
Programme de colle S8

1 Remarques au colleurs

- Vous pouvez demander en question de cours ou dans un exercice de prouver la formule de l'espérance ou de la variance d'une va de loi usuelle (finie ou infinie).
- Vous pouvez demander en question de cours ou dans un exercice de prouver la propriété sur la somme de deux va de loi de Poisson indépendantes.
- Seule la notion de sous-espace vectoriel a été vue cette semaine dans le chapitre 5, donc pas de famille de vecteurs pour l'instant.

2 Chapitre 3 : Variables aléatoires réelles discrètes

- notations relatives à une variable aléatoire : $(X = a)$, $(a < X \leq b)$, $(X \geq a)$,...
- univers image $X(\Omega)$, loi d'une variable aléatoire discrète
- l'ensemble $\{(X = x) \mid x \in X(\Omega)\}$ est un système quasi-complet d'événements
- fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète et propriétés : croissance, limites en $\pm \infty$, fonction en escalier, lien avec la loi de probabilité de X
- *définition* : une variable aléatoire admet une espérance si la série $\sum_{k \in X(\Omega)} k P(X = k)$ est absolument convergente, notion de variable aléatoire centrée
- propriétés de l'espérance :
 1. une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance admet une espérance et formule $E(\lambda X + \mu Y) = \dots$ (linéarité de l'espérance)
 2. positivité et croissance de l'espérance
 3. théorème de transfert : étant donnée une fonction $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, la variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$ est absolument convergente et, dans ce cas, on a $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$
- *définition* : une variable aléatoire X admet une variance si $X - E(X)$ admet un moment d'ordre 2
- théorème de Kœnig-Huygens : X admet une variance si et seulement si X admet une espérance et un moment d'ordre 2 et, dans ce cas, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- propriétés : positivité de la variance, variance de $aX + b$ si X admet une variance, la variance est nulle si et seulement si X est constante
- écart-type, variable aléatoire centrée réduite
- inégalité de Markov
- indépendance de deux variables aléatoires
- indépendance deux à deux de n variables aléatoires discrètes, indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes
- loi certaine (variable aléatoire constante), loi de Bernoulli, loi binomiale, loi uniforme
- **loi géométrique** sur $\mathbb{N}^*$ (elle correspond au rang d'apparition du premier succès lors de la répétition infinie d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes et identiques) : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$
 - espérance et variance
 - propriété d'invariance temporelle de la loi géométrique :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X > m + n \mid X > n) = P(X > m)$$

- **loi de Poisson** : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
 - espérance et variance

- possibilité d'approximer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ dans de *bonnes conditions* notamment lorsque $n \geq 30$, $p \leq 0,1$ et $np(1-p) \leq 10$
- loi d'une somme de variables aléatoires discrètes indépendante : exemple d'une somme de deux va suivant une loi de Poisson, puis de n va
- loi d'une variable aléatoire discrète définie conditionnellement à une autre : exemple d'une va Y de loi binomiale (n, p) sachant que $X = n$ où X suit une loi de Poisson
- loi du min ou du max de va discrètes indépendantes

3 Chapitre 5 : Espaces vectoriels

- opérations dans un espace vectoriel E , règles de calculs (associativité, distributivités, vecteur nul 0_E , etc), exemples fondamentaux : $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- notion de combinaison linéaire
- sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel (contient 0_E et est stable par combinaisons linéaires), intersection finie de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel

4 Fiche de révision 7 : Fonctions de deux variables

- domaine de définition d'une fonction de deux variables (domaine à savoir représenter dans le plan)
- notion *intuitive* de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, calcul pratique des dérivées partielles d'une fonction de deux variables (et par extension, de plusieurs variables)
- gradient d'une fonction de deux variables, lien avec la recherche d'extrema : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et si f admet un extremum en un point $(x, y) \in \mathcal{D}$, alors $\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y) = (0, 0)$ (*la réciproque est fausse*)
- théorème de dérivabilité et dérivée d'une fonction de la forme $t \mapsto f(x(t), y(t))$ où f est une fonction de deux variables (de classe $\mathcal{C}^1$)
- fonction de classe $\mathcal{C}^2$, théorème de symétrie de Schwartz
- ligne (ou courbe) de niveau k d'une fonction de deux variables
- plan tangent à une surface en un point (x_0, y_0) où la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$

5 Fiche de révision 8 : Calcul matriciel

- opérations sur les matrices
- algorithme du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire
- inversion d'une matrice :
 - le cas général en résolvant un système par pivot de Gauss
 - le cas général à partir d'une équation vérifiée par la matrice
- calcul d'une puissance $n^{\text{ième}}$ de matrice :
 - trouver la formule grâce aux premiers termes puis la prouver par récurrence
 - formule du binôme de Newton

6 Python

- Travail sur les listes et les tableaux (TP1)
- Simulation d'une expérience aléatoire grâce aux fonctions `random` et `randint`
- Travail sur les chaînes de caractères et les dictionnaires (TP4)

7 La question de cours

Voici quelques exemples (liste non exhaustive) :

1. Énoncer la formule des probabilités totales
2. Définir le système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète
3. Définir l'espérance d'une variable aléatoire discrète d'univers image $\mathbb{N}$
4. Définir la variance d'une variable aléatoire discrète d'univers image $\mathbb{N}$
5. Énoncer le théorème de Koenig-Huygens

6. Énoncer l'inégalité de Markov
7. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
8. Énoncer le théorème de transfert dans le cadre d'une variable aléatoire réelle discrète d'univers image égal à $\mathbb{N}$
9. Quand dit-on qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale? Quelles sont alors les espérance et variance associées?
10. Quand dit-on qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson? Quelles sont alors les espérance et variance associées?
11. Quand dit-on qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique? Quelles sont alors les espérance et variance associées?
12. Énoncer la propriété d'invariance temporelle de la loi géométrique.
13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. Définir l'indépendance deux à deux et l'indépendance mutuelle de cette famille de variables aléatoires.
14. Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète. Dresser son tableau de variation.
15. Donner la définition de sous-espace vectoriel.
16. Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.
17. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$. On note $C = A \times B$. Quelle est la taille de C ? Donner l'expression de ses coefficients.
18. Déterminer la ligne de niveau truc de $f : (x, y) \mapsto \text{machin}$ et en proposer une représentation.
19. Donner l'équation du plan tangent à une surface d'équation $z = f(x, y)$ au point de coordonnées (x_0, y_0) .
20. ...