

Correction du devoir maison 3

Ce DM est à faire en deux étapes :

1. comme un DS de 2h, seul, d'une seule traite et sans document
2. avec un stylo d'une autre couleur, corriger et compléter le travail comme pour un DM, en ayant accès au cours, au TD, en posant des questions par mail, etc

Exercice 1.

On dispose d'une pièce de monnaie amenant *pile* avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et *face* avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I - Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de *face* avant l'obtention du deuxième *pile*. Par exemple, l'enchaînement FFPFFFP... est tel que $X = 5$.

1. (a) Décrire les événements $(X = 0)$, $(X = 1)$ et $(X = 2)$ puis calculer leurs probabilités.

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'événement F_k (respectivement P_k) : « le k^{e} lancer a amené *face* (respectivement *pile*) ».

- ★ L'événement $(X = 0)$ est réalisé si et seulement si les deux premiers lancers ont amené *pile*. Ainsi $(X = 0) = P_1 \cap P_2$ et, par indépendance des lancers, $P(X = 0) = P(P_1) P(P_2) = \frac{4}{9}$.
- ★ L'événement $(X = 1)$ est réalisé si et seulement si le deuxième *pile* est obtenu au troisième lancer. On a l'égalité $(X = 1) = (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$. Les deux événements qui interviennent dans la réunion sont incompatibles (puisque l'on ne peut pas obtenir *pile* et *face* en même temps au premier lancer) donc :

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \\ &= P(F_1) P(P_2) P(P_3) + P(P_1) P(F_2) P(P_3) \end{aligned}$$

par indépendance mutuelle des lancers. D'où

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= 2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} \\ &= \frac{8}{27} \end{aligned}$$

- ★ L'événement $(X = 2)$ est réalisé si et seulement si exactement quatre lancers de pièces ont été nécessaires pour obtenir les deux *pile* (en particulier, le quatrième lancer a donc amené un *pile*). On a donc l'égalité :

$$\begin{aligned} (X = 2) &= (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \\ &\quad \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \end{aligned}$$

Les trois événements qui interviennent dans cette réunion sont deux à deux

incompatibles et les lancers sont mutuellement indépendants donc :

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(F_1) P(F_2) P(P_3) P(P_4) + P(F_1) P(P_2) P(F_3) P(P_4) \\ &\quad + P(P_1) P(F_2) P(F_3) P(P_4) \\ &= 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{12}{81} \end{aligned}$$

Finalement :

$$P(X = 0) = \frac{4}{9}, \quad P(X = 1) = \frac{8}{27} \quad \text{et} \quad P(X = 2) = \frac{12}{81}$$

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'événement $(X = n)$ est réalisé si et seulement si exactement $n + 2$ lancers de pièces ont été nécessaires pour obtenir deux *pile* (le deuxième *pile* ayant donc été obtenu au $(n + 2)^{\text{e}}$ lancer). Le premier *pile* a pu être obtenu au premier lancer ou au second, ... , ou au $(n + 1)^{\text{e}}$ lancer. On a donc l'égalité :

$$(X = n) = \bigcup_{k=1}^{n+1} (F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k \cap F_{k+1} \cap \dots \cap F_{n+1} \cap P_{n+2})$$

Les $n + 1$ événements intervenant dans cette réunion sont deux à deux incompatibles et les lancers de pièce sont mutuellement indépendants donc on a successivement les égalités :

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \sum_{k=1}^{n+1} P(F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k \cap F_{k+1} \cap \dots \cap F_{n+1} \cap P_{n+2}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} P(F_1) \dots P(F_{k-1}) P(P_k) P(F_{k+1}) \dots P(F_{n+1}) P(P_{n+2}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{4}{3^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+1} 1 \end{aligned}$$

par linéarité de la somme. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$$

(c) Déterminer, si elle existe, l'espérance de X .

