

Chapitre 8

Réduction d'un endomorphisme

Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et f un endomorphisme de E .

1 Éléments propres d'un endomorphisme

1.1 Valeurs propres et vecteurs propres associés

Définition 1.1.1. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit encore $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est une **valeur propre** de f s'il existe $u \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(u) = \lambda u$.
- Un tel vecteur u est appelé un **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ .

Exemple 1.1.1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ d'expression analytique :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x - y, -4x + y)$$

1. Montrer que $u = (1, -2) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur propre de f . Quelle est la valeur propre associée ?

On calcule $f(1, -2) = (3, -6) = 3(1, -2)$ donc u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda = 3$.

2. Montrer que -1 est une valeur propre de f .

On cherche $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(u) = -u$.

$$f(u) = -u \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x + y \\ -y = -4x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 2x = y \end{cases} \Leftrightarrow u = y(2, 1)$$

On pose $u = (2, 1)$, alors $f(u) = -u$ donc -1 est bien une valeur propre de f .

3. Déterminer $\text{Ker}(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$. Quels sont tous les vecteurs propres de f associés à la valeur propre 3 ?

Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$u \in \text{Ker}(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) \Leftrightarrow (f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^2})(u) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$\Leftrightarrow f(u) - 3u = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$\Leftrightarrow f(u) = 3u$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3x \\ -4x + y = 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = -2x$$

$$\Leftrightarrow u = x(1, -2)$$

$$\text{donc } \text{Ker}(f - 3\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \text{Vect}((1, -2))$$

L'ensemble des $\vec{v}_p$ de f associés à la valeur propre 3 est donc :

$$\text{Vect}((1, -2)) \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}.$$

Exemple 1.1.2. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = 3P(X) - (X-1)P'(X)$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

→ Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $\deg(3P) = \deg(P)$ et $\deg(P') \leq \deg(P) - 1$ donc $\deg((X-1)P') \leq \deg(P)$.

Ainsi, par somme, $\deg(f(P)) \leq \max(\deg(3P), \deg((X-1)P')) \leq \deg(P)$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

→ Soient P et $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on calcule :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= 3(\lambda P + \mu Q) - (X-1)(\lambda P + \mu Q)' \\ &= 3\lambda P + 3\mu Q - (X-1)(\lambda P' + \mu Q') \text{ par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda(3P - (X-1)P') + \mu(3Q - (X-1)Q') \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \text{ donc } f \text{ est une application linéaire.} \end{aligned}$$

Conclu : f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(1, X, X^2)$. On calcule $f(1) = 3$, $f(X) = 2X + 1$, $f(X^2) = X^2 + 2X$

donc

$$A = \begin{pmatrix} f(1) & f(X) & f(X^2) \\ 1 & X & X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Pour tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, justifier que le polynôme $P_k = (X-1)^k$ est un vecteur propre de f dont on précisera la valeur propre associée.

$$\begin{aligned} \text{Soit } h \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \text{ on calcule : } f((X-1)^h) &= 3(X-1)^h - (X-1) \left(h (X-1)^{h-1} \right) \\ &= (3-h)(X-1)^h \end{aligned}$$

donc P_k est un v.p. de f associé à la valeur propre $\lambda_k = 3-h$.

4. Justifier que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ est une famille de 3 polynômes de degrés 2 à 2 distincts de $\mathbb{R}_2(X)$, or $\dim(\mathbb{R}_2(X)) = 3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2(X)$.

