Correction du devoir surveillé 2 (4h - Calculatrice interdite)

Exercice 1.

Partie I - Un premier tournoi d'échecs : probabilité de gagner après un grand nombre de parties

Magnus participe à un tournoi d'échecs. Il enchaîne les parties contre des adversaires différents. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, les situations possibles sont :

— G_n : « Magnus gagne le match numéro n » de probabilité a_n,

— P_n : « Magnus perd le match numéro n » de probabilité b_n,

— N_n : « Magnus fait match nul numéro n » de probabilité c_n.

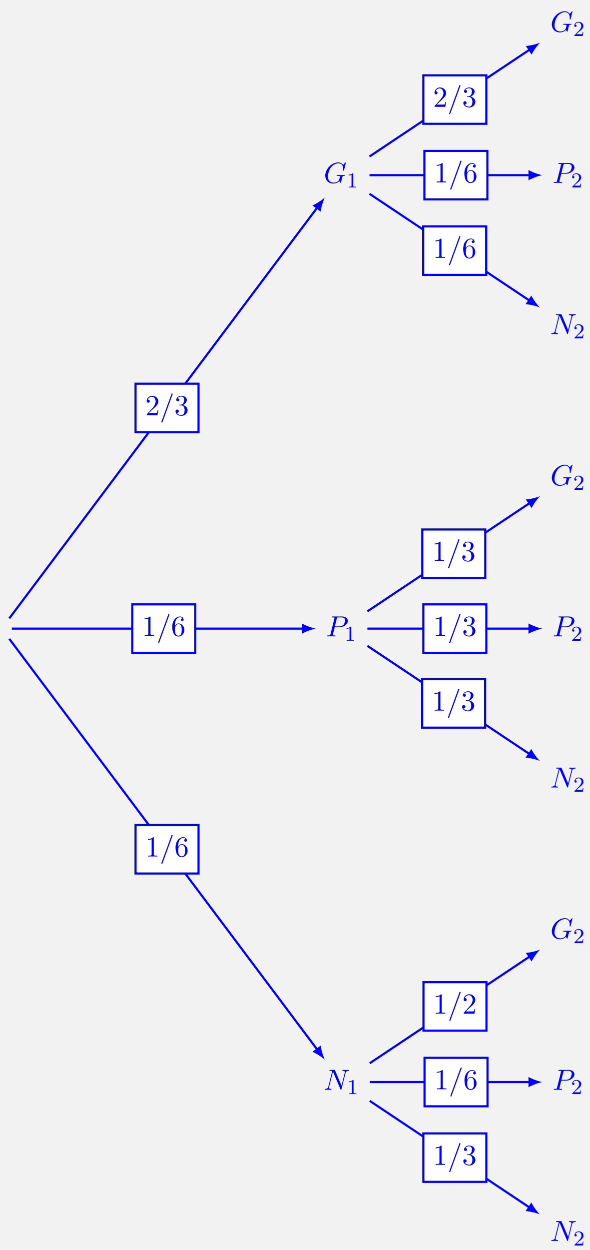
Aux échecs, comme partout, l'état d'esprit du joueur influence ses chances de succès. Ainsi, si Magnus gagne une partie, il a au match suivant une probabilité $\frac{2}{3}$ de gagner, $\frac{1}{6}$ de perdre et $\frac{1}{6}$ de faire match nul. Si Magnus perd une partie, il a au match suivant autant de chances de gagner que de perdre ou de faire match nul. Si Magnus fait match nul à une partie, il a au match suivant une probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner, $\frac{1}{6}$ de perdre et $\frac{1}{3}$ de faire match nul.
On suppose que Magnus commence sa journée de tournoi avec un esprit positif, comme s'il venait de gagner un match.

1. D'après l'énoncé, que valent a_1, b_1 et c_1 ?

D'après l'énoncé, Magnus commence sa journée comme s'il venait de gagner un match donc $\boxed{a_1 = \frac{2}{3},\ b_1 = \frac{1}{6} \text{ et } c_1 = \frac{1}{6}}$.

2. Montrer que $a_2 = \frac{7}{12}$ et $b_2 = \frac{7}{36}$.

La situation initiale peut être représentée par l'arbre suivant, les probabilités conditionnelles étant indiquées dans l'énoncé. En particulier, comme en cas de défaite, il y a équiprobabilité entre le gain, la défaite et le match nul à la partie suivante, les probabilités conditionnelles associées valent $\frac{1}{3}$.