X admet un espérance si et seulement si la série de terme général $nP(X = n)$ est absolument convergente, si et seulement si la série de terme général $n(n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$ est convergente par positivité des termes.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n k(k+1) \frac{4}{3^{k+2}}$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n k(k+1) \frac{4}{3^{k+2}} \\ &= 4 \sum_{k=1}^n k(k+1) \frac{1}{3^{k+2}} \text{ car nulle en } k=0 \\ &= 4 \sum_{\ell=2}^{n+1} (\ell-1)\ell \frac{1}{3^{\ell+1}} \text{ en posant } \ell = k+1 \\ &= \frac{4}{3^3} \sum_{\ell=2}^{n+1} \ell(\ell-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-2} \end{aligned}$$

On reconnaît une somme partielle de série géométrique dérivée seconde de raison $q = \frac{1}{3}$. Comme $-1 < q < 1$, la suite (S_n) converge, donc X admet une espérance. On a de plus :

$$\begin{aligned} E(X) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \\ &= \frac{4}{3^3} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} \\ &= \frac{4}{3^3} \times \frac{2 \times 3^3}{2^3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi $E(X) = 1$.

Partie II - Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième *pile*. Puis, en fonction du nombre n de *face* obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher. Enfin, on pioche une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de *face* obtenus, et U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule choisie. On pose $V = X - U$.

2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U .

Si $n \in \mathbb{N}$ *face* ont été obtenus avant l'obtention du deuxième *pile* (c'est-à-dire si $X = n$), alors on pioche une boule dans une urne qui en contient $n+1$ numérotées de 0 à n . Donc U peut déjà prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et n . Or la valeur prise par X peut être arbitrairement grande (on a $X(\Omega) = \mathbb{N}$) donc le numéro de la boule tirée au cours de l'expérience peut être arbitrairement grand. Ainsi :

l'ensemble des valeurs prises par U est $U(\Omega) = \mathbb{N}$

- (b) Déterminer, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, la probabilité conditionnelle

$$P(U = k \mid X = n).$$

Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Si $X = n$, alors on pioche une boule dans une urne qui en contient n numérotées de 0 à n . Par équiprobabilité, on a donc

$$P(U = k | X = n) = \frac{1}{n+1} \quad \text{si } 0 \leq k \leq n .$$

Si $k > n$, alors $P(U = k | X = n) = 0$ car il n'y a pas de boule numéroté k dans l'urne. Finalement :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \quad P(U = k | X = n) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que la loi conditionnelle de U sachant l'événement $(X = n)$ est la loi uniforme sur l'intervalle $\llbracket 0, n \rrbracket$.

(c) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(U = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n) \quad \text{puis} \quad P(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $\{(X = n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un système quasi-complet d'événements de probabilités non nulles, on sait d'après la formule des probabilités totales que la série $\sum_{n \geq 0} P(U = k | X = n) P(X = n)$ est convergente de somme égale à $P(U = k)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(U = k | X = n) P(X = n) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} \underbrace{P(U = k | X = n)}_{=0 \text{ (question 2b)}} P(X = n) \\ &\quad + \sum_{n=k}^{+\infty} \underbrace{P(U = k | X = n)}_{=\frac{1}{n+1} \text{ (question 2b)}} P(X = n) \quad (\text{relation de Chasles}) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$P(U = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n)$$

On utilise maintenant la question 1b :

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{4}{3^{n+2}} = \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \\ &= \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\ell} \quad (\text{chgt d'indice } \ell = n - k) \\ &= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

en utilisant la formule donnant la somme d'une série géométrique (convergente).

