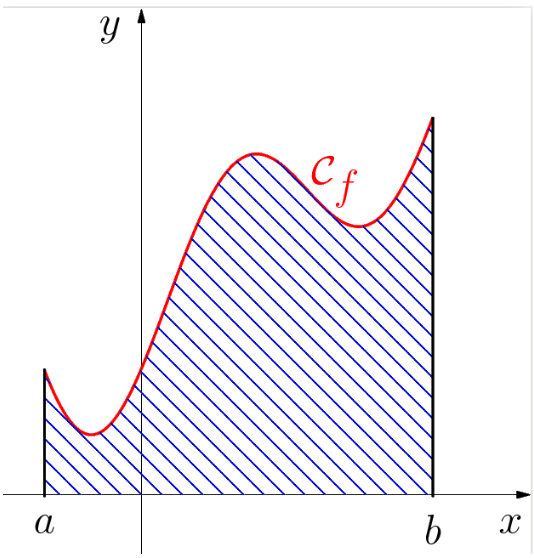
2.2 Intégrale d'une fonction continue

Soit $\boldsymbol{f}$ **continue sur** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ **de primitive** $\boldsymbol{F}$. On définit :

$$\boldsymbol{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b}$$

Théorème 2.2.1

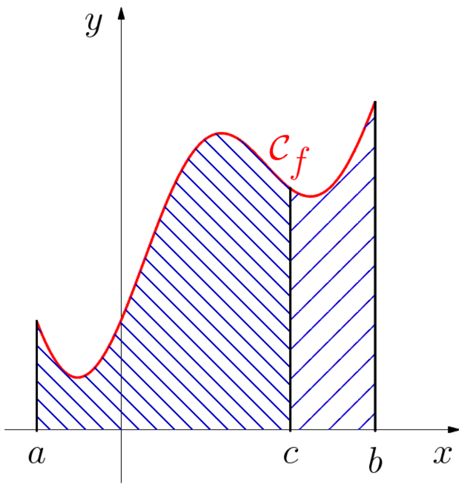
Soit f continue sur $[a, b]$.
$\boldsymbol{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$ représente **l'aire délimitée par la courbe de** $\boldsymbol{f}$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$.



Théorème 2.2.2 (Relation de Chasles)

Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ et que $c \in [a, b]$, alors on a la **relation de Chasles** :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$



Théorème 2.2.3 (Linéarité de l'intégrale)
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'intégration est **linéaire**, c'est-à-dire que :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Théorème 2.2.4 (Positivité de l'intégrale) Si f est continue sur $[a, b]$ et **positive** sur $[a, b]$, alors

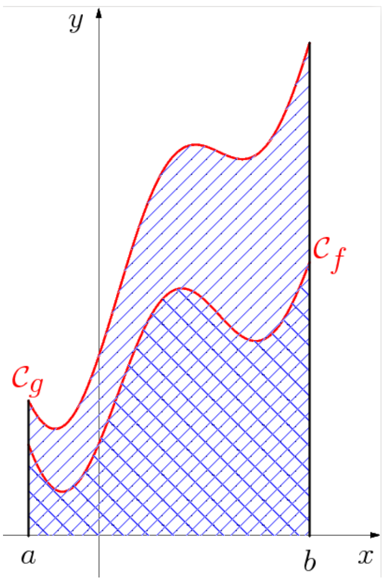
$$\int_a^b f(t)\,dt \geq 0.$$

Théorème 2.2.5 (Croissance de l'intégrale) Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, telles que

$$\forall x \in [a, b],\ f(x) \leq g(x),$$

alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$



Théorème 2.2.6 (Intégrale et valeur absolue) Pour tout f continue sur $[a, b]$ avec $a < b$, on a :

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

2.3 Techniques de calcul d'intégrales

Théorème 2.3.1 (Intégration par parties)
Soient f et g deux fonctions $\mathcal{C}^1([a,b])$. Alors

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)\ g'(x)\ \mathrm{d}x = [f(x)\ g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\ g(x)\ \mathrm{d}x}.$$

Pour simplifier les calculs d'intégrales en utilisant une IPP :

- si on a une expression de type $P(x) \times e^x$, $P(x) \times \sin(x)$ ou $P(x) \times \cos(x)$ à intégrer, avec P un polynôme, on dérive le polynôme pour diminuer son degré et se ramener à une expression plus simple.
- si on a une expression de type $\ln(x) \times f(x)$ à intégrer, avec f une fonction quelconque, on dérive le ln.
- si on a une expression du type $f(x)$ à intégrer et qu'on ne connaît pas de primitive de f, on peut la voir comme $1 \times f(x)$, intégrer la fonction 1 et dériver f.