On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (G_1, P_1, N_1). On obtient :

$$\begin{aligned}
a_2 = P(G_2) &= P(G_1 \cap G_2) + P(P_1 \cap G_2) + P(N_1 \cap G_2) \\
&= P(G_1)P_{G_1}(G_2) + P(P_1)P_{P_1}(G_2) + P(N_1)P_{N_1}(G_2) \\
&\text{par formules des probabilités composées} \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

De même, on obtient :

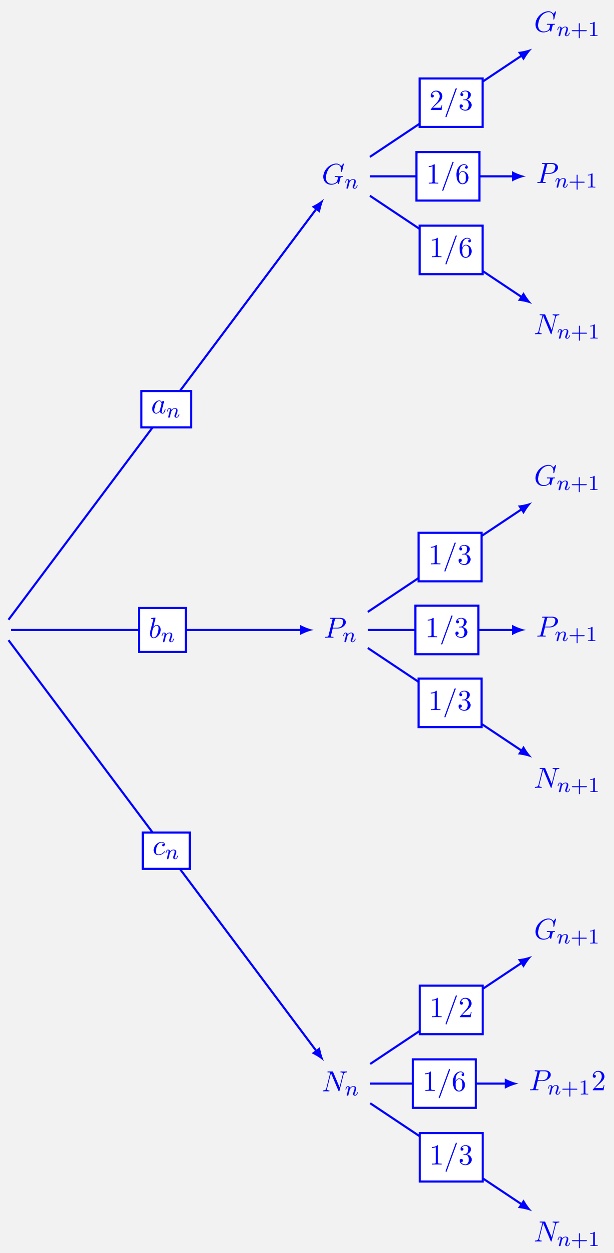
$$\begin{aligned}
b_2 = P(P_2) &= P(G_1 \cap P_2) + P(P_1 \cap P_2) + P(N_1 \cap P_2) \\
&= P(G_1)P_{G_1}(P_2) + P(P_1)P_{P_1}(P_2) + P(N_1)P_{N_1}(P_2) \\
&\text{par formules des probabilités composées} \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{7}{36}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a trouvé $\boxed{a_2 = \frac{7}{12} \text{ et } b_2 = \frac{7}{36}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$, montrer que

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$ fixé. La situation aux parties n et $n+1$ peut être représentée par l'arbre suivant.



On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (G_n, P_n, N_n). On obtient :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} = P(G_{n+1}) &= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(P_n \cap G_{n+1}) + P(N_n \cap G_{n+1}) \\
&= P(G_n)P_{G_n}(G_{n+1}) + P(P_n)P_{P_n}(G_{n+1}) + P(N_n)P_{N_n}(G_{n+1}) \\
&\text{par formules des probabilités composées} \\
&= a_n \times \frac{2}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n
\end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} = P(P_{n+1}) &= P(G_n \cap P_{n+1}) + P(P_n \cap P_{n+1}) + P(N_n \cap P_{n+1}) \\
&= P(G_n)P_{G_n}(P_{n+1}) + P(P_n)P_{P_n}(P_{n+1}) + P(N_n)P_{N_n}(P_{n+1}) \\
&\text{par formules des probabilités composées} \\
&= a_n \times \frac{1}{6} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n
\end{aligned}$$

Ainsi, on a trouvé $\boxed{a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, quelle relation relie a_n, b_n et c_n ? En déduire l'expression de c_n en fonction de a_n et b_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. À la partie numéro n, Magnus gagne, perd ou fait match nul, donc (G_n, P_n, N_n) forme un système complet d'évènements. On a donc :

$$\boxed{a_n + b_n + c_n = 1 \iff c_n = 1 - a_n - b_n}.$$

5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $b_{n+1} = \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a montré en question 3 :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n \\
&= \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6}(1 - a_n - b_n) \text{ par question 4} \\
&= \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}a_n - \frac{1}{6}b_n \\
&= \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}}$.

(b) En déduire l'expression de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.

La suite (b_n) est une suite arithmético-géométrique.

— On commence par déterminer le point fixe α, solution de l'équation :

$$\begin{aligned}
\alpha = \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6} &\iff 6\alpha = \alpha + 1 \\
&\iff 5\alpha = 1 \\
&\iff \boxed{\alpha = \frac{1}{5}}.
\end{aligned}$$

— On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\boxed{v_n = b_n - \alpha = b_n - \frac{1}{5}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on calcule :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= b_{n+1} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{6}\left(v_n + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{30} \\ &= \frac{1}{6}v_n \end{aligned}$$

La suite $\boxed{(v_n) \text{ est donc géométrique de raison } q = \frac{1}{6}}$ et de premier terme

$$\begin{aligned} \boxed{v_1} &= b_1 - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{5} \\ &\boxed{= -\frac{1}{30}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star,\ v_n = -\frac{1}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}}$.

