

TD 8 Correction - Réduction d'un endomorphisme

Compétences à acquérir :

- ▷ C1 : Déterminer les valeurs propres, les sous-espaces propres d'une matrice, d'un endomorphisme
- ▷ C2 : Étudier la diagonalisabilité d'une matrice, d'un endomorphisme
- ▷ C3 : Déterminer les puissances d'une matrice à partir de sa diagonalisation

Exercice 1 (C1-C2)  1. Étudier la diagonalisabilité de chacune des matrices suivantes. Lorsque c'est possible diagonaliser la matrice.

(a) $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

Déterminons le spectre de A . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\iff \text{rg}(A - \lambda I_2) < 2 \iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \iff \begin{vmatrix} -5 - \lambda & -4 \\ 6 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (-5 - \lambda)(5 - \lambda) + 24 = 0 \\ &\iff \lambda^2 = 1 \\ &\iff \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{Sp}(A) = \{-1, 1\}}$. La matrice A est d'ordre 2 et possède deux valeurs propres distinctes donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$. Déterminons maintenant les sous-espaces propres $E_{-1}(A)$ et $E_1(A)$ associés.

- Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) &\iff (A + I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff y = -x \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

et donc $\boxed{E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}$.

- Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(A) &\iff (A - I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff y = -\frac{3x}{2} \\
 &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

et donc $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3/2 \end{pmatrix}$.

(b) $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$

Déterminons le spectre de B . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 \lambda \in \text{Sp}(B) &\iff \text{rg}(B - \lambda I_2) < 2 \iff \det(B - \lambda I_2) = 0 \iff \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 9 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\
 &\iff (4 - \lambda)(-2 - \lambda) + 9 = 0 \\
 &\iff \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \\
 &\iff (\lambda - 1)^2 = 0 \\
 &\iff \lambda = 1
 \end{aligned}$$

Donc $\text{Sp}(B) = \{1\}$.

Si B était diagonalisable, alors B serait semblable à la matrice I_2 , mais alors on aurait $B = PI_2P^{-1} = I_2$, ce qui est absurde. Donc B n'est pas diagonalisable.

$$(c) \ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminons le spectre de C . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(C) &\iff \text{rg}(C - \lambda I_2) < 3 \iff \text{rg} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} < 3 \\ &\iff \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} < 3 \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &\iff \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & -1+\lambda & -\lambda^2+4\lambda-3 \end{pmatrix} < 3 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda \\ -1+\lambda & -\lambda^2+4\lambda-3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda-3) - (-1+\lambda)^2 = 0 \\ &\iff (1-\lambda)^2(\lambda-4) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{Sp}(C) = \{1, 4\}}$. Pour savoir si C est diagonalisable, on doit déterminer les dimensions des espaces propres associés.

- Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4(C) &\iff C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

et donc $\boxed{E_4(C) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$. Ce vecteur est non nul donc il forme une base de

E_4 et $\dim(E_4) = 1$.

- Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(C) &\iff C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff x + y + z = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

et donc $E_1(C) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Ces deux vecteurs sont linéairement

indépendants donc ils forment une base de E_1 et $\dim(E_1) = 2$.

Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3, et l'ordre de la matrice

C est 3, donc la matrice C est diagonalisable. On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et

$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a alors $C = PDP^{-1}$.

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

— **Méthode 1 :** (la plus rapide)

La matrice D est triangulaire (supérieure) donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Le spectre de D est donc $\text{Sp}(D) = \{1\}$. Si D est diagonalisable, alors il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $D = PI_3P^{-1}$, c'est-à-dire $D = I_3$ ce qui est absurde. Donc :

la matrice D n'est pas diagonalisable

— **Méthode 2 :** (efficace aussi)

La matrice D est triangulaire (supérieure) donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Le spectre de D est donc $\text{Sp}(D) = \{1\}$. On a :

$$\text{rg}(D - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

D'après le théorème du rang pour les matrices, on a :

$$\dim(\text{Ker}(D - I_3)) + \text{rg}(D - I_3) = 3 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \dim(E_1(D)) = 1$$

où $E_1(D)$ désigne le sous-espace propre de D associé à la valeur propre 1. En particulier, $\dim(E_1(D)) \neq 3$ (la taille de la matrice) donc :

la matrice D n'est pas diagonalisable

— **Méthode 3 :** (la plus longue)