Théorème 2.3.2 (Changement de variables) Soit $\boldsymbol{f}$ **continue** sur $[a,b]$ et $\boldsymbol{\varphi}$ une fonction strictement monotone et $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$. Effectuer le changement de variables $\boldsymbol{x = \varphi(t)}$ dans l'intégrale revient à écrire :

$$\int_a^b \boldsymbol{f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

2.4 Calcul de primitives

Théorème 2.4.1 (Lien entre primitives et intégrales)
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors **la primitive de $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{[a,b]}$ s'annulant en $\boldsymbol{a}$** est :

$$\boldsymbol{F(x) = \int_a^x f(x)\ \mathrm{d}x}.$$

Proposition 2.4.2 (Primitives usuelles)

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

$f(x)$	$F(x)$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$
$u'e^u$	e^u
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$

2.5 Sommes de Riemann

Théorème 2.5.1 Soit $\boldsymbol{f}$ **continue** sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. On a :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

3 Exercices

Exercice 1 (C1-C2) Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur un ensemble à déterminer :

1. $f : x \longmapsto \tan(x)$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{\arctan(x)}{1+x^2}$
3. $f : x \longmapsto \sqrt[3]{x+1}$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{1+\tan(\ln(x))^2}{x}$
5. $f : x \longmapsto \tan(x)^2$
6. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{3x^2+4}}$
7. $f : x \longmapsto \sin(x)\cos(2x)$
8. $f : x \longmapsto (2x+1)\,\mathrm{e}^{3x}$
9. $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$
10. $f : x \longmapsto \arctan(x)$
11. $f : x \longmapsto \ln(1+x^2)$
12. $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$

Exercice 2 (C1) On considère la fonction f d'expression $f(x) = \dfrac{3x^2+x-2}{x^3-x^2+x-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \qquad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

3. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3 (C1-C2) Calculer les intégrales suivantes :

1. $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\mathrm{J} = \displaystyle\int_{-1}^1 x\arctan(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^\pi \cos(2x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x$
4. $\mathrm{L} = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\,\mathrm{d}x$
5. $\mathrm{M} = \displaystyle\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,\mathrm{d}x$
6. $\mathrm{N} = \displaystyle\int_0^\pi \cos(x)^2\,\mathrm{d}x$
7. $\mathrm{O} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}\,\mathrm{d}x$
8. $\mathrm{P} = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} (t+1)\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$
9. $\mathrm{Q} = \displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{1}{\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ en posant $x = \mathrm{e}^{t}$
10. $\mathrm{R} = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \sqrt{\mathrm{e}^{x}-1}\,\mathrm{d}x$ en posant $u = \sqrt{\mathrm{e}^{x}-1}$
11. $\mathrm{S} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)^2}}\,\mathrm{d}x$
12. $\mathrm{T} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)^3\cos(x)^5\,\mathrm{d}x$ en posant $t = \sin(x)$
13. $\mathrm{U} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$
14. En déduire $\mathrm{V} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$.

Indication : pour l'intégrale U, commencer par mettre x^2-x+1 sous forme canonique.

Exercice 4 (C3) Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}$
5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n\sqrt{n^2-\frac{k^2}{4}}}$
6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n+k}$

Exercice 5 (C1-C2-C4) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$W_n=\int_0^{\pi/2}\cos(t)^n\,\mathrm{d}t$$

1. En utilisant un changement de variable affine, montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad W_n=\int_0^{\pi/2}\sin(t)^n\,\mathrm{d}t$$
2. Calculer W_0 et W_1.
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n$$
4. En déduire que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad W_{2n}=\frac{(2n)\,!}{2(2^n n\,!)^2}\qquad\text{et}\qquad W_{2n+1}=\frac{(2^n n\,!)^2}{(2n+1)\,!}$$
5. Montrer alors que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad (n+1)W_{n+1}W_n=\frac{\pi}{2}$$
6. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.
7. Établir que :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \frac{\pi}{2}\leqslant(n+1)W_n^2\leqslant\frac{\pi(n+1)}{2n}$$
En déduire un équivalent de W_n quand n tend vers $+\infty$.
8. Déduire de ce qui précède un équivalent de $\displaystyle\binom{2n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 (C1-C2-C4) Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan(t)^n\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier, pour tout entier naturel n, l'existence de I_n.
2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} en calculant $\mathrm{I}_n+\mathrm{I}_{n+2}$.
   (b) Calculer I_0 et I_1. En déduire I_2 et I_3.
   (c) Écrire une fonction `python` qui prend en entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de I_n.
3. Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 7 (C1-C2-C4) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{5+4\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\mathrm{I}_n| \leqslant \pi$.
2. Dans cette question, on souhaite calculer l'intégrale I_0.
   (a) Montrer que :
   $$\forall (a, X) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad \int_0^X \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{X}{a}\right)$$
   (b) Montrer que pour tout $t \in [0, \pi[$, on a l'égalité $\cos(t) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ où $x = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
   (c) En déduire une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{5+4\cos(t)}$ sur l'intervalle $[0, \pi[$ en utilisant le changement de variable $x = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
   (d) Justifier que $\mathrm{I}_0 = \displaystyle\lim_{x \to \pi^-} \int_0^x \frac{1}{5+4\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ et en déduire que $\mathrm{I}_0 = \dfrac{\pi}{3}$.
3. Calculer $\mathrm{I}_1 + \dfrac{5}{4}\mathrm{I}_0$ et en déduire la valeur de I_1.
4. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{I}_{n+2} + \mathrm{I}_n = -\frac{5}{2}\,\mathrm{I}_{n+1}$$
5. En déduire la valeur de I_n pour tout entier naturel n.