On a montré que $f(P_0) = 3P_0$, $f(P_1) = 2P_1$, $f(P_2) = P_2$ donc

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(P_0) & f(P_1) & f(P_2) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{matrix} \end{matrix}$$

5. Rappeler le lien entre les matrices A et B .

On note $P_{\mathcal{E}, \mathcal{B}}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$: $P = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_0 & P_1 & P_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T & \begin{matrix} x \\ x^2 \end{matrix} \end{matrix}$

On a alors $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(f) = P_{\mathcal{E}, \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}, \mathcal{E}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{A = P B P^{-1}}$$

Définition 1.1.2. On appelle **spectre de f** , noté $\text{Sp}(f)$, l'ensemble des valeurs propres de f . On a donc :

$$\text{Sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists u \in E \setminus \{0_E\}, f(u) = \lambda u\}$$

Exemple 1.1.3. Dans l'exemple 1.1.2 (page 3), on a vu que les nombres 1, 2 et 3 sont des valeurs propres de f (et que des vecteurs propres associés sont respectivement P_2 , P_1 et P_0). On a donc l'inclusion $\{1, 2, 3\} \subset \text{Sp}(f)$. En fait, on pourrait démontrer que l'on a trouvé toutes les valeurs propres de f , c'est-à-dire que $\text{Sp}(f) = \{1, 2, 3\}$.

1.2 Calcul pratique des valeurs propres en dimension finie

Pour chercher les valeurs propres de f (c'est-à-dire pour trouver son spectre), on utilisera le critère suivant.

Proposition 1.2.1. Soient E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie égale à n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de f (exprimée dans une base quelconque de E). Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. λ est valeur propre de f
2. $f - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injective
3. $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \lambda \text{ est valeur propre de } f &\Leftrightarrow \exists u \in E \setminus \{0\}, f(u) = \lambda u \\
 &\Leftrightarrow \exists u \in E \setminus \{0\}, f(u) - \lambda u = 0_f \\
 &\Leftrightarrow \exists u \in E \setminus \{0\}, u \in \ker(f - \lambda \text{Id}_E) \\
 &\Leftrightarrow \ker(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\} \\
 &\Leftrightarrow f - \lambda \text{Id}_E \text{ non injective} \\
 &\Leftrightarrow f - \lambda \text{Id}_E \text{ non surjective} \quad \text{car } f \text{ est un endomorphisme en dimension finie} \\
 &\Leftrightarrow \text{rg}(f - \lambda \text{Id}_E) < n
 \end{aligned}$$

Corollaire 1.2.2. L'application f est bijective si et seulement si $0 \notin \text{Sp}(f)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 f \text{ bijective} &\Leftrightarrow f \text{ est surjective (car } f \text{ est un endomorphisme en dimension finie)} \\
 &\Leftrightarrow \text{rg}(f) = n \\
 &\Leftrightarrow 0 \notin \text{Sp}(f)
 \end{aligned}$$

Exemple 1.2.1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice exprimée dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le spectre de f .

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } \lambda \in \mathbb{R}, \\
 \lambda \in \text{Sp}(A) &\Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I_3) < 3 \\
 &\Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} < 3 \\
 L_1 &\leftrightarrow L_3 \\
 &\Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 2 & 2 \end{pmatrix} < 3
 \end{aligned}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{aligned}
 L_3 &\leftrightarrow L_3 + (1-\lambda)L_1 \\
 &\Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-2\lambda & \lambda^2 - 3\lambda + 4 \end{pmatrix} < 3 \\
 L_3 &\leftrightarrow L_3 - 2L_2 \\
 &\Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{pmatrix} < 3
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2-\lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2$$

$$\text{donc } \boxed{\text{Sp}(f) = \{1, 2\}}.$$

2. L'application f est-elle bijective?

On remarque que $0 \notin \text{Sp}(f)$ donc f est bijective.

Exemple 1.2.2. On considère l'application $T : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \longrightarrow A^T \end{cases}.$

1. Justifier que T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer la matrice de T dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

→ T est à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par définition.

→ Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on calcule $T(\lambda A + \mu B) = (\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T = \lambda T(A) + \mu T(B)$

donc T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

→ La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est : $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $T(E_1) = E_1$, $T(E_2) = E_3$, $T(E_3) = E_2$ et $T(E_4) = E_4$

donc la matrice canoniquement associée à T est :

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} T(E_1) & T(E_2) & T(E_3) & T(E_4) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

2. Déterminer les valeurs propres de T .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda \in \text{Sp}(T) \Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I_4) < 4$$

$$\Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} < 4$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} < 4$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} < 4$$

$$\Leftrightarrow 1-\lambda=0 \text{ ou } 1-\lambda^2=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ou } \lambda=-1$$

$$\text{donc } \boxed{\text{Sp}(T) = \{-1, 1\}}.$$

Proposition 1.2.3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie. Si l'on dispose d'une matrice de f qui est triangulaire, alors les valeurs propres de f sont les coefficients diagonaux de cette matrice.

Exemple 1.2.3. On pose $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad f(P) = 2P + 3P' + P''$$

1. Déterminer la matrice A de f exprimée dans la base canonique de E .

La base canonique de $\mathbb{R}_3(x)$ est $1, x, x^2, x^3$. On calcule : $f(1) = 2$, $f(x) = 2x + 3$,

$$f(x^2) = 2x^2 + 6x + 2, \quad f(x^3) = 2x^3 + 9x^2 + 6x \quad \text{donc :}$$

$$A = \begin{pmatrix} f(1) & f(x) & f(x^2) & f(x^3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer les valeurs propres de f .

La matrice A est triangulaire donc les valeurs propres de f sont les coefficients diagonaux de A . Ainsi : $\boxed{\text{Sp}(f) = 2}$.

1.3 Sous-espaces propres de f

Définition 1.3.1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ** , souvent noté $E_\lambda(f)$, le noyau de $f - \lambda \text{Id}_E$. On a donc :

$$E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$$

soit encore :

$$E_\lambda(f) = \{u \in E, f(u) = \lambda u\}$$

Remarque 1.3.1.

- L'ensemble $E_\lambda(f)$ est donc un sous-espace vectoriel de E .
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
 - Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \text{Sp}(f)$, alors $E_\lambda(f) = \{0_E\}$ (car $f - \lambda \text{Id}_E$ est injectif si $\lambda \notin \text{Sp}(f)$).
 - Si $\lambda \in \text{Sp}(f)$, alors $E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$ (car $f - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injectif).
 La détermination de $E_\lambda(f)$ n'a donc un intérêt que si $\lambda \in \text{Sp}(f)$.
- Si $\lambda \in \text{Sp}(f)$, alors les vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ sont les vecteurs *non nuls* de $E_\lambda(f)$. Autrement dit :

$$E_\lambda(f) = \{\text{vecteurs propres de } f \text{ associés à } \lambda\} \cup \{0_E\}$$

Définition 1.3.2. On appelle **éléments propres de f** la donnée des valeurs propres de f (c'est-à-dire de son spectre $\text{Sp}(f)$) et de ses sous-espaces propres associés (c'est-à-dire des noyaux $E_\lambda(f)$ pour $\lambda \in \text{Sp}(f)$).

Exemple 1.3.1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les éléments propres de f .

→ Déterminons le spectre de f .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } 3-\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda(3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 3$ donc $\boxed{\text{Sp}(f) = \{0, 3\}}$.

→ Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre 0.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$u \in E_0(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y-z \Leftrightarrow u = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

$$\text{donc } \boxed{E_0(f) = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))}.$$

→ Déterminons l'espace propre associé à la valeur propre 3.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$u \in E_3(f) \Leftrightarrow f(u) = 3u \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 3x \\ x+y+z = 3y \\ x+y+z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z = 0 \\ x-2y+z = 0 \\ x+y-2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 &\leftarrow 2L_1 + L_3 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z = 0 \\ -3y+3z = 0 \\ 3y-3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow u = z(1, 1, 1)$$

donc $E_3(f) = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

2 Éléments propres d'une matrice

De la même manière, on peut définir les notions de *valeur propre*, *vecteur propre* et *sous-espace propre* pour une matrice.