— On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\boxed{b_n = v_n + \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}}.$$

6. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = a_n - \frac{14}{25}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{36}u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$u_n = a_n - \frac{14}{25}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - \frac{14}{25} \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n - \frac{14}{25} \text{ par question 3} \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}(1 - a_n - b_n) - \frac{14}{25} \text{ par question 4} \\ &= \frac{1}{6}a_n - \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{2} - \frac{14}{25} \\ &= \frac{1}{6}\left(u_n + \frac{14}{25}\right) - \frac{1}{6}b_n - \frac{3}{50} \\ &= \frac{1}{6}u_n - \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{30} \end{aligned}$$

On remarque au passage que cette égalité peut se réécrire :

$$-\frac{1}{6}b_n = u_{n+1} - \frac{1}{6}u_n - \frac{1}{30}(*).$$

On obtient finalement, pour u_{n+2} :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{1}{6}u_{n+1} - \frac{1}{6}b_{n+1} + \frac{1}{30} \\
&= \frac{1}{6}u_{n+1} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{30} \\
&= \frac{1}{6}u_{n+1} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{6}b_n\right) - \frac{1}{36} + \frac{1}{30} \\
&= \frac{1}{6}u_{n+1} + \frac{1}{6}\left(u_{n+1} - \frac{1}{6}u_n - \frac{1}{30}\right) + \frac{1}{180} \text{ par } (*) \\
&= \frac{1}{6}u_{n+1} + \frac{1}{6}u_{n+1} - \frac{1}{36}u_n - \frac{1}{180} + \frac{1}{180} \\
&= \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{36}u_n
\end{aligned}$$

donc on a montré l'égalité $\boxed{u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{36}u_n}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \left(\frac{1}{5}n + \frac{11}{25}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2.

— On résout l'équation caractéristique :

$$r^2 - \frac{1}{3}r + \frac{1}{36} = 0.$$

Le discriminant associé vaut : $\Delta = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 4 \times 1 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 0$.

La racine double associée est donc $x_0 = \frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$.

— Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = (An + B)\left(\frac{1}{6}\right)^n}.$$

— On détermine A et B en utilisant les premières valeurs de la suite (u_n). On a :

$$\begin{aligned}
u_1 &= a_1 - \frac{14}{25} = \frac{2}{3} - \frac{14}{25} = \frac{8}{75} \\
u_2 &= a_2 - \frac{14}{25} = \frac{7}{12} - \frac{14}{25} = \frac{7}{300}
\end{aligned}$$

On résout donc le système suivant :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} u_1 &= \dfrac{A+B}{6} \\ u_2 &= \dfrac{2A+B}{36} \end{cases}
&\iff \begin{cases} \dfrac{16}{25} &= A + B \\ \dfrac{21}{25} &= 2A + B \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} A &= \dfrac{21}{25} - \dfrac{1}{6}25 \text{ par } L_2 - L_1 \\ B &= \dfrac{16}{25} - A \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} A &= \dfrac{1}{5} \\ B &= \dfrac{11}{25} \end{cases}
\end{aligned}$$

donc on a obtenu $\boxed{u_n = \left(\frac{1}{5}n + \frac{11}{25}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n}$.

(c) De quelle nature est la série de terme général u_n ? En cas de convergence, déterminer la valeur de sa somme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5}k + \frac{11}{25}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^k \\ &= \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{6}\right)^k + \frac{11}{25}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^k \\ &= \frac{1}{5}\times\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} + \frac{11}{25}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^k - 1\right) \end{aligned}$$

On reconnaît une somme partielle de série géométrique dérivée première et une somme partielle de série géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$. Comme $-1 < q < 1$, ces sommes partielles sont convergentes, donc (S_n) converge, donc $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge}}$.
De plus, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k &= \lim_{n\to+\infty} S_n \\ &= \frac{1}{30}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{6}\right)^2} + \frac{11}{25}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{6}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{30}\frac{6^2}{5^2} + \frac{11}{25}\left(\frac{6}{5} - 1\right) \\ &= \frac{36}{30\times 25} + \frac{11}{5\times 25} \\ &= \frac{36 + 11\times 6}{750} \\ &= \frac{102}{750} \\ &= \frac{17}{125} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{17}{125}}$.

7. Déduire de la question 6 l'expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\boxed{a_n = u_n + \frac{14}{25} = \left(\frac{1}{5}n + \frac{11}{25}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{14}{25}}$.

8. En déduire l'expression de c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.

D'après la question 4, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned} c_n &= 1 - a_n - b_n \\ &= 1 - \left(\frac{1}{5}n + \frac{11}{25}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{14}{25} + \frac{1}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{6}{25} - \left(\frac{1}{5}n + \frac{11}{25}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \frac{6}{25} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}n - \frac{11}{25}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \frac{6}{25} + \left(-\frac{1}{5}n - \frac{6}{25}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \frac{6}{25} - \left(\frac{1}{5}n + \frac{6}{25}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $\boxed{c_n = \frac{6}{25} - \left(\frac{1}{5}n + \frac{6}{25}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n}$.

9. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n). Interprêter le résultat.

