Lycée Louis Thuillier
2-BCPST-B

Du 10 au 14 novembre 2025

Programme de colle S7

1 Remarques au colleurs

— Vous pouvez demander en question de cours ou dans un exercice de prouver la formule de l'espérance ou de la variance d'une va de loi usuelle (finie ou infinie).
— Vous pouvez demander en question de cours ou dans un exercice de prouver la propriété sur la somme de deux va de loi de Poisson indépendantes.

2 Chapitre 3 : Variables aléatoires réelles discrètes

— notations relatives à une variable aléatoire : $(X = a)$, $(a < X \leqslant b)$, $(X \geqslant a)$,...
— univers image $X(\Omega)$, loi d'une variable aléatoire discrète
— l'ensemble $\big\{(X = x)\,\big|\, x \in X(\Omega)\big\}$ est un système quasi-complet d'événements
— fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète et propriétés : croissance, limites en $\pm\infty$, fonction en escalier, lien avec la loi de probabilité de X
— *définition* : une variable aléatoire admet une espérance si la série $\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} k\,\mathrm{P}(X = k)$ est absolument convergente, notion de variable aléatoire centrée
— propriétés de l'espérance :
1. une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance admet une espérance et formule $\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \dots$ (linéarité de l'espérance)
2. positivité et croissance de l'espérance
3. théorème de transfert : étant donnée une fonction $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, la variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,\mathrm{P}(X = x)$ est absolument convergente et, dans ce cas, on a $\mathrm{E}(f(X)) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,\mathrm{P}(X = x)$

— *définition* : une variable aléatoire X admet une variance si $X - \mathrm{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2
— théorème de Kœnig-Huygens : X admet une variance si et seulement si X admet une espérance et un moment d'ordre 2 et, dans ce cas, $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$
— propriétés : positivité de la variance, variance de $aX + b$ si X admet une variance, la variance est nulle si et seulement si X est constante
— écart-type, variable aléatoire centrée réduite
— inégalité de Markov
— indépendance de deux variables aléatoires
— propriétés de l'espérance et de la variance liées à l'indépendance des va
— indépendance deux à deux de n variables aléatoires discrètes, indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes
— loi certaine (variable aléatoire constante), loi de Bernoulli, loi binomiale, loi uniforme
— **loi géométrique** sur $\mathbb{N}^*$ (elle correspond au rang d'apparition du premier succès lors de la répétition infinie d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes et identiques) : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$
  — espérance et variance
  — propriété d'invariance temporelle de la loi géométrique :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \qquad \mathrm{P}(X > m + n \,|\, X > n) = \mathrm{P}(X > m)$$

— **loi de Poisson** : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^k}{k\,!}$
  — espérance et variance

  - possibilité d'approximer la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ dans de *bonnes conditions* notamment lorsque $n \geqslant 30$, $p \leqslant 0,1$ et $np(1-p) \leqslant 10$
- loi d'une somme de variables aléatoires discrètes indépendante : exemple d'une somme de deux va indépendantes suivant une loi de Poisson, puis de n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois de Poisson
- loi d'une variable aléatoire discrète définie conditionnellement à une autre : exemple d'une va Y de loi binomiale (n,p) sachant que $X = n$ où X suit une loi de Poisson
- loi du min ou du max de va discrètes indépendantes

3 Python

- Travail sur les listes et les tableaux (TP1)
- Simulation d'une expérience aléatoire grâce aux fonctions `random` et `randint`
- Travail sur les chaînes de caractères et les dictionnaires (TP4)

4 La question de cours

Voici quelques exemples (liste non exhaustive) :

1. Énoncer la formule des probabilités totales
2. Énoncer la formule des probabilités composées généralisée
3. Définir le système complet d'évènements associé à une variable aléatoire discrète
4. Définir l'espérance d'une variable aléatoire discrète d'univers image $\mathbb{N}$
5. Définir la variance d'une variable aléatoire discrète d'univers image $\mathbb{N}$
6. Énoncer le théorème de Kœnig-Huygens
7. Énoncer l'inégalité de Markov
8. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
9. Énoncer le théorème de transfert dans le cadre d'une variable aléatoire réelle discrète d'univers image égal à $\mathbb{N}$
10. Quand dit-on qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale ? Quelles sont alors les espérance et variance associées ?
11. Quand dit-on qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson ? Quelles sont alors les espérance et variance associées ?
12. Quand dit-on qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique ? Quelles sont alors les espérance et variance associées ?
13. Énoncer la propriété d'invariance temporelle de la loi géométrique.
14. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. Définir l'indépendance deux à deux et l'indépendance mutuelle de cette famille de variables aléatoires.
15. Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète. Dresser son tableau de variation.
16. ...