Définition 2.0.1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est **une valeur propre** de A s'il existe $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tel que $AX = \lambda X$ et un tel vecteur X est appelé **un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre λ** .
- On note **$\text{Sp}(A)$** l'ensemble des valeurs propres de A (on l'appelle le spectre de A). On a donc :

$$\text{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}, AX = \lambda X\}$$

- Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$, on appelle **sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ** , noté $E_\lambda(A)$, le noyau de $A - \lambda I_n$. Autrement dit :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\} \quad (\text{c'est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$$

- On appelle **éléments propres de la matrice A** la donnée de son spectre (*i.e.* de ses valeurs propres) et de ses sous-espaces propres.

Méthode 2.1. Pour déterminer les éléments propres d'une matrice A , on procède par étapes :

1. On détermine les valeurs propres de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
 - (a) On pose $\lambda \in \mathbb{K}$ et on écrit $A - \lambda I_n$
 - (b) On échange la première et la dernière ligne
 - (c) On utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour se ramener à une matrice triangulaire supérieure
 - (d) On identifie les valeurs propres qui sont les points d'annulation des coefficients diagonaux
2. Pour tout $\lambda \in \mathbf{Sp}(A)$ on détermine l'espace propre associé E_λ en résolvant le système d'équations $AX = \lambda X$.

Exemple 2.0.1. Déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

→ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \in \mathbf{Sp}(A) \Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} < 3 \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \text{rg} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 4 \end{pmatrix} < 3$$

$$L_3 \leftarrow 2L_3 - (3-\lambda)L_2 \Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2+4\lambda+5 \end{pmatrix} < 3 \Leftrightarrow 2-\lambda=0 \text{ ou } -\lambda^2+4\lambda+5=0 \Leftrightarrow \lambda=-1 \text{ ou } \lambda=2 \text{ ou } \lambda=5$$

donc $\mathbf{Sp}(A) = \{-1, 2, 5\}$.

→ Déterminons l'espace propre associé à -1 :

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$X \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z = -x \\ 3y+4z = -y \\ 2y+z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{y+z}{3} \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases} \Leftrightarrow X = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc $E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

→ Déterminons l'espace propre associé à 2 :

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$X \in E_2(A) \Leftrightarrow AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z = 2x \\ 3y+4z = 2y \\ 2y+z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ y+4z=0 \\ 2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

→ Déterminons l'espace propre associé à 5 :

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_{\mathbb{R}, 3}^{(10)}$,

$$X \in E_5(A) \Leftrightarrow AX = 5X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 5x \\ 3y + 4z = 5y \\ 2y + z = 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_5(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

3 Lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice le représentant

Théorème 3.0.1. Les valeurs propres de f sont les valeurs propres de toute matrice A représentant cet endomorphisme f , c'est-à-dire $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$.

Remarque 3.0.1. Pour les vecteurs propres, on prendra garde au fait que les objets ne sont pas de même nature ! Un vecteur propre de f est un élément de E tandis qu'un vecteur propre de A est une matrice colonne. Plus précisément, supposons que A soit la matrice de f exprimée dans une base $\mathcal{B}$ de E , c'est-à-dire $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$. Considérons $\lambda \in \text{Sp}(f)$ et $u \in E$. Notons U la matrice des coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$ de E (i.e. $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$). On sait alors que :

$$f(u) = \lambda u \iff AU = \lambda U.$$

4 Diagonalisation d'un endomorphisme, d'une matrice

4.1 Propriétés générales sur les valeurs propres

Proposition 4.1.1. Deux vecteurs propres d'un endomorphisme associé à des valeurs propres différentes forment nécessairement une famille libre.