Comme $-1 < \frac{1}{6} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$. De plus, par croissances comparées, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$. On en déduit :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{14}{25}, \ \lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{1}{5}, \ \lim_{n \to +\infty} c_n = \frac{6}{25}}.$$

Ainsi, pour un numéro de partie très élevé, la probabilité pour Magnus de gagner sera de $\frac{14}{25}$, sa probabilité de perdre sera de $\frac{1}{5}$ et sa probabilité de match nul sera de $\frac{6}{25}$.

Partie II - Un deuxième tournoi d'échecs : probabilité de gagner toutes les parties

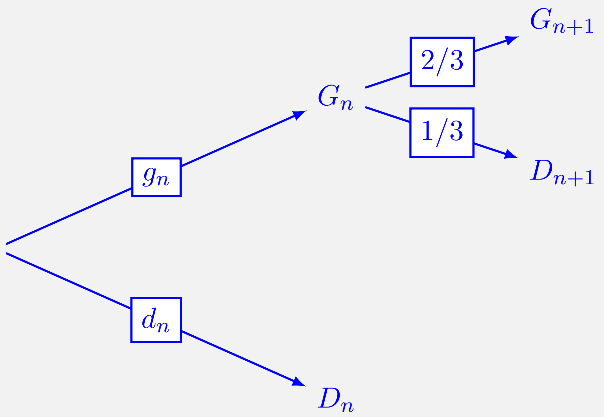
Magnus vise maintenant un championnat spécial. Pour le remporter, il doit participer à un tournoi dans lequel il ne joue une partie que s'il a remporté la précédente. Autrement dit, toute défaite ou tout match nul entraîne sa disqualification définitive. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, les situations possibles sont :

- G_n : « Magnus joue le match numéro n et le gagne » de probabilité g_n,
- D_n : « Magnus est disqualifé avant le match numéro n ou pendant le match numéro n » de probabilité d_n.

Les perfomances de Magnus d'une partie à l'autre restent les mêmes qu'au tournoi précédent, son état d'esprit initial aussi.

10. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $g_{n+1} = \dfrac{2}{3} g_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a d'après l'énoncé la situation suivante :



On considère le système complet d'évènements (G_n, D_n) et on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} g_{n+1} = P(G_{n+1}) &= P(G_{n+1} \cap G_n) + P(G_{n+1} \cap D_n) \\ &= P(G_n) P_{G_n}(G_{n+1}) + 0 \\ &\text{par formule des probabilités composées et évènement impossible} \\ &= g_n \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} g_n \end{aligned}$$

donc $\boxed{g_{n+1} = \dfrac{2}{3} g_n}$.

(b) En déduire l'expression de g_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.

On a montré à la question précédente $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $g_{n+1} = \dfrac{2}{3} g_n$. La suite (g_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $g_1 = \dfrac{2}{3}$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ g_n = g_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

11. On suppose qu'un très grand nombre de compétiteurs participe à ce championnat, tellement grand qu'on va l'assimiler à l'infini. On cherche à déterminer la probabilité que Magnus remporte ce championnat.

   (a) Démontrer que la suite (G_n) est une suite décroissante d'évènements.

   On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $G_{n+1} = G_n \cap$ « Gagner le match numéro $n+1$ » donc $\boxed{G_{n+1} \subset G_n}$.

   (b) En déduire la probabilité que Magnus gagne ce championnat.

   On applique le théorème de la limite décroissante pour les probabilités :

$$\begin{aligned} P(G_\infty) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} g_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= 0 \text{ car } -1 < \frac{2}{3} < 1. \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité que Magnus gagne ce championnat est nulle}}$.

Partie III - Un dernier tournoi d'échecs : probabilité de gagner au moins une partie

Magnus s'est entraîné et ne se laisse plus influencer par ses résultats aux partie précédentes. Pour tous les matchs, sa probabilité de gagner vaut $\frac{2}{3}$. Il participe à un tournoi lors duquel il enchaîne les parties contre des adversaires différents, indépendamment de l'issue du match précédent.

— G_n : « Magnus gagne le match numéro n » de probabilité $p = \frac{2}{3}$.

— V_n : « Magnus gagne pour la première fois un match lors de la partie numéro n » de probabilité v_n.

— W_n : « Magnus gagne au moins un match lors des n premières parties » de probabilité w_n.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer V_n en fonction de $G_1, \ldots, G_n$ et leurs complémentaires.

   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, V_n signifie que Magnus gagne pour la première fois au match numéro n, donc Magnus a perdu ou fait match nul aux $n-1$ premières parties, puis il a gagné la $n^{\text{ième}}$ partie :

$$\boxed{V_n = \overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \ldots \cap \overline{G_{n-1}} \cap G_n}.$$

13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $v_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\begin{aligned} v_n = P(V_n) &= P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \ldots \cap \overline{G_{n-1}} \cap G_n) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{G_k})\right) \times P(G_n) \text{ par indépendance mutuelle des parties} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)\right) \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

donc $\boxed{v_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$.

14. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'expression de w_n en fonction de n.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $W_n = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$. Les évènements $V_1, \ldots, V_n$ étant disjoints, on obtient :

$$\begin{aligned} w_n = P(W_n) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n} V_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(V_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \quad \text{par la question précedente} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \quad \text{par somme des termes d'une suite géométrique} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

donc $\boxed{w_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

15. (a) Montrer que (W_n) est une suite croissante d'évènements.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a montré que $W_n = \bigcup_{k=1}^{n} V_k$ et $W_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} V_k$ donc

$$W_{n+1} = W_n \cup V_{n+1},$$

donc $\boxed{W_n \subset W_{n+1}}$. La suite (W_n) est donc une suite croissante d'évènements.

(b) En déduire la probabilité pour Magnus de gagner au moins une fois s'il joue une infinité de parties.

Par théorème de la limite croissante des probabilités, on en déduit :

$$\begin{aligned} P(W_\infty) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} W_k\right) \\ &= \lim_{k\to+\infty} P(W_k) \\ &= \lim_{k\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Magnus est presque-sûr de gagner au moins une fois lors de ce tournoi}}$.

Exercice 2.

Partie I - Un premier exemple

Dans cette partie, on pose $\alpha > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ une suite de réels.

On admet que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k,$$

qui tend vers 0.

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k},$$

qui tend vers 0.

1. (a) Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier que :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$$

Soit $k \geqslant 2$.
Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a $t \geqslant k$, d'où, puisque $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est décroissante donc

$$\frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}.$$

Par croissance de l'intégrale on en déduit :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t \iff \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha}(k+1-k)$$
$$\iff \boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha}}$$

De même, pour $t \in [k-1, k]$ on a $t \leqslant k$, d'où $\dfrac{1}{t^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$.
Par croissance de l'intégrale on en déduit :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t \iff \boxed{\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{k^\alpha}}$$

Finalement on a bien

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t}$$

(b) En déduire que pour tout entier $k \geqslant 2$, :

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right)$$

On calcule les intégrales :

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t &= \int_k^{k+1} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_k^{k+1} \\
&= \left[-\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_k^{k+1} \\
&= -\frac{1}{(\alpha-1)}\left(\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right)
\end{aligned}$$

De même, en changeant les bornes d'intégration, on obtient :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right).$$

Ainsi, on a :

$$\boxed{\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right)}.$$

(c) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq n+1}\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right)$ converge et vaut $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$.

Soit $N \geq n+1$, on pose la somme partielle :

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \text{ par linéarité de la somme} \\
&= \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \sum_{\ell=n+2}^{N+1}\frac{1}{\ell^{\alpha-1}} \text{ en posant } \ell = k+1 \\
&= \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \text{ par télescopage.}
\end{aligned}$$

On remarque que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} = 0$.

On en déduit que $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{k\geq n+1}\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) \text{ converge}}$ et vaut

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) = \lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}}.$$

(d) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq n+1}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right)$ converge et vaut $\displaystyle\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Soit $N \geq n+1$, on pose la somme partielle :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \text{ par linéarité de la somme} \\ &= \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{\ell^{\alpha-1}} - \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \text{ en posant } \ell = k-1 \\ &= \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \text{ par télescopage.} \end{aligned}$$

On remarque que $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{N^{\alpha-1}} = 0$.

On en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{k\geq n+1} \left(\dfrac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{k^{\alpha-1}} \right) \text{ converge}}$ et vaut

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right) = \lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{1}{n^{\alpha-1}}}.$$

2. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

En sommant les relations obtenues à la question 1b, toutes les séries étant convergentes, on a alors :

$$\boxed{\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}}$$

3. En déduire que :

$$R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

D'après la relation précédente, on a, pour tout $n \geqslant 1$

$$\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \leqslant 1$$

C'est-à-dire

$$\left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} \leqslant \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \leqslant 1$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} = 1$, ainsi, d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} = 1$$

C'est-à-dire

$$\boxed{R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}.$$

4. Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $R_{1,n} > 0$ en tant que somme de réels strictement positifs.
D'après le théorème des équivalents pour les séries à termes positifs, les séries de terme général respectifs $R_{1,n}$ et $\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ sont de même nature.
La série de terme général $\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ est une série qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 2$.
Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2 si et seulement si } \alpha > 2}$.

Partie II - Un deuxième exemple

On considère dans cette partie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{1}{n^n}$. Les notations sont les mêmes que dans la partie précédente.

5. En comparant n^n et n^2 pour $n \geq 2$, montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge.

Pour $n \geqslant 2$ on a $n^n \geqslant n^2$ et donc

$$\forall n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$$

par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^\star$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est une série convergente, ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge.}}$

6. (a) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3$, $u_k \leqslant \dfrac{1}{3^k}$.