La matrice D est triangulaire (supérieure) donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Le spectre de D est donc $\text{Sp}(D) = \{1\}$. Déterminons le sous-

espace propre $E_1(D)$ de D associé à la valeur propre 1. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(D) &\iff (D - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y + 3z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \\ &\iff y = 0 \text{ et } z = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $E_1(D) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et donc $\dim(E_1(D)) = 1$. En effet, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $E_1(D)$ car ç'en est une famille génératrice et libre (puisque constituée d'un unique vecteur non nul). En particulier, $\dim(E_1(D)) \neq 3$ donc :

la matrice D n'est pas diagonalisable

2. Étudier la diagonalisabilité dans $\mathbb{C}$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et si c'est possible,

diagonaliser la matrice.

On trouve $\text{Sp}(A) = \{2, 1 - i, 1 + i\}$. La matrice admet trois valeurs propres distinctes dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ donc elle est diagonalisable. On a :

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E_{1-i}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix} \right), \quad E_{1+i}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix} \right).$$

On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & i \\ 1 & i & -i \end{pmatrix}$, on obtient $A = PDP^{-1}$.

3. La fonction `numpy.linalg.eig` permet de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice, comme le montre l'exemple suivant :

```
import numpy.linalg as la
vap, vep = la.eig([[1,2],[3,4]])
```

Après cette suite d'instructions, la variable `vap` contient la liste des valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et la variable `vep` est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de cette matrice.

Utiliser l'outil informatique pour déterminer les éléments propres de la matrice $E = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifiera mathématiquement les résultats obtenus. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si oui, diagonaliser cette matrice.

On écrit le programme suivant :

```

1 import numpy.linalg as la
2 vap, vep = la.eig([[5,-1],[3,1]])

```

On affiche ensuite les valeurs de `vap` et `vep` :

```

>>> vap
array([4., 2.])

>>> vep
array([[0.70710678, 0.31622777],
       [0.70710678, 0.9486833 ]])

```

On trouve donc $\text{Spec}(E) = \{2, 4\}$. On détermine à la main les espaces propres associés et on obtient $E_2 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La première colonne de `vep` est bien un élément de E_4 et sa deuxième colonne un élément de E_2 .

4. Étudier la diagonalisabilité des applications linéaires suivantes et diagonaliser l'application le cas échéant.

(a) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (y + z, x + z, x + y) \end{cases}$

Notons A la matrice de f exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— **Détermination des éléments propres de f .**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \iff \text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{matrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda - 1 & 1 + \lambda \\ 0 & 1 + \lambda & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \end{matrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda - 1 & 1 + \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2 + \lambda + 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

Donc :

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \iff -\lambda - 1 = 0 \text{ ou } -\lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \iff \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 2$$

Le spectre de A est donc $\text{Sp}(f) = \{-1, 2\}$.

— On détermine maintenant les **sous-espaces propres associés**.

- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in E_{-1}(f) &\iff (A + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff x + y + z = 0 \\
&\iff (x, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \\
&\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))
\end{aligned}$$

Donc $E_{-1}(f) = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Ce sous-espace propre est de dimension 2 car la famille $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ en est une base (elle est génératrice de $E_{-1}(f)$ et elle est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires).

- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in E_2(f) &\iff (A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 & L_1 \\ x - 2y + z = 0 & L_2 \\ x + y - 2z = 0 & L_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 & L_1 \\ -3y + 3z = 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ 3y - 3z = 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{cases} \\
&\iff x = y = z = 1 \\
&\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((1, 1, 1))
\end{aligned}$$

et donc $E_2(f) = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et $\dim(E_2(f)) = 1$ (une base de ce sous-espace propre étant la famille constituée de l'unique vecteur non nul $(1, 1, 1)$).

— **Étude de la diagonalisabilité de f .**

On remarque que :

$$\dim(E_{-1}(f)) + \dim(E_2(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

donc l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est diagonalisable.

