

Proposition 6.1.4:

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ non nul. Les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature. De plus si $\sum u_n$ converge alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum (u_n + v_n)$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Ainsi l'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$.

- Si $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \sum \lambda u_n$ converge

$$\sum_{n=0}^N \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

car $\sum u_n$ conv

Donc $\sum \lambda u_n$ converge vers $\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

- Si $\sum \lambda u_n$ converge

$$\sum_{n=0}^N u_n = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^N \lambda u_n \quad \text{car } \lambda \neq 0$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n \quad \text{par linéarité de la limite}$$

Donc $\sum u_n$ converge vers $\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n$

Donc $\sum \lambda u_n$ converge ssi $\sum \lambda u_n$ converge

par linéarité $\xrightarrow{N \rightarrow +\infty}$ de la limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N v_n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

car $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent

Donc $\sum (u_n + v_n)$ converge vers

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

- Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes.
Montrons que $\sum u_n + v_n$ converge.

Soit $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^N (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^N u_n + \sum_{n=0}^N v_n$$

Théorème 6.2.7: Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que, à partir d'un certain rang n_0 , $u_n \leq v_n$.

— Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

— Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration.

Soit $m_0 \in \mathbb{N}$, $\forall m \geq m_0 \quad u_m \leq v_m$

. Si $\sum v_m$ diverge

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq m_0$. On a

$$\sum_{m=m_0}^N u_m \leq \sum_{m=m_0}^N v_m$$

(car u_m est positive)

$$\leq \sum_{m=0}^N v_m$$

et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=m_0}^N u_m = +\infty$ car $\left. \begin{array}{l} u_m \geq 0 \text{ tous } m \\ \sum v_m \text{ diverge} \end{array} \right\}$

Donc par minoration $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^N v_m = +\infty$

Donc $\sum v_m$ diverge.

Si $\sum v_m$ converge

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq m_0$. On a

$$(*) \quad \sum_{m=m_0}^N u_m \leq \sum_{m=m_0}^N v_m \leq \sum_{m=m_0}^{+\infty} v_m$$

(car $\left. \begin{array}{l} \sum v_m \text{ est majoré} \\ u_m \geq 0, v_m \geq 0 \end{array} \right\}$)

Donc $\left(\sum_{m=m_0}^N u_m \right)_{N \geq m_0}$ est croissante

et majorée par $\sum_{m=m_0}^{+\infty} v_m$ donc d'après

le théorème de Cauchy monotone $\left(\sum_{m=m_0}^N u_m \right)$ converge.

Donc $\sum u_m$ converge et par passage à la limite dans (*):

$$\sum_{m=m_0}^{+\infty} u_m \leq \sum_{m=m_0}^{+\infty} v_m$$

Théorème 6.2.9: Théorème d'équivalence des séries à termes positifs

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \sim v_n$

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0 \quad \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq 1 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Si } u_n \sim v_n \\ \text{APCR} \end{array} \right.$$

$$\text{ie } 0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq 2v_n \quad \text{car } v_n \geq 0$$

Donc APCR $u_n \leq 2v_n$

Donc d'après le théorème de comparaison des SAP, si $\sum u_n$ diverge

$\sum 2v_n$ diverge donc $\sum v_n$ diverge

De même si $u_n \sim v_n$ alors $u_n \sim v_n$

Donc $\exists N_0', \forall n \geq N_0' \quad v_n \leq 2u_n$

Donc si $\sum u_n$ converge, $\sum 2u_n$ converge

Donc $\sum v_n$ converge d'après le th de comparaison.

Donc $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.