Soit $k \geqslant 3$, on a alors $k\ln(k) \geqslant k\ln(3)$, d'où $k^k \geqslant 3^k$ par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.
On obtient donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^\star$:

$$\boxed{\forall k \geqslant 3, \qquad 0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{3^k}}$$

(b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}$$

On a montré :

$$\boxed{\forall k \geqslant 3, \qquad 0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{3^k}}$$

Les séries de terme général respectifs u_k et $\dfrac{1}{3^k}$ convergent. En sommant les inégalités obtenues on a alors, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{i+n+1}} \qquad \textit{On pose le changement de variable } i = k-n-1 \\
&= \frac{1}{3^{n+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i \\
&= \frac{1}{3^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3^{n+1}} \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2.3^n}
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}}$$

(c) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2 , et que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}$$

La série de terme général $\frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général $R_{1,n}$ converge. En d'autres termes, $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 1} u_n \text{ converge à l'ordre 2.}}$

De plus, en sommant les inégalités on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{3^k}$$

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} = R_{2,n}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{4.3^n}$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}}$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n \geqslant 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}$$

7. Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

On va procéder par récurrence sur p. Plus précisément notons $\mathcal{A}(p)$ l'assertion
« La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}$ »

— Initialisation :
On a déjà montré que l'assertion est vraie pour $p = 1$ et $p = 2$.

— Hérédité :
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose que l'assertion $\mathcal{A}(p)$ est vraie.
On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}$$

La série de terme général $\frac{1}{2^p}\frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} R_{p,n}$ converge. En d'autres termes la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre $p+1$.
De plus, en sommant les inégalités on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\frac{1}{3^k}$$

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} = R_{p+1,n}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{2^p}\frac{1}{2.3^n} = \frac{1}{2^{p+1}3^n}$. Ainsi

$$\forall n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant R_{p+1,n} \leqslant \frac{1}{2^{p+1}3^n}$$

Ce qui prouve l'assertion au rang $n+1$.

— Conclusion :
$\boxed{\text{Pour tout entier } p \geqslant 1, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge à l'ordre } p \text{ et}}$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}}$$

Exercice 3.

Partie I - Étude d'un système différentiel

Soient $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système d'équations différentielles suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + 5t^2 \\ y'(t) = 3y(t) - x(t) + e^{2t}\sin(t). \end{cases} \tag{S}$$

1. Démontrer que x est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 10t - 15t^2 + 2e^{2t}\sin(t). \tag{E}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après la première équation de (S), on a :

$$x'(t) = x(t) + 2y(t) + 5t^2.$$

Puisque x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}, x'$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc x est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus on a, toujours d'après la première équation de (S) :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}\left(x'(t) - x(t) - 5t^2\right) \\ \text{donc} \quad y'(t) &= \frac{1}{2}\left(x''(t) - x'(t) - 10t\right). \end{aligned}$$

En réinjectant ces expressions dans la deuxième équation de (S), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(x''(t) - x'(t) - 10t\right) = \frac{3}{2}\left(x'(t) - x(t) - 5t^2\right) - x(t) + e^{2t}\sin(t) \\ \iff & x''(t) - x'(t) - 10t = 3x'(t) - 3x(t) - 15t^2 - 2x(t) + 2e^{2t}\sin(t) \\ \iff & \boxed{x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 10t - 15t^2 + 2e^{2t}\sin(t)}. \end{aligned}$$

On a bien trouvé (E).

2. Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée à (E).

On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire homogène suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0.$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique d'inconnue $r \in \mathbb{C}$ est :

$$r^2 - 4r + 5 = 0.$$

On reconnaît une équation du second degré à coefficients réels. Son discriminant est égal à :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 < 0.$$

Donc l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées que l'on note $\alpha \pm i\beta$:

$$\alpha + i\beta = \frac{-(-4) + i\sqrt{|-4|}}{2 \times 1} = 2 + i \quad \text{et} \quad \alpha - i\beta = 2 - i.$$

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène associée à (E) sont de la forme :

$$\boxed{x_H : t \mapsto} e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)) = \boxed{e^{2t}(A\cos(t) + B\sin(t))}$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes réelles quelconques.

3. Chercher une solution particulière polynomiale de degré 2, qu'on notera x_1, de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 10t - 15t^2. \tag{E1}$$

On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On cherche une solution particulière polynomiale de la forme :

$$x_1 : t \mapsto at^2 + bt + c$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sont trois constantes réelles à déterminer. La fonction x_1 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction usuelle et on a :

$$x_1' : t \mapsto 2at + b \quad \text{et} \quad x_1'' : t \mapsto 2a.$$

En réinjectant ces expressions dans (E1), on obtient d'après le résultat de la question 1 :

$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{R}, \quad 2a - 4(2at + b) + 5\left(at^2 + bt + c\right) = 10t - 15t^2 \\ \iff &\forall t \in \mathbb{R}, \quad 5at^2 + (-8a + 5b)t + (2a - 4b + 5c) = -15t^2 + 10t + 0 \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de polynômes, on obtient le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{aligned} 5a &= -15 \\ -8a + 5b &= 10 \\ 2a - 4b + 5c &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} a &= -15/5 = -3 \\ b &= (10 + 8a)/5 = -14/5 \\ c &= (-2a + 4b)/5 = -26/25. \end{aligned}\right.$$

Synthèse. On pose :

$$\boxed{x_1 : t \mapsto -3t^2 - \frac{14}{5}t - \frac{26}{25}}.$$

D'après les calculs de l'analyse, x_1 est bien une solution particulière de (E1).