— **Lien matriciel.** Si on note :

▷ D la matrice de f exprimée dans la base $\mathcal{C} = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$ de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

▷ P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base $\mathcal{C}$, c'est-à-dire

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors l'égalité $D = P^{-1}AP$, ce qui se réécrit $A = PDP^{-1}$.

$$(b) \ g : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto {}^t M \end{cases}$$

On considère la base suivante pour $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note G la matrice associée à l'endomorphisme g dans cette base. On a $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminons les valeurs propres de G .

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Spec}(G) &\iff \text{rg}(G - \lambda I_4) < 4 \\ &\iff \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} < 4 \\ &\iff \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} < 4 \quad L2 \leftrightarrow L3 \\ &\iff \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} < 4 \quad L3 \leftrightarrow L3 + \lambda L2 \\ &\iff 1-\lambda = 0 \text{ ou } 1-\lambda^2 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1 \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{Spec}(G) = \{-1, 1\}}$.

Pour savoir si G est diagonalisable, on détermine les espaces propres associés. On

trouve $E_1(G) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Ces vecteurs forment une famille libre

donc une base de $E_1(G)$, qui est donc de dimension 3. De plus, $E_{-1}(G) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

et ce vecteur est non nul donc il forme une base de $E_{-1}(G)$ qui est de dimension 1.

Ainsi, la somme des dimensions des espaces propres est 4, donc G est diagonalisable.

On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a alors $\boxed{G = PDP^{-1}}$.

(c) $h : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto XP' - P'' \end{cases}$ Déterminons la matrice H canoniquement associée à

h . On a $h(1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$, $h(X) = X$ et $h(X^2) = 2X^2 - 2$ donc $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice H est triangulaire (supérieure) donc le spectre de h sont les coefficients diagonaux de h . Le spectre de h est donc $\text{Sp}(h) = \{0, 1, 2\}$. En particulier, h admet trois valeurs propres et est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3 donc :

l'application h est diagonalisable

On sait de plus que les sous-espaces propres de h sont des droites vectorielles. On remarque que :

$$h(1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} = 0 \times 1, \quad h(X) = X = 1 \times X \quad \text{et} \quad h(X^2 - 1) = h(X^2) - h(1) = 2(X^2 - 1)$$

en utilisant la linéarité de h . Ainsi, les vecteurs 1 , X et $X^2 - 1$ (qui sont non nuls) sont des vecteurs propres de h associés aux valeurs propres 0 , 1 et 2 respectivement. Comme $E_0(h)$, $E_1(h)$ et $E_2(h)$ sont des droites vectorielles, on a les égalités :

$$E_0(h) = \text{Vect}(1), \quad E_1(h) = \text{Vect}(X) \quad \text{et} \quad E_2(h) = \text{Vect}(X^2 - 1)$$

La famille $\mathcal{B} = (1, X, X^2 - 1)$, obtenue par juxtaposition des bases des sous-espaces propres de h , est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (car h est diagonalisable) et :

la matrice de h dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2 - 1)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (C2)  On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $A^2 + A - 2I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et on obtient $A^2 + A - 2I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

2. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3 .

On a $A^2 + A = 2I_3$ donc $\frac{1}{2}(A^2 + A) = I_3$, ce qui se réécrit $A \left[\frac{1}{2}(A + I_3) \right] = I_3$. On a

aussi $\frac{1}{2}(A + I_3)A = I_3$ donc :

la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$

(a) Factoriser le polynôme $P(X) = X^2 + X - 2$.

Les racines de P sont 1 et -2 (et son coefficient dominant vaut 1) donc

$$P(X) = (X - 1)(X + 2).$$

(b) Montrer que les valeurs propres λ de A vérifient l'équation $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Il existe $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et $AX = \lambda X$. On a alors :

$$A^2X = AAX = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X$$

Comme $A^2 + A - 2I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, on a (en multipliant par X) :

$$(A^2 + A - 2I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad \text{c'est-à-dire} \quad A^2X + AX - 2X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

et donc $\lambda^2 X + \lambda X - 2X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$, c'est-à-dire $(\lambda^2 + \lambda - 2)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or $X \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ donc $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, c'est-dire $P(\lambda) = 0$. Autrement dit, $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$. On a donc l'inclusion $\text{Sp}(A) \subset \{1, -2\}$.