Finalement, on a bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

(d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

★ Étude de l'espérance

La variable aléatoire U admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} k P(U = k)$ converge absolument, c'est-à-dire converge car cette série est à termes positifs. Pour tout entier naturel k , on a :

$$k P(U = k) = \frac{2k}{3^{k+1}} = \frac{2}{9} \times k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

La série géométrique dérivée première de raison $\frac{1}{3}$ est convergente car $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$. Or l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel donc la série $\sum_{k \geq 0} k P(U = k)$ est convergente. Finalement, U admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned} E(U) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k P(U = k) = \frac{2}{9} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \quad (\text{linéarité de la somme}) \\ &= \frac{2}{9} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

★ Étude de la variance

D'après le théorème de Kœnig-Huygens, la variable aléatoire U admet une variance si et seulement si elle admet une espérance et un moment d'ordre 2. D'après le théorème de transfert, U^2 admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} k^2 P(U = k)$ est absolument convergente, c'est-à-dire converge car cette série est à termes positifs. Pour tout entier naturel k , on a :

$$\begin{aligned} k^2 P(U = k) &= \frac{2k^2}{3^{k+1}} = \frac{2k(k-1)}{3^{k+1}} + \frac{2k}{3^{k+1}} \\ &= \frac{2}{27} \times k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{2}{9} \times k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$, les séries géométriques dérivées première et seconde de raison $\frac{1}{3}$ sont convergentes. L'ensemble des séries convergentes étant un espace vectoriel, la série $\sum_{k \geq 0} k^2 P(U = k)$ est convergente. Ainsi, U^2 admet

une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned}
 E(U^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(U = k) \\
 &= \frac{2}{27} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{2}{9} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \quad (\text{par linéarité}) \\
 &= \frac{2}{27} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

La variable aléatoire U admet donc une variance qui vaut

$$V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = \frac{3}{4}$$

Finalement : la variable aléatoire U admet une espérance et une variance qui valent

$$E(U) = \frac{1}{2}, \quad V(U) = \frac{3}{4}.$$

3. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire V .

Par définition de U , on sait que $U \leq X$ donc $V \geq 0$. Pour tout entier naturel n , la variable aléatoire V peut prendre la valeur n (il suffit que X prenne la valeur n et que l'on pioche la boule numérotée 0, c'est-à-dire que $U = 0$). Ainsi :

$$\text{l'ensemble des valeurs prises par } V \text{ est } V(\Omega) = \mathbb{N}$$

- (b) Déterminer, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, la probabilité conditionnelle

$$P(V = k | X = n).$$

Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. On a :

$$P(V = k | X = n) = P(X - U = k | X = n) = P(U = n - k | X = n)$$

La variable aléatoire U étant à valeurs positives, on a $P(U = n - k | X = n) = 0$ si $k > n$. Si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors $n - k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et alors $P(U = n - k | X = n) = \frac{1}{n+1}$ d'après la question 2b. Ainsi :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \quad P(V = k | X = n) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n , la loi conditionnelle de V sachant $(X = n)$ est donc la loi uniforme sur l'intervalle $\llbracket 0, n \rrbracket$.

- (c) En déduire la loi de V .

On sait que $V(\Omega) = U(\Omega) = \mathbb{N}$. On observe que les lois conditionnelles de U et V sachant $(X = n)$ sont identiques. Les mêmes calculs que ceux menés à la question 2c fournissent donc également :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(V = k) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes, c'est-à-dire que :

$$\forall (k, \ell) \in U(\Omega) \times V(\Omega), \quad P((U = k) \cap (V = \ell)) = P(U = k) P(V = \ell)$$

Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$. On a :

$$\begin{aligned} P((U = k) \cap (V = \ell)) &= P((U = k) \cap (X - U = \ell)) \\ &= P((U = k) \cap (X = k + \ell)) \\ &= P(U = k | X = k + \ell) P(X = k + \ell) \end{aligned}$$

car $P(X = k + \ell) \neq 0$. Ainsi

$$P((U = k) \cap (V = \ell)) = \frac{1}{k + \ell + 1} \times (k + \ell + 1) \frac{4}{3^{k+\ell+2}}$$

d'après la question 2b car $k \leq k + \ell$. Ainsi :

$$P((U = k) \cap (V = \ell)) = \frac{4}{3^{k+\ell+2}} = \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{\ell+1}} = P(U = k) P(V = \ell)$$

Finalement :

les variables aléatoires U et V sont indépendantes

Partie III - Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un nombre réel de l'intervalle $]0, 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de *pile* ou *face* dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant *pile* avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième *pile* ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de *face* alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant *pile* avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un *pile* ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de *face* alors obtenus ;
- les lancers de pièces des joueurs A et B sont indépendants ;
- le joueur A gagne si son nombre de *face* obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

5. Étude de la variable aléatoire Y

- (a) Déterminer la loi de Y . On s'aidera des événements B_k : « Le lancer k effectué par le joueur B amène *pile* » définis pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Y représente le nombre de *face* obtenus avant le premier *pile* donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}$: on peut obtenir directement un *pile* ou l'attendre pendant un très grand nombre de lancers.

