

Proposition 9.1.13: Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, alors

1. $\sum_{i \in I} P(A_i)$ converge vers 1,
2. Pour tout événement B , $\sum_{i \in I} P(B \cap A_i)$ converge vers $P(B)$.

Démonstration.

1) (A_i) est un s.c.e. donc les événements sont 2 à 2 incompatibles

Donc $\sum_{i \in I} P(A_i)$ converge vers

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1$$

$= 1$ car (A_i) est un s.c.e

Donc $\sum_{i \in I} P(A_i)$ converge vers 1.

2) Comme (A_i) est s.c.e.

$$\forall i \neq j, (B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset$$

Donc $(B \cap A_i)_{i \in I}$ sont 2 à 2 incompatibles

Donc $\sum_{i \in I} P(B \cap A_i)$ converge vers

$$P\left(\bigcup_{i \in I} B \cap A_i\right)$$

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) = B$$

[$\subseteq$] évident car $B \cap A_i \subseteq B$

[$\supseteq$] Soit $x \in B$, $x \in \Omega$ donc $\exists i \in I, x \in A_i$ car $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$

Donc $x \in B \cap A_i$ donc $x \in \bigcup_{i \in I} B \cap A_i$

$$\text{Donc } \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) = B$$

Donc $\sum_{i \in I} P(B \cap A_i)$ converge vers $P(B)$.

Proposition 9.1.19 (Limite croissante/décroissante): Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1. Si (A_n) est croissante alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$.
2. Si (A_n) est décroissante alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n)$.

① Soit $A_1 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ une suite croissante d'événements

Soit (B_m) définie par
 $B_1 = A_1$
 $B_m = A_m \setminus A_{m-1}$

(B_m) est une suite d'événements disjoints.

$$\text{et } \bigcup_{m=1}^{+\infty} B_m = \bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m \quad \forall N \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Donc } P\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m\right) = P\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} B_m\right) \quad \text{par additivité}$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} P(B_m)$$

$$\text{et } \sum_{m=1}^N P(B_m) = P(A_N) \quad \forall N \in \mathbb{N}^*$$

Donc par passage à la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m\right)$$

② Soit (B_m) une suite d'événements décroissante

Alors (C_m) est une suite croissante.

$$\text{Donc } P\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} C_m\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} P(C_m)$$

$$\Leftrightarrow 1 - P\left(\bigcap_{m=1}^{+\infty} B_m\right) = 1 - \lim_{m \rightarrow +\infty} P(B_m)$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bigcap_{m=1}^{+\infty} B_m\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} P(B_m)$$

Théorème 9.2.4: Formule des probabilités composées

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour toute famille finie $(A_1, \dots, A_n)$ d'événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ on a :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Démonstration.

Remarque préliminaire : Si $P(A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}) \neq 0$

alors $\forall B \in \mathcal{F}_{2, m-1}$ $P(A_2 \cap \dots \cap A_m) \neq 0$

car $A_2 \cap \dots \cap A_{m-1} \subseteq A_2 \cap \dots \cap A_m$

donc $\frac{P(A_2 \cap \dots \cap A_{m-1})}{0 <} \leq P(A_2 \cap \dots \cap A_m)$

Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$,

Soit $H_m = \{ \forall (A_2, \dots, A_m) \in \mathcal{A}^m \text{ tel que}$

$P(A_2 \cap \dots \cap A_m) \neq 0,$

$P(A_2 \cap \dots \cap A_m) = P(A_2) \dots P(A_m | A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}) \}$

H_2 est vraie car $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ si $P(A) \neq 0$

Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ tel que H_m est vraie

Soit $(A_2, \dots, A_{m+1}) \in \mathcal{A}^{m+1}$ tel que

$P(A_2 \cap \dots \cap A_m) \neq 0$ $\forall y$ H_{m+1} est vraie

$P(A_2 \cap \dots \cap A_{m+1}) = P(A_2 \cap \dots \cap A_m) P(A_{m+1} | A_2 \cap \dots \cap A_m)$
car H_2 est vraie

et d'après la remarque $P(A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}) \neq 0$

donc comme H_m est vraie

$P(A_2 \cap \dots \cap A_{m+1}) = P(A_2) \dots P(A_{m+1} | A_2 \cap \dots \cap A_m)$

Donc H_{m+1} est vraie

Donc par récurrence $\forall m \geq 2$, $\forall (A_2, \dots, A_m) \in \mathcal{A}^m$ tel

que $P(A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}) \neq 0$,

$P(A_2 \cap \dots \cap A_m) = P(A_2) \dots P(A_m | A_2 \cap \dots \cap A_{m-1})$

Proposition 9.2.24: Soit (A_i) est une famille d'événements mutuellement indépendants. Soit (B_i) une famille d'événements telle que $B_i = A_i$ ou $B_i = \bar{A}_i$. Alors (B_i) est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Démonstration.

Soit $J \subseteq I$

On peut supposer, quitte à permuter les (B_i) que $J = (\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_R, A_{R+1}, \dots, A_m)$

$$\begin{aligned}
 P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap A_m) &= E(1_{\bar{A}_1} \dots 1_{A_m}) \\
 &= E(1_{\bar{A}_1} 1_{\bar{A}_2} \dots 1_{A_m}) \\
 &= E\left(\prod_{i=1}^R 1_{\bar{A}_i} \times \prod_{i=R+1}^m 1_{A_i}\right) \\
 &= E\left(\prod_{i=1}^R (1 - 1_{A_i}) \times \prod_{i=R+1}^m 1_{A_i}\right) \\
 &= E\left(\sum_{j=1}^R \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_j \leq R} (-1)^j 1_{A_{m_1}} \dots 1_{A_{m_j}}\right) \prod_{i=R+1}^m 1_{A_i} \\
 &= \sum_{j=1}^R \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_j \leq R} (-1)^j E(1_{A_{m_1}} \dots 1_{A_{m_j}} \prod_{i=R+1}^m 1_{A_i}) \\
 &\stackrel{\text{indépendance mutuelle}}{=} \sum_{j=1}^R \sum_{1 \leq m_1 < \dots < m_j \leq R} (-1)^j E(1_{A_{m_1}}) \dots E(1_{A_{m_j}}) \prod_{i=R+1}^m E(1_{A_i}) \\
 &= \prod_{j=1}^R E(1_{\bar{A}_j}) \times \prod_{j=R+1}^m E(1_{A_j}) \\
 &= P(\bar{A}_1) \dots P(A_m)
 \end{aligned}$$

Donc (B_i) sont mutuellement indépendants