4. Dans cette question, on cherche une solution particulière de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 2e^{2t}\sin(t). \tag{E2}$$

de la forme $x_2 : t \mapsto e^{2t}\lambda(t)\cos(t)$ où λ est une fonction à déterminer qu'on suppose deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que λ' est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t)z'(t) - 2\sin(t)z(t) = 2\sin(t).$$

La fonction x_2 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{aligned}x_2' : t \mapsto\ & 2e^{2t}\lambda(t)\cos(t) + e^{2t}\lambda'(t)\cos(t) - e^{2t}\lambda(t)\sin(t)\\ =& e^{2t}\left([2\lambda(t)+\lambda'(t)]\cos(t) - \lambda(t)\sin(t)\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x_2'' : t \mapsto & e^{2t}\left([2\lambda(t)+\lambda'(t)]\cos(t) - \lambda(t)\sin(t)\right)\\ & + e^{2t}\Big([2\lambda'(t)+\lambda''(t)]\cos(t) - [2\lambda(t)+\lambda'(t)]\sin(t)\\ & \quad - \lambda'(t)\sin(t) - \lambda(t)\cos(t)\Big)\\ =& e^{2t}\begin{pmatrix} [4\lambda(t)+2\lambda'(t)+2\lambda'(t)+\lambda''(t)-\lambda(t)]\cos(t)\\ +[-2\lambda(t)-2\lambda(t)-\lambda'(t)-\lambda'(t)]\sin(t)\end{pmatrix}\\ =& e^{2t}\left([3\lambda(t)+4\lambda'(t)+\lambda''(t)]\cos(t) + [-4\lambda(t)-2\lambda'(t)]\sin(t)\right).\end{aligned}$$

En réinjectant ces expressions dans (E2), on obtient :

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R},\quad 2e^{2t}\sin(t) &= x_2''(t) - 4x_2'(t) + 5x_2(t)\\ &= e^{2t}\begin{pmatrix} [3\lambda(t)+4\lambda'(t)+\lambda''(t)-8\lambda(t)-4\lambda'(t)+5\lambda(t)]\cos(t)\\ +[-4\lambda(t)-2\lambda'(t)+4\lambda(t)]\sin(t)\end{pmatrix}\\ &= e^{2t}\left(\lambda''(t)\cos(t) - 2\lambda'(t)\sin(t)\right).\end{aligned}$$

En simplifiant par e^{2t}, on obtient que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \cos(t)\lambda''(t) - 2\sin(t)\lambda'(t) = 2\sin(t).$$

Ainsi, $\boxed{\lambda' = z \text{ est solution de l'équation différentielle}}$ suivante :

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\quad \cos(t)z'(t) - 2\sin(t)z(t) = 2\sin(t)}.$$

On reconnaît bien une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

(b) Trouver une solution constante de l'équation différentielle obtenue à la question précédente, et en déduire x_2.

On remarque que $\boxed{\lambda' : t\mapsto -1}$ est solution constante de l'équation différentielle obtenue à la question précédente. En effet, si $z : t\mapsto -1$ alors $z' : t\mapsto 0$ et :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \cos(t)\underbrace{z'(t)}_{=0} - 2\sin(t)\underbrace{z(t)}_{=-1} = 2\sin(t).$$

Il suffit donc de choisir une primitive λ de $\lambda' : t\mapsto -1$. Par exemple, $\lambda : t\mapsto -t$. On en déduit que :

$$\boxed{x_2 : t\mapsto e^{2t}\lambda(t)\cos(t) = -te^{2t}\cos(t)}.$$

5. Déduire des questions précédentes la forme de x, puis celle de y.

D'après le principe de superposition et le théorème fondamental, on déduit des résultats précédents que :

$$\begin{aligned}\boxed{x : t} &\mapsto x_H(t) + x_1(t) + x_2(t)\\ &= e^{2t}(A\cos(t) + B\sin(t)) - 3t^2 - \frac{14}{5}t - \frac{26}{25} - te^{2t}\cos(t)\\ &= \boxed{e^{2t}([A-t]\cos(t) + B\sin(t)) - 3t^2 - \frac{14}{5}t - \frac{26}{25}}\end{aligned}$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes réelles quelconques.
De plus, on a d'après la première équation (S) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \frac{1}{2}\left(x'(t) - x(t) - 5t^2\right) = \frac{1}{2}x'(t) - \frac{1}{2}x(t) - \frac{5}{2}t^2.$$

Or :

$$\begin{aligned}x' : t \mapsto\ & 2e^{2t}([A-t]\cos(t) + B\sin(t)) + e^{2t}(-\cos(t) - [A-t]\sin(t)\\ &+ B\cos(t)) - 6t - \frac{14}{5}\\ =\ & e^{2t}([2A - 2t - 1 + B]\cos(t) + [2B - A + t]\sin(t)) - 6t - \frac{14}{5}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\boxed{y : t \mapsto} & \frac{1}{2}e^{2t}([2A - 2t - 1 + B]\cos(t) + [2B - A + t]\sin(t)) - 3t - \frac{7}{5}\\ & - \frac{1}{2}e^{2t}([A-t]\cos(t) + B\sin(t)) + \frac{3}{2}t^2 + \frac{7}{5}t + \frac{13}{25}\\ & - \frac{5}{2}t^2\\ = & \frac{1}{2}e^{2t}([2A - 2t - 1 + B - A + t]\cos(t) + [2B - A + t - B]\sin(t))\\ & \quad - t^2 - \frac{8}{5}t - \frac{22}{25}\\ = & \boxed{\frac{1}{2}e^{2t}([A + B - t - 1]\cos(t) + [B - A + t]\sin(t)) - t^2 - \frac{8}{5}t - \frac{22}{25}}\end{aligned}$$

Partie II - Une équation à coefficients non constants

Dans toute cette partie, les équations différentielles considérées seront résolues sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Ceci signifie que l'on ne s'intéresse qu'aux fonctions solutions définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles.