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(\lambda, \mu) \in \text{Sp}(f)^2$ tel que $\lambda \neq \mu$. Soient u et v des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres λ et μ respectivement. Montrons que la famille (u, v) est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0_E$

→ Supposons que $\lambda_1 \neq 0$, alors $u = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v$ donc $f(u) = \lambda u = -\frac{\lambda \lambda_2}{\lambda_1} v$

et $f(u) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} f(v) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mu v$

d'où $-\frac{\lambda \lambda_2}{\lambda_1} v = -\frac{\mu \lambda_2}{\lambda_1} v$, et comme $u \neq 0_E, \lambda_2 \neq 0$, et $v \neq 0_E$

donc $\lambda = \mu$: ABSURDE.

→ Ainsi $\lambda_1 = 0$, donc $\lambda_2 v = 0_E$, et $v \neq 0_E$ donc $\lambda_2 = 0$.

→ Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc la famille (u, v) est libre.

□

Proposition 4.1.2.

- Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs propres de $f \in \mathcal{L}(E)$ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Alors la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.
- Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $U_1, \dots, U_p$ des vecteurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Alors la famille $(U_1, \dots, U_p)$ est libre.

Corollaire 4.1.3.

- Si $\dim(E) = n$ et si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f admet au plus n valeurs propres distinctes.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres distinctes.

4.2 Propriétés générales sur les sous-espaces propres

Proposition 4.2.1.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ le spectre de f . Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, soit $\mathcal{B}_k$ une base de $E_{\lambda_k}(f)$. Alors la famille $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ (on juxtapose les bases) est une famille libre de E .
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, soit $\mathcal{B}_k$ une base de $E_{\lambda_k}(A)$. Alors la famille $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ (on juxtapose les bases) est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Remarque 4.2.1. On en déduit alors les résultats suivants en termes de dimension :

- Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on a $\sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_k}(f)) \leq \dim(E)$
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_k}(A)) \leq n$

4.3 Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable

Définition 4.3.1.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. On dit que **f est diagonalisable** s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .
Ceci signifie qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice **A est diagonalisable** s'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P d'ordres n telles que $A = PDP^{-1}$.
Autrement dit, A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.

Remarque 4.3.1. Lorsqu'on diagonalise une matrice ou un endomorphisme, les coefficients diagonaux de la matrice diagonale obtenue sont nécessairement les valeurs propres de la matrice ou de l'endomorphisme.

Exemple 4.3.1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie égale à n . On suppose que f ne possède qu'une seule valeur propre notée $\lambda \in \mathbb{K}$ et que $f \neq \lambda \text{Id}_E$. Justifier que f n'est pas diagonalisable.

Si f était diagonalisable, sa matrice serait semblable à $D = \lambda I_n$, donc on aurait :

$$A = PDP^{-1} = \lambda P I_n P^{-1} = \lambda I_n, \text{ or } f \neq \lambda \text{Id}_E, \text{ donc CONTRADICTION.}$$

C'est donc que f n'est pas diagonalisable.

4.4 Critère de diagonalisabilité

Théorème 4.4.1 (Critère de diagonalisabilité).

- Soient E un espace vectoriel de dimension finie égale à n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
 f est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à n , c'est-à-dire :

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = n$$

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$$

Exemple 4.4.1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

étudiée dans l'exemple 1.3.1 (en page 7). L'application f est-elle diagonalisable ?

→ On a montré que $\text{Sp}(A) = \{0, 3\}$, $E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Les vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre, donc

une base de $E_0(A)$, donc $\dim(E_0(A)) = 2$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc il forme une famille libre et donc une base de $E_3(A)$, et donc

$\dim(E_3(A)) = 1$.

On a donc $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = 2 + 1 = 3$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable.

Proposition 4.4.2. Si l'endomorphisme f de E (respectivement la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors :

1. f (respectivement A) est diagonalisable
2. les sous-espaces propres de f (respectivement de A) sont de dimension 1 (ce sont donc des droites vectorielles).

