
Devoir surveillé 2 (4h - Calculatrice interdite)

Exercice 1.

Partie I - Un premier tournoi d'échecs : probabilité de gagner après un grand nombre de parties

Magnus participe à un tournoi d'échecs. Il enchaîne les parties contre des adversaires différents. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les situations possibles sont :

- G_n : « Magnus gagne le match numéro n » de probabilité a_n ,
- P_n : « Magnus perd le match numéro n » de probabilité b_n ,
- N_n : « Magnus fait match nul numéro n » de probabilité c_n .

Aux échecs, comme partout, l'état d'esprit du joueur influence ses chances de succès. Ainsi, si Magnus gagne une partie, il a au match suivant une probabilité $\frac{2}{3}$ de gagner, $\frac{1}{6}$ de perdre et $\frac{1}{6}$ de faire match nul. Si Magnus perd une partie, il a au match suivant autant de chances de gagner que de perdre ou de faire match nul. Si Magnus fait match nul à une partie, il a au match suivant une probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner, $\frac{1}{6}$ de perdre et $\frac{1}{3}$ de faire match nul.

On suppose que Magnus commence sa journée de tournoi avec un esprit positif, comme s'il venait de gagner un match.

1. D'après l'énoncé, que valent a_1 , b_1 et c_1 ?
2. Montrer que $a_2 = \frac{7}{12}$ et $b_2 = \frac{7}{36}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, quelle relation relie a_n , b_n et c_n ? En déduire l'expression de c_n en fonction de a_n et b_n .
5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} = \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}$.
(b) En déduire l'expression de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
6. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n - \frac{14}{25}$.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{36}u_n$.
(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\frac{1}{5}n + \frac{11}{25}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n$.
(c) De quelle nature est la série de terme général u_n ? En cas de convergence, déterminer la valeur de sa somme.
7. Déduire de la question 6 l'expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
8. En déduire l'expression de c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
9. Déterminer les limites des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) . Interpréter le résultat.

Partie II - Un deuxième tournoi d'échecs : probabilité de gagner toutes les parties

Magnus vise maintenant un championnat spécial. Pour le remporter, il doit participer à un tournoi dans lequel il ne joue une partie que s'il a remporté la précédente. Autrement dit, toute défaite ou tout match nul entraîne sa disqualification définitive. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les situations possibles sont :

- G_n : « Magnus joue le match numéro n et le gagne » de probabilité g_n ,
- D_n : « Magnus est disqualifié avant le match numéro n ou pendant le match numéro n » de probabilité d_n .

Les performances de Magnus d'une partie à l'autre restent les mêmes qu'au tournoi précédent, son état d'esprit initial aussi.

10. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_{n+1} = \frac{2}{3}g_n$.
(b) En déduire l'expression de g_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
11. On suppose qu'un très grand nombre de compétiteurs participe à ce championnat, tellement grand qu'on va l'assimiler à l'infini. On cherche à déterminer la probabilité que Magnus remporte ce championnat.
 - (a) Démontrer que la suite (G_n) est une suite décroissante d'évènements.
 - (b) En déduire la probabilité que Magnus gagne ce championnat.

Partie III - Un dernier tournoi d'échecs : probabilité de gagner au moins une partie

Magnus s'est entraîné et ne se laisse plus influencer par ses résultats aux parties précédentes. Pour tous les matchs, sa probabilité de gagner vaut $\frac{2}{3}$. Il participe à un tournoi lors duquel il enchaîne les parties contre des adversaires différents, indépendamment de l'issue du match précédent.

- G_n : « Magnus gagne le match numéro n » de probabilité $p = \frac{2}{3}$.
 - V_n : « Magnus gagne pour la première fois un match lors de la partie numéro n » de probabilité v_n .
 - W_n : « Magnus gagne au moins un match lors des n premières parties » de probabilité w_n .
12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer V_n en fonction de $G_1, \dots, G_n$ et leurs complémentaires.
 13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.
 14. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de w_n en fonction de n .
 15. (a) Montrer que (W_n) est une suite croissante d'évènements.
(b) En déduire la probabilité pour Magnus de gagner au moins une fois s'il joue une infinité de parties.