Exercice 8 (C3) On considère la fonction :

$$f : x \longmapsto \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x\sin(t)}\,\mathrm{d}t$$

et on pose :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, \qquad \mathrm{S}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-x\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

1. (a) Écrire une fonction `somme` de paramètres x et n permettant de calculer $\mathrm{S}_n(x)$.
   (b) Écrire un programme qui affiche le graphe de la fonction S_n sur un intervalle $[a, b]$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(\mathrm{S}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite en fonction de $f(x)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction S_n est dérivable en 0 et exprimer $\mathrm{S}_n'(0)$ sous forme d'une somme. Trouver une expression condensée de $\mathrm{S}_n'(0)$ et calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$.
4. (a) Montrer que :
   $$\forall u \in]-\infty, 0], \qquad 0 \leqslant \mathrm{e}^{u} - 1 - u \leqslant \frac{u^2}{2}$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall x > 0,\ \forall t \in [0, \pi], \qquad 0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x\sin(t)} - 1}{x} + \sin(t) \leqslant \frac{1}{2}x\sin(t)^2$$
   (c) En déduire que f est dérivable en à droite en 0 et que le nombre dérivée à droite de f en 0 vaut -2.

Exercice 9 (C4) On note E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction $\Phi(f)$ par :

$$\forall x \in [0,1], \qquad \Phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1], \qquad \Phi(f)(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
3. (a) Soit $f \in E$. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et que $\Phi(f)'' = -f$.
   (b) En déduire le noyau de Φ.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$
   (a) Soit $f \in E$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
      (i) $f \in \mathrm{Ker}(\Phi - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$;
      (ii) f est deux fois dérivable sur $[0,1]$, $f(0) = f'(1) = 0$ et $\lambda f'' + f = 0$.
   (b) En déduire $\mathrm{Ker}(\Phi - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 10 (C1-C2-C4) Soit $x \in [0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathrm{K}_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

1. Calculer $\mathrm{K}_0(x)$ et $\mathrm{K}_1(x)$.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{K}_n(x) = \mathrm{K}_{n-1}(x) - \frac{x^n}{n}$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{S}_n(x) = -\ln(1-x) - \mathrm{K}_n(x)$.
4. Montrer que pour tout $t \in [0,x]$, on a $\dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \mathrm{K}_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

5. Conclure que la suite $(\mathrm{S}_n(x))_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.
6. Écrire un programme `python` qui renvoie la plus petite valeur de n pour laquelle la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$ approche sa limite à 10^{-8} près.

Exercice 11 (C4) On considère la fonction :

$$f : x \longmapsto \int_x^{2x} \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que f est bien définie sur $]1,+\infty[$.
2. (a) Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f'(x) = 2\ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

   (b) Étudier les variations de f sur $]1,+\infty[$.

Exercice 12 (C3-C4) On définit la fonction numérique f sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

1. (a) Énoncer le théorème sur les sommes de Riemann.
   (b) Proposer une fonction `python` prenant en argument un nombre réel $x > 0$ et retournant une approximation de $f(x)$.
   (c) Proposer une approximation du graphe de la fonction f à l'aide de l'outil informatique. Conjecturer un résultat sur la monotonie de la fonction f et sur les limites au bord de son domaine de définition.
2. Soit $(x, x') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x \leqslant x'$. Déterminer le signe de $f(x) - f(x')$. En déduire que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Justifier que f admet une limite finie en $+\infty$. *On ne demande pas de déterminer la valeur de cette limite à ce stade de l'exercice.*
4. Dans cette question, on cherche à justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit x_0 un nombre réel strictement positif.
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[, \qquad |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}$$
   (b) En déduire que f est continue en x_0.
5. Montrer qu'il existe un nombre réel $A > 0$ tel que pour tout nombre réel x strictement positif, on ait :
   $$\frac{A}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{A}{x}$$
   Ce résultat est-il cohérent avec le graphe de f ? En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.
6. Le but de cette question est de déterminer un équivalent simple de f en 0.
   (a) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{\cos(t) - 1}{x+t}\,\mathrm{d}t$$
   En admettant l'inégalité :
   $$\forall t \in [0,1], \qquad |\cos(t) - 1| \leqslant \frac{t^2}{2}$$
   établir que g est une fonction bornée.
   (b) En déduire un équivalent simple de f en 0.