(c) En déduire le spectre de A .

On a $\text{rg}(A - I_3) = \dots = 1 < 3$ tandis que $\text{rg}(A + 2I_3) = \dots = 2 < 3$. On a donc $(1, -2) \in \text{Sp}(A)^2$, d'où l'égalité $\boxed{\text{Sp}(A) = \{1, -2\}}$.

3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

D'après le théorème du rang, on a (en notant $E_1(A)$ et $E_{-2}(A)$ les sous-espaces propres de A) :

$$\dim(E_1(A)) = 3 - \text{rg}(A - I_3) = 2 \quad \text{et} \quad \dim(E_{-2}(A)) = 3 - \text{rg}(A + 2I_3) = 1$$

En particulier, $\dim(E_1(A)) + \dim(E_{-2}(A)) = 3$, ce qui correspond à la taille de la matrice A . On en déduit donc que $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable}}$.

Exercice 3 (C2-C3)  On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par ses trois premiers termes u_0, u_1 et u_2 et par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour tout entier naturel n .

1. Écrire une fonction informatique qui prend en argument u_0, u_1 et u_2 et qui renvoie la liste des 100 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On peut procéder par exemple comme suit en appelant cette fonction avec $n = 100$.

```

1 def Suite(n,u0,u1,u2):
2     L=[u0,u1,u2]
3     for k in range(3,n):
4         L.append(2*L[k-1]+L[k-2]-2*L[k-3])
5     return L

```

2.(a) Montrer que $\text{Sp}(A) = \{-1, 1, 2\}$.

— On remarque que $\text{rg}(A + I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} < 3$ car $C_1 + C_3 = C_2$, donc $-1 \in \text{Spec}(A)$.

— On remarque que $\text{rg}(A - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} < 3$ car $-C_1 - C_2 = C_3$, donc $1 \in \text{Spec}(A)$.

— On remarque que $\text{rg}(A - 2I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} < 3$ car $L_1 = L_3$, donc $2 \in \text{Spec}(A)$.

On a montré que $\boxed{\text{Sp}(A) = \{-1, 1, 2\}}$ car A ne peut pas avoir plus de 3 valeurs propres distinctes.

- (b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Préciser le cas échéant des matrices P inversible et D diagonale d'ordre 3 telles que $A = PDP^{-1}$.

La matrice A possède trois valeurs propres distinctes, $\boxed{A \text{ est donc diagonalisable}}$. On

pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On détermine les espaces propres associés à chacune des valeurs propres :

$$E_{-1}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pose alors $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on obtient $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

3. Pour tout entier naturel n , exprimer X_n en fonction de A , n et X_0 .

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) : \ll X_n = A^n X_0 \gg$ est vraie.

— *Initialisation* : Pour $n = 0$, on a $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par définition de la suite (u_n) , on a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= A \times X_n \\ &= A \times A^n X_0 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} X_0 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

— *Conclusion* : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} X_n = A^n X_0}$

4. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a + b(-1)^n + c2^n$$

On ne cherchera pas à expliciter les nombres a , b et c .

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) : \ll A^n = PD^n P^{-1} \gg$ est vraie.

— *Initialisation* : Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_3$ et $PD^0 P^{-1} = PI_3 P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times PD^n P^{-1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= PDP^{-1} \times PD^n P^{-1} \\ &= PDI_3 D^n P^{-1} \\ &= PD^{n+1} P^{-1} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

— *Conclusion* : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} A^n = P D^n P^{-1}}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N} A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$, donc il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a + b(-1)^n + c2^n.$$

Exercice 4 (C1-C2)  Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ définie de la manière suivante. Si $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$ (où x, y et z sont trois nombres réels), alors :

$$f(u) = (x + 2y - z)e_1 + (-2x - 3y + 3z)e_2 + (x + y - 2z)e_3$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

- Pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, on a $f(u) \in \mathbb{R}^3$ car $f(u)$ est une combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2 et e_3 (par définition de $f(u)$). On a donc l'inclusion $f(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^3$.
- Montrons que f est linéaire. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$, $v = ae_1 + be_2 + ce_3 \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$u + \lambda v = (x + \lambda a)e_1 + (y + \lambda b)e_2 + (z + \lambda c)e_3$$

donc, par définition de f :

$$\begin{aligned} f(u + \lambda v) &= [x + \lambda a + 2(y + \lambda b) - (z + \lambda c)]e_1 + [-2(x + \lambda a) - 3(y + \lambda b) + 3(z + \lambda c)]e_2 \\ &\quad + [(x + \lambda a + y + \lambda b - 2(z + \lambda c))]e_3 \\ &= (x + 2y - z)e_1 + \lambda(a + 2b - c)e_1 + (-2x - 3y + 3z)e_2 + \lambda(-2a - 3b + 3c)e_2 \\ &\quad + (x + y - 2z)e_3 + \lambda(a + b - 2c)e_3 \\ &= [(x + 2y - z)e_1 + (-2x - 3y + 3z)e_2 + (x + y - 2z)e_3] \\ &\quad + \lambda[(a + 2b - c)e_1 + (-2a - 3b + 3c)e_2 + (a + b - 2c)e_3] \\ &= f(u) + \lambda f(v) \end{aligned}$$

L'application f est donc linéaire.

Finalement :

$f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3$

2. Donner la matrice M de f exprimée dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

On a :

$$f(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - 3e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = -e_1 + 3e_2 - 2e_3$$

donc la matrice M de f exprimée dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Donner les éléments propres de f et montrer que f est diagonalisable.

Déterminons le spectre $\text{Sp}(f)$ de f . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \iff \text{rg}(M - \lambda I_3) < 3$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2-\lambda \\ -2 & -3-\lambda & 3 \\ 1-\lambda & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & -1-2\lambda \\ 0 & 1+\lambda & -\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{array} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & -1-2\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2-3\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \iff -1-\lambda = 0 \text{ ou } -\lambda^2-3\lambda = 0 \iff \lambda \in \{-3, -1, 0\}$$

On a donc l'égalité $\text{Sp}(f) = \{-3, -1, 0\}$. Ainsi, f admet trois valeurs propres distinctes et est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc :

f est diagonalisable

On remarque que :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ce qui se réécrit :

$$f(e_1 - e_2) = -(e_1 - e_2), \quad f(3e_1 - e_2 + e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\text{et} \quad f(3e_1 - 5e_2 + 2e_3) = -3(3e_1 - 5e_2 + 2e_3)$$

Les vecteurs $e_1 - e_2$, $3e_1 - e_2 + e_3$ et $3e_1 - 5e_2 + 2e_3$, qui sont non nuls (car la famille (e_1, e_2, e_3) est libre) sont donc des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres -1 , 0 et -3 respectivement. Les familles $((1, -1, 0))$, $((3, -1, 1))$ et $(3, -5, 2))$ sont libres (car elles sont constituées d'un unique vecteur non nul) et les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles donc :

$$E_{-1}(f) = \text{Vect}(e_1 - e_2), \quad E_0(f) = \text{Vect}(3e_1 - e_2 + e_3)$$

$$\text{et} \quad E_{-3}(f) = \text{Vect}(3e_1 - 5e_2 + 2e_3)$$

4. Déterminer une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice (notée D) de f est diagonale et préciser le lien entre les matrices D et M .

Comme f est diagonalisable, la famille $\mathcal{B} = (e_1 - e_2, 3e_1 - e_2 + e_3, 3e_1 - 5e_2 + 2e_3)$, obtenue par juxtaposition des bases des sous-espaces propres de $\mathbb{R}^3$, est une base de $\mathbb{R}^3$. De plus :

en posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a l'égalité $M = PDP^{-1}$

Exercice 5 (C1-C2)  Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$u(e_1) = u(e_n) = \sum_{k=1}^n e_k \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, u(e_k) = e_n$$

- 1.(a) Déterminer une base de $\text{Im}(u)$. L'application u est-elle bijective ?