Exercice 2.

Partie I - Un premier exemple

Dans cette partie, on pose $\alpha > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ une suite de réels.

On admet que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k,$$

qui tend vers 0.

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k},$$

qui tend vers 0.

1. (a) Pour tout entier $k \geq 2$, justifier que :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$$

- (b) En déduire que pour tout entier $k \geq 2$, :

$$\frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \right) \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right)$$

- (c) Montrer que la série $\sum_{k \geq n+1} \left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \right)$ converge et vaut $\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$.

- (d) Montrer que la série $\sum_{k \geq n+1} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right)$ converge et vaut $\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

2. En déduire que pour tout $n \geq 1$

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

3. En déduire que :

$$R_{1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

4. Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α , la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

Partie II - Un deuxième exemple

On considère dans cette partie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n^n}$. Les notations sont les mêmes que dans la partie précédente.

5. En comparant n^n et n^2 pour $n \geq 2$, montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

6. (a) Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $u_k \leq \frac{1}{3^k}$.

(b) En déduire que, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

(c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2, et que, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n}$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geq 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}$$

7. Montrer que, pour tout $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

Exercice 3.

Partie I - Étude d'un système différentiel

Soient $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système d'équations différentielles suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + 5t^2 \\ y'(t) = 3y(t) - x(t) + e^{2t} \sin(t). \end{cases} \quad (\text{S})$$

1. Démontrer que x est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 10t - 15t^2 + 2e^{2t} \sin(t). \quad (\text{E})$$

2. Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée à (E).
3. Chercher une solution particulière polynomiale de degré 2, qu'on notera x_1 , de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 10t - 15t^2. \quad (\text{E1})$$

4. Dans cette question, on cherche une solution particulière de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 2e^{2t} \sin(t). \quad (\text{E2})$$

de la forme $x_2 : t \mapsto e^{2t} \lambda(t) \cos(t)$ où λ est une fonction à déterminer qu'on suppose deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- (a) Montrer que λ' est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t)z'(t) - 2\sin(t)z(t) = 2\sin(t).$$

- (b) Trouver une solution constante de l'équation différentielle obtenue à la question précédente, et en déduire x_2 .

5. Dédurre des questions précédentes la forme de x , puis celle de y .

Partie II - Une équation à coefficients non constants

Dans toute cette partie, les équations différentielles considérées seront résolues sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Ceci signifie que l'on ne s'intéresse qu'aux fonctions solutions définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles.

Soit α un nombre réel donné.

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$x \cdot y' - \alpha y = 0 \quad (\text{F1})$$

$$x^2 \cdot y'' + (1 - 2\alpha)x \cdot y' + \alpha^2 y = 0 \quad (\text{F2})$$

où y est l'application inconnue de la variable réelle $x > 0$ et à valeurs réelles.

6. Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles solutions de (F1).
7. (a) Soit $h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application quelconque de classe $\mathcal{C}^2$.

On définit alors une nouvelle application :

$$\begin{aligned} k : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto h(e^u) \end{aligned}$$

Justifier que k est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $u \in \mathbb{R}$, exprimer $k'(u)$ et $k''(u)$ à l'aide des dérivées première et seconde de h .

(b) Montrer que h est solution de (F2), c'est-à-dire :

$$\forall x > 0, x^2 \cdot h''(x) + (1 - 2\alpha)x \cdot h'(x) + \alpha^2 h(x) = 0 ,$$

si et seulement si on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}, k''(u) - 2\alpha k'(u) + \alpha^2 k(u) = 0$$

(c) Déterminer l'expression de $k(u)$ pour $u \in \mathbb{R}$ lorsque h est solution de (F2).

(d) En déduire que l'ensemble des solutions de (F2) est :

$$\{x \mapsto p(\ln(x)) \times x^\alpha \text{ avec } p \text{ une fonction polynomiale de degré } 1\} .$$