Soit α un nombre réel donné.

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$x.y' - \alpha y = 0 \tag{F1}$$

$$x^2 \cdot y'' + (1 - 2\alpha)x \cdot y' + \alpha^2 y = 0 \tag{F2}$$

où y est l'application inconnue de la variable réelle $x > 0$ et à valeurs réelles.

6. Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles solutions de (F1).

On écrit (F1) sous la forme d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène normalisée en divisant par x, $x \neq 0$:

$$(\mathrm{F1}) \Leftrightarrow y' - \frac{\alpha}{x} y = 0 \Leftrightarrow y(x) = \lambda e^{\alpha \ln(x)} \Leftrightarrow y(x) = \lambda e^{\ln(x^\alpha)} \Leftrightarrow y(x) = \lambda x^\alpha$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Les solutions de (F1) sont donc les fonctions du type $\boxed{x \mapsto \lambda x^\alpha \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$.

7. (a) Soit $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application quelconque de classe $\mathcal{C}^2$.
On définit alors une nouvelle application :

$$\begin{aligned} k : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto h(e^u) \end{aligned}$$

Justifier que k est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ où h est de classe $\mathcal{C}^2$. Donc $\boxed{k = h \circ \exp \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Pour $u \in \mathbb{R}$, exprimer $k'(u)$ et $k''(u)$ à l'aide des dérivées première et seconde de h.

De plus : $\forall u \in \mathbb{R}, k'(u) = e^u h'(e^u)$ et $k''(u) = e^u h'(e^u) + e^{2u} h''(e^u)$

(b) Montrer que h est solution de (F2), c'est-à-dire :

$$\forall x > 0, x^2 \cdot h''(x) + (1 - 2\alpha) x \cdot h'(x) + \alpha^2 h(x) = 0\ ,$$

si et seulement si on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}, k''(u) - 2\alpha k'(u) + \alpha^2 k(u) = 0$$

On suppose que h est solution de (F2) :

$$\begin{aligned} &\forall x > 0, \quad x^2 \cdot h''(x) + (1 - 2\alpha) x \cdot h'(x) + \alpha^2 h(x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\qquad \forall u \in \mathbb{R}, \quad e^{2u} \cdot h''(e^u) + (1 - 2\alpha) e^u \cdot h'(e^u) + \alpha^2 h(e^u) = 0 \end{aligned}$$

en évaluant l'équation en $x = e^u$.
On reprend les calculs de la question précédente en isolant $h'(e^u)$ et $h''(e^u)$. Pour $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} k'(u) = e^u h'(e^u) &\iff h'(e^u) = k'(u) e^{-u} \\ \text{et } k''(u) = e^u h'(e^u) + e^{2u} h''(e^u) &\iff k''(u) = k'(u) + e^{2u} h''(e^u) \\ &\iff h''(e^u) = (k''(u) - k'(u)) e^{-2u} \end{aligned}$$

On réinjecte dans l'équation :

$$\begin{aligned} &\forall u \in \mathbb{R}, \quad e^{2u} \cdot h''(e^u) + e^u (1 - 2\alpha) \cdot h'(e^u) + \alpha^2 h(e^u) = 0 \\ &\quad \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}, \ e^{2u} (k''(u) - k'(u)) e^{-2u} + (1 - 2\alpha) e^u k'(u) e^{-u} + \alpha^2 k(u) = 0 \\ &\quad \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}, \ (k''(u) - k'(u) + (1 - 2\alpha) k'(u) + \alpha^2 k(u) = 0 \\ &\quad \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}, \quad k''(u) - 2\alpha k'(u) + \alpha^2 k(u) = 0 \end{aligned}$$

(c) Déterminer l'expression de $k(u)$ pour $u \in \mathbb{R}$ lorsque h est solution de (F2).

$z'' - 2\alpha z' + \alpha^2 z = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre homogène dont l'équation caractéristique $r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 = 0$ a pour racine double $r = \alpha$.
D'où : $\boxed{\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall u \in \mathbb{R}, k(u) = (Au + B)e^{\alpha u}}$

(d) En déduire que l'ensemble des solutions de (F2) est :

$$\{x \mapsto p(\ln(x)) \times x^\alpha \text{ avec } p \text{ une fonction polynomiale de degré } 1\} \ .$$

On effectue le changement de variable :

$$x = e^u \Leftrightarrow x = \ln(u)$$

avec $(x, u) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.
On obtient donc :

$$\boxed{\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x > 0, h(x) = (A\ln(x) + B)e^{\alpha \ln(x)} = (A\ln(x) + B)x^\alpha}.$$

L'ensemble des solutions de (F2) est donc bien $\{x \mapsto p(\ln(x)) \times x^\alpha$ avec p une fonction polynomiale de degré $1\}$.