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) = \text{Vect}(e_1 + \dots + e_n, e_n)$$

d'après les données de l'énoncé. Les vecteurs :

$$e_1 + \dots + e_n = (1, 1, \dots, 1) \quad \text{et} \quad e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

ne sont pas colinéaires donc la famille $(e_1 + \dots + e_n, e_n)$ est libre. Cette famille est de plus génératrice de l'image de u d'après l'égalité précédemment obtenue. Ainsi :

une base de $\text{Im}(u)$ est $(e_1 + \dots + e_n, e_n)$

La base obtenue est constituée de deux vecteurs donc $\dim(\text{Im}(u)) = 2$. Comme $n \geq 3$, on a en particulier $\dim(\text{Im}(u)) \neq \dim(\mathbb{R}^n)$ (la dimension de $\mathbb{R}^n$ étant égale à n). Ainsi, l'application u n'est pas surjective, ce qui implique que :

u n'est pas bijective

- (b) Donner une base du sous-espace propre de u associé à la valeur propre 0.

Le sous-espace propre de u associé à la valeur propre 0 est le noyau de u . Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, on a d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u)) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \dim(\text{Ker}(u)) = n - 2$$

On sait que $u(e_1) = u(e_n)$ donc, par linéarité de u , on a $u(e_1 - e_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Le même raisonnement permet d'obtenir que $u(e_k - e_2) = 0_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $k \in \llbracket 3, n-1 \rrbracket$. Ainsi, $(e_1 - e_n, e_3 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_2)$ est une famille d'éléments du noyau de u de cardinal $n - 2$. Comme on sait de plus que $\dim(\text{Ker}(u)) = n - 2$, il suffit d'établir la liberté de cette famille pour prouver qu'elle constitue une base de $\text{Ker}(u)$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-2}$ tel que :

$$\lambda_1(e_1 - e_n) + \lambda_2(e_3 - e_2) + \dots + \lambda_{n-2}(e_{n-1} - e_2) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Alors :

$$\lambda_1 e_1 + (-\lambda_2 - \dots - \lambda_{n-2})e_2 + \lambda_2 e_3 + \lambda_3 e_4 + \dots + \lambda_{n-2} e_{n-1} - \lambda_1 e_n = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Or la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre (puisque'il s'agit de la base canonique de $\mathbb{R}^n$) donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 - \dots - \lambda_{n-2} = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-2} = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \end{array} \right. \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket, \quad \lambda_k = 0$$

Ainsi, la famille $(e_1 - e_n, e_3 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_2)$ est libre. Finalement :

une base de $\text{Ker}(u)$ est $(e_1 - e_n, e_3 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_2)$

2. Montrer que tout vecteur propre de u associé à une valeur propre non nulle appartient à l'image de u .

Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ un vecteur propre de u associé à une valeur propre non nulle $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

On a donc $u(x) = \lambda x$. Comme $\lambda \neq 0$, on peut écrire que $x = \frac{1}{\lambda}u(x)$ soit encore (par linéarité de u) $x = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right)$. Le vecteur x appartient donc à l'image de u . Ainsi :

tout vecteur propre de u associé à une valeur propre non nulle appartient à l'image de u

3. En déduire les sous-espaces propres de u . L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ est-il diagonalisable ? On sait que 0 est valeur propre de u et que le sous-espace propre associé est de dimension $n - 2$ (d'après la question 1.(b)). Déterminons les valeurs propres non nulles de u . Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Alors x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $x = \alpha(e_1 + \dots + e_n) + \beta e_n$ avec $u(x) = \lambda x$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de u , on a :