Soit $n \in \mathbb{N}$, l'événements $Y = n$ signifie qu'on a obtenu n fois *face* avant le premier *pile*, donc le premier *pile* a été obtenu au lancer $n + 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= P(\bar{B}_1 \cap \dots \cap \bar{B}_n \cap B_{n+1}) \\ &= \left(\prod_{k=1}^n P(\bar{B}_k) \right) \times P(B_{n+1}) \text{ par indépendance des lancers} \\ &= (1 - p)^n p \end{aligned}$$

donc $P(Y = n) = (1 - p)^n p$.

- (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y \geq n) = (1 - p)^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$P(Y \geq n) = P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} (Y = k)\right)$$

car Y prend des valeurs entières. Les événements $(Y = k)$ (où $k \geq n$) sont deux à deux incompatibles et P est une probabilité donc la série $\sum_{k \geq n} P(Y = k)$ est

convergente de somme $P(Y \geq n)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
 P(Y \geq n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} P(Y = k) \\
 &= \sum_{k=n}^{+\infty} p(1-p)^k \\
 &= p \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1-p)^{\ell+n} && (\ell = k - n) \\
 &= p(1-p)^n \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1-p)^{\ell} && (\text{par linéarité de la somme}) \\
 &= p(1-p)^n \times \frac{1}{1 - (1-p)}
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y \geq n) = (1-p)^n$$

6. En utilisant le système quasi-complet d'événements associé à la variable aléatoire X , montrer que :

$$P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P(Y \geq n)$$

Comme $\{(X = n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un système quasi-complet d'événements de probabilités non nulles, on sait d'après la formule des probabilités totales que la série $\sum_{n \geq 0} P((X = n) \cap (X \leq Y))$ est convergente de somme égale à $P(X \leq Y)$. Or :

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}, \quad P((X = n) \cap (X \leq Y)) &= P((X = n) \cap (Y \geq n)) \\
 &= P(X = n) P(Y \geq n)
 \end{aligned}$$

par indépendance des lancers de pièces des joueurs A et B . Ainsi :

$$P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P(Y \geq n)$$

7. Dédurre des résultats précédents l'égalité :

$$P(X \leq Y) = \frac{4}{(2+p)^2}$$

La loi de la variable aléatoire X a été obtenue à la question 1b. En utilisant également

la question 5b, on a alors :

$$\begin{aligned}
 P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} (1-p)^n \\
 &= \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{1-p}{3} \right)^n && \text{(par linéarité de la somme)} \\
 &= \frac{4}{9} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1-p}{3} \right)^{k-1} && \text{(changement d'indice } k = n+1) \\
 &= \frac{4}{9} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1-p}{3}\right)^2} \\
 &= \frac{4}{9} \times \frac{9}{(2+p)^2}
 \end{aligned}$$

Finalement, on a bien :

$$P(X \leq Y) = \frac{4}{(2+p)^2}$$

8. Déterminer la valeur de p pour que le jeu soit équilibré.

L'événement $(X \leq Y)$ est : « le joueur A gagne le jeu ». Le jeu est équitable si et seulement la probabilité que A gagne est égale à $\frac{1}{2}$. On résout donc :

$$\begin{aligned}
 P(X \leq Y) = \frac{1}{2} &\iff \frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \\
 &\iff (2+p)^2 = 8 \\
 &\iff 2+p = 2\sqrt{2} && \text{(car } 2+p \geq 0)
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\text{le jeu est équitable si et seulement si } p = 2\sqrt{2} - 2$$

Exercice 2.