Méthode 4.1. Pour déterminer si une matrice ou un endomorphisme est diagonalisable on procède comme suit :

1. On détermine les valeurs propres de l'endomorphisme.
2. S'il y a n valeurs propres distinctes, on conclut directement que l'endomorphisme est diagonalisable.
3. Sinon, on détermine les espaces propres associés et en particulier leur dimension.
4. Si la somme des dimensions des espaces propres vaut n , alors l'endomorphisme est diagonalisable, sinon il n'est pas diagonalisable.

Exemple 4.4.2. Déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (exemple 2.0.1 page 9). Justifier que A est diagonalisable et expliciter des matrices D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

→ On a montré que $\text{Sp}(A) = \{-1, 2, 5\}$.

On a $\text{Card}(\text{Sp}(A)) = 3$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable.

→ On a montré que $E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_5(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

donc on pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique

de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans la base de vecteurs propres de A .

On pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. On a alors $A = PDP^{-1}$.

Méthode 4.2. Pour diagonaliser effectivement une matrice :

1. On construit D une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de la matrice, avec leur multiplicité (si λ_1 est associé à un espace propre de dimension 2, alors la diagonale comportera deux fois le coefficient λ_1).
2. On construit P la matrice formée des vecteurs propres écrits en colonne, dans l'ordre des valeurs propres.
3. On peut écrire $A = PDP^{-1}$.

Remarque 4.4.1. Pour qu'une matrice ou un endomorphisme soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$, il faut donc que ses valeurs propres soient réelles. Cette notion soulève naturellement la question suivante : existe-t-il des matrices/endomorphismes diagonalisables dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$? La réponse est oui.

Exemple 4.4.3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$? Effectuer la diagonalisation le cas échéant.

→ Déterminons le spectre de A dans $\mathbb{R}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

or cette équation n'a pas de solution réelle donc A ne

possède pas de valeurs propres réelles et donc

A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

→ Déterminons le spectre de A dans $\mathbb{C}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = i \text{ ou } \lambda = -i$$

$$\text{donc } \boxed{\text{Sp}(A) = \{-i, i\}}.$$

A est une matrice de taille 2 qui possède 2 valeurs propres

distinctes donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

→ Déterminons l'espace propre associé à i .

Soit $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$,

$$x \in E_i(A) \Leftrightarrow Ax = ix \Leftrightarrow \begin{cases} -y = iz \\ x = iy \end{cases} \Leftrightarrow x = iy \Leftrightarrow x = y \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \boxed{E_i(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right)}.$$

→ Déterminons l'espace propre associé à $-i$.

Soit $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$,

$$x \in E_{-i}(A) \Leftrightarrow Ax = -ix \Leftrightarrow \begin{cases} -y = -iz \\ x = -iy \end{cases} \Leftrightarrow x = -iy \Leftrightarrow x = y \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \boxed{E_{-i}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right)}.$$

$$\rightarrow \text{On pose } D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{alors } \boxed{A = PDP^{-1}}.$$

5 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

Théorème 5.0.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **diagonalisable**. Soient une matrice diagonale D et une matrice inversible P de taille n telles que $A = PDP^{-1}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Remarque 5.0.1. Il faut prouver ce résultat à chaque fois qu'on l'utilise.

Démonstration.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(m)$: " $A^m = P D^m P^{-1}$ " et on montre par récurrence que $\forall m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(m)$ est vraie.

• Init : $A^0 = I_3$ et $P D^0 P^{-1} = P I_3 P^{-1} = I_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Hérité : Soit $m \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{P}(m)$ soit vraie. Il y a $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.

$$\text{Donc } A^{m+1} = A \times A^m$$

$$= A \times P D^m P^{-1} \text{ par HR}$$

$$= P D P^{-1} \times P D^m P^{-1} \text{ car } A = P D P^{-1}$$

$$= P D^{m+1} P^{-1}$$

donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.

• Conclusion : $\forall m \in \mathbb{N}, A^m = P D^m P^{-1}$.

□