Devoir maison 3

Ce DM est à faire en deux étapes :

1. **comme un DS de 2h, seul, d'une seule traite et sans document**
2. **avec un stylo d'une autre couleur, corriger et compléter le travail comme pour un DM, en ayant accès au cours, au TD, en posant des questions par mail, etc**

Exercice 1.

On dispose d'une pièce de monnaie amenant *pile* avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et *face* avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Partie I - Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de *face* avant l'obtention du deuxième *pile*. Par exemple, l'enchaînement FFPFFFP... est tel que $X = 5$.

1. (a) Décrire les événements $(X = 0)$, $(X = 1)$ et $(X = 2)$ puis calculer leurs probabilités.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{P}(X = n) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$$
   (c) Déterminer, si elle existe, l'espérance de X.

Partie II - Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième *pile*. Puis, en fonction du nombre n de *face* obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher. Enfin, on pioche une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de *face* obtenus, et U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule choisie. On pose $V = X - U$.

2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.
   (b) Déterminer, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, la probabilité conditionnelle
   $$\mathrm{P}(U = k \,|\, X = n).$$
   (c) En déduire que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{P}(U = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\,\mathrm{P}(X = n) \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{P}(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}$$
   (d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.
3. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire V.
   (b) Déterminer, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, la probabilité conditionnelle
   $$\mathrm{P}(V = k \,|\, X = n).$$
   (c) En déduire la loi de V.
4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes, c'est-à-dire que :
   $$\forall (k, \ell) \in U(\Omega) \times V(\Omega), \qquad \mathrm{P}\big((U = k) \cap (V = \ell)\big) = \mathrm{P}(U = k)\,\mathrm{P}(V = \ell)$$

Partie III - Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un nombre réel de l'intervalle $]0, 1[$.
Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de *pile* ou *face* dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant *pile* avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième *pile* ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de *face* alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant *pile* avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un *pile* ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de *face* alors obtenus ;
- les lancers de pièces des joueurs A et B sont indépendants ;
- le joueur A gagne si son nombre de *face* obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

5. **Étude de la variable aléatoire** Y

   (a) Déterminer la loi de Y. On s'aidera des évènements B_k : « Le lancer k effectué par le joueur B amène *pile* » définis pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{P}(Y \geqslant n) = (1-p)^n$$

6. En utilisant le système quasi-complet d'événements associé à la variable aléatoire X, montrer que :
$$\mathrm{P}(X \leqslant Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = n)\,\mathrm{P}(Y \geqslant n)$$

7. Déduire des résultats précédents l'égalité :
$$\mathrm{P}(X \leqslant Y) = \frac{4}{(2+p)^2}$$

8. Déterminer la valeur de p pour que le jeu soit équilibré.

Exercice 2.

On s'intéresse à la résolution du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = a - cm \\ \dfrac{dp}{dt} = bm - dp \end{cases} \tag{1}$$

où $(a,b,c,d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$ tel que $c \neq d$ et $(m,p) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On pose $m_0 = m(0)$ et $p_0 = p(0)$.

Partie I - On considère dans cette partie que

$$b = 1, \quad c = 1, \quad d = 2$$

et on cherche à trouver les solutions du système différentiel (1) qui est devenu

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = a - m \\ \dfrac{dp}{dt} = m - 2p \end{cases} \tag{2}$$

1. Montrer que (m,p) une solution de (2) si et seulement si $(m, -m+p)$ est une solution du système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = -z_1 + a \\ \dfrac{dz_2}{dt} = -2z_2 - a. \end{cases} \tag{3}$$

2. Résoudre chacune des équations du système différentiel (3).
3. En déduire les solutions de (2).

Partie II - On revient à l'étude générale du système différentiel (1).

4. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = a - cm \\ m(0) = m_0 \end{cases} \tag{4}$$

5. Calculer la limite m_∞ de $m(t)$ quand t tend vers l'infini.
6. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de m en zéro.
7. Tracer l'allure de la fonction m sur $[0, +\infty[$ dans le cas où $m_0 > \dfrac{a}{c}$ et dans le cas où $m_0 < \dfrac{a}{c}$.
8. (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène $\dfrac{dp}{dt} + dp = 0$.
   (b) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $\dfrac{dp}{dt} = bm - dp$ sous la forme $y_p : t \mapsto Ae^{-ct} + B$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
   (c) En déduire l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = bm - dp \\ p(0) = p_0 \end{cases} \tag{5}$$

9. Calculer la limite p_∞ de $p(t)$ quand t tend vers l'infini.