On s'intéresse à la résolution du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = a - cm \\ \frac{dp}{dt} = bm - dp \end{cases} \quad (1)$$

où $(a, b, c, d) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$ tel que $c \neq d$ et $(m, p) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On pose $m_0 = m(0)$ et $p_0 = p(0)$.

Partie I - On considère dans cette partie que

$$b = 1, \quad c = 1, \quad d = 2$$

et on cherche à trouver les solutions du système différentiel (1) qui est devenu

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = a - m \\ \frac{dp}{dt} = m - 2p \end{cases} \quad (2)$$

1. Montrer que (m, p) une solution de (2) si et seulement si $(m, -m + p)$ est une solution du système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = -z_1 + a \\ \frac{dz_2}{dt} = -2z_2 - a. \end{cases} \quad (3)$$

On a :

$$\begin{aligned} (m, p) \text{ solution de (2)} &\iff \begin{cases} \frac{dm}{dt} = a - m \\ \frac{dp}{dt} = m - 2p \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{dm}{dt} = a - m \\ -\frac{dm}{dt} + \frac{dp}{dt} = -a + m + m - 2p \text{ par } L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{dm}{dt} = a - cm \\ \frac{d(-m + p)}{dt} = -a + 2m - 2p \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{dm}{dt} = a - cm \\ \frac{d(-m + p)}{dt} = -2(-m + p) - a \end{cases} \\ &\iff (m, -m + p) \text{ solution de (3)} \end{aligned}$$

2. Résoudre chacune des équations du système différentiel (3).

Chacune des équations est une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants et à second membre constant. On en déduit que les ensembles de solutions sont

$$\left\{ t \mapsto C_1 e^{-t} + a : C_1 \in \mathbb{R} \right\} \quad \left\{ t \mapsto C_2 e^{-2t} - \frac{a}{2} : C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. En déduire les solutions de (2).

On a

$$\begin{cases} z_1 = m \\ z_2 = -m + p \end{cases} \iff \begin{cases} m = z_1 \\ p = z_1 + z_2 \end{cases}.$$

D'après la question 1, (z_1, z_2) est solution de (3) si et seulement si $(z_1, z_1 + z_2)$ est solution de (2). Donc d'après la question précédente on en déduit que l'ensemble des solutions de (2) est l'ensemble

$$\left\{ t \mapsto \left(C_1 e^{-t} + a, C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{a}{2} \right) : (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Partie II - On revient à l'étude générale du système différentiel (1).

4. Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = a - cm \\ m(0) = m_0 \end{cases} \quad (4)$$

On reconnaît une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants. L'équation homogène associée est :

$$m' + cm = 0.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\left\{ t \mapsto C_1 e^{-ct}, C_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Une solution particulière constante est solution de :

$$0 = a - cm \iff m = \frac{a}{c}.$$

Ainsi, l'ensemble des solution de l'équation différentielle est :

$$\left\{ t \mapsto C_1 e^{-ct} + \frac{a}{c}, C_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche maintenant la solution du problème de Cauchy. On détermine C_1 pour avoir $m(0) = m_0$:

$$\begin{aligned} m(0) = m_0 &\iff C_1 e^{-c \times 0} + \frac{a}{c} = m_0 \\ &\iff C_1 = m_0 - \frac{a}{c} \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy est :

$$m(t) = \left(m_0 - \frac{a}{c} \right) e^{-ct} + \frac{a}{c}.$$

5. Calculer la limite m_∞ de $m(t)$ quand t tend vers l'infini.

Comme $c > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-ct} = 0$. Donc

$$m_{\infty} = \frac{a}{c}.$$

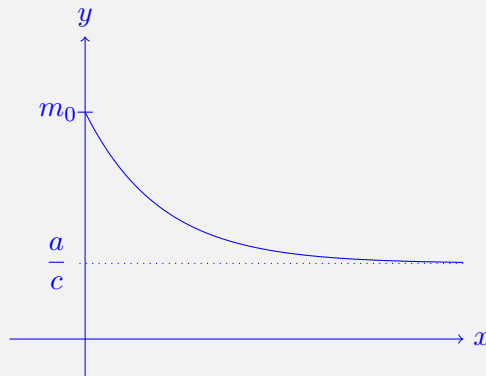
6. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de m en zéro.

Comme m est solution du système différentiel, $\frac{dm}{dt}(0) = a - cm_0$. Donc l'équation de la tangente est

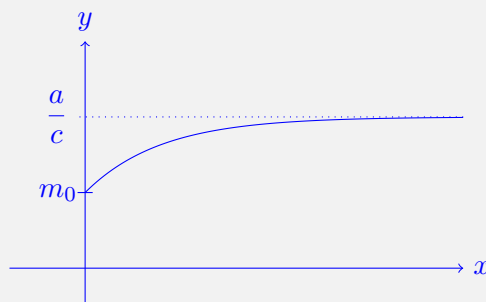
$$y = (a - cm_0)x + m_0.$$

7. Tracer l'allure de la fonction m sur $[0, +\infty[$ dans le cas où $m_0 > \frac{a}{c}$ et dans le cas où $m_0 < \frac{a}{c}$.

Dans le cas où $m_0 > \frac{a}{c}$ on a



Dans le cas où $m_0 < \frac{a}{c}$ on a



8. (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène $\frac{dp}{dt} + dp = 0$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\left\{ t \mapsto C_2 e^{-dt}, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (b) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $\frac{dp}{dt} = bm - dp$ sous la forme $y_p : t \mapsto Ae^{-ct} + B$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, on pose $y_p : t \mapsto Ae^{-ct} + B$. La fonction y_p est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ comme somme et composée de fonctions usuelles qui le sont.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $y'_p(t) = -Ace^{-ct}$. On obtient :

$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } y' + dy &= bm \iff -Ace^{-ct} + d(Ae^{-ct} + B) = bm \\ &\iff A(-c + d)e^{-ct} + Bd = b \left(m_0 - \frac{a}{c} \right) e^{-ct} + \frac{ab}{c} \\ &\iff \begin{cases} A(-c + d) = b \left(m_0 - \frac{a}{c} \right) \\ Bd = \frac{ab}{c} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} A = \frac{b}{d - c} \left(m_0 - \frac{a}{c} \right) \text{ car } c \neq d \\ B = \frac{ab}{cd} \text{ car } d \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc une solution particulière est :

$$y_p : t \mapsto \frac{b}{d - c} \left(m_0 - \frac{a}{c} \right) e^{-ct} + \frac{ab}{cd}.$$

(c) En déduire l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = bm - dp \\ p(0) = p_0 \end{cases} \quad (5)$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$\left\{ t \mapsto C_2 e^{-dt} + \frac{b}{d - c} \left(m_0 - \frac{a}{c} \right) e^{-ct} + \frac{ab}{cd}, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche l'unique solution du problème de Cauchy, donc on détermine C_2 pour avoir $p(0) = p_0$:

$$\begin{aligned} p(0) = p_0 &\iff C_2 + \frac{b}{d - c} \left(m_0 - \frac{a}{c} \right) + \frac{ab}{cd} = p_0 \\ &\iff C_2 = p_0 - \frac{b}{d - c} \left(m_0 - \frac{a}{c} \right) - \frac{ab}{cd} \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$p(t) = \left(p_0 - \frac{b \left(m_0 - \frac{a}{c} \right)}{d - c} - \frac{ab}{cd} \right) e^{-dt} + \frac{b \left(m_0 - \frac{a}{c} \right)}{d - c} e^{-ct} + \frac{ab}{cd}.$$

9. Calculer la limite p_∞ de $p(t)$ quand t tend vers l'infini.

Comme $d > 0$, et $c > 0$, on en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-dt} = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-ct}.$$

Donc

$$p_\infty = \frac{ab}{cd}.$$