$$\begin{aligned} u(x) = \lambda x &\iff \alpha(u(e_1) + \dots + u(e_n)) + \beta u(e_n) = \lambda \alpha(e_1 + \dots + e_{n-1}) + \lambda(\alpha + \beta)e_n \\ &\iff (2\alpha + \beta)(e_1 + \dots + e_n) + (n - 2)\alpha e_n = \lambda \alpha(e_1 + \dots + e_{n-1}) + \lambda(\alpha + \beta)e_n \\ &\iff (2\alpha + \beta)e_1 + \dots + (2\alpha + \beta)e_{n-1} + (n\alpha + \beta)e_n = \lambda \alpha(e_1 + \dots + e_{n-1}) \\ &\quad + \lambda(\alpha + \beta)e_n \\ &\iff \begin{cases} 2\alpha + \beta = \lambda \alpha \\ n\alpha + \beta = \lambda(\alpha + \beta) \end{cases} \quad (\text{car la famille } (e_1, \dots, e_n) \text{ est libre}) \\ &\iff \begin{cases} (2 - \lambda)\alpha + \beta = 0 \\ (n - \lambda)\alpha + (1 - \lambda)\beta = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ n - \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, λ est valeur propre de u si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ vérifiant l'égalité précédente. Un tel vecteur existe si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ n - \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible c'est-à-dire si et seulement si le déterminant de cette matrice est nul. Or :

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ n - \lambda & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 - n$$

Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut $4(n - 1) > 0$ car $n \geq 3$. Ainsi, les racines du trinôme (et les valeurs propres non nulles de u) sont :

$$\lambda_- = 1 - \sqrt{n - 1} \quad \text{et} \quad \lambda_+ = 1 + \sqrt{n - 1} \quad (\text{on a bien } \lambda_- \neq 0 \text{ et } \lambda_+ \neq 0)$$

En reprenant les notations et la chaîne d'équivalence précédente, on a :

$$\begin{aligned}
u(x) = \lambda_- x &\iff \begin{pmatrix} 2 - \lambda_- & 1 \\ n - \lambda_- & 1 - \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{n-1} & 1 \\ n - 1 + \sqrt{n-1} & \sqrt{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} (1 + \sqrt{n-1})\alpha + \beta = 0 & L_1 \\ (n - 1 + \sqrt{n-1})\alpha + \sqrt{n-1}\beta = 0 & L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (1 + \sqrt{n-1})\alpha + \beta = 0 & L_1 \\ 0 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - \sqrt{n-1}L_1 \end{cases} \\
&\iff \beta = -(1 + \sqrt{n-1})\alpha \\
&\iff x = \alpha(e_1 + \dots + e_n - (1 + \sqrt{n-1})e_n) \\
&\iff x \in \text{Vect}(e_1 + \dots + e_n - (1 + \sqrt{n-1})e_n)
\end{aligned}$$

Ainsi, le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_- est :

$$E_{\lambda_-} = \text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n-1} - \sqrt{n-1}e_n)$$

La famille $(e_1 + \dots + e_{n-1} - \sqrt{n-1}e_n)$ est génératrice de E_{λ_-} et elle est libre car constituée d'un unique vecteur non nul. Il s'agit donc d'une base de E_{λ_-} .

De la même manière, on a :

$$E_{\lambda_+} = \text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n-1} + \sqrt{n-1}e_n)$$

et une base de E_{λ_+} est $(e_1 + \dots + e_{n-1} + \sqrt{n-1}e_n)$.

On sait que u admet trois valeurs propres (distinctes) : 0, λ_- et λ_+ . On a de plus :

$$\dim(E_0(u)) + \dim(E_{\lambda_-}(u)) + \dim(E_{\lambda_+}(u)) = (n-2) + 1 + 1 = n = \dim(\mathbb{R}^n)$$

Comme u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on peut donc conclure que :

u est diagonalisable

Exercice 6 (C1-C2-C3)  On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\text{Sp}(A) = \{-1\}$ et déterminer le sous-espace propre associé.

On trouve que A admet -1 pour unique valeur propre et que le sous-espace propre associé est $E_{-1}(A) = \text{Vect}((1, 1, -1))$.

2. Justifier que les matrices A et B sont semblables.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est A . Alors A et B sont semblables si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(u) = -u$, $f(v) = u - v$ et $f(w) = v - w$. Le vecteur $u = (1, 1, -1)$ convient d'après la question 1. Ensuite, on cherche les vecteurs v et w en résolvant les systèmes associés. On trouve $v = (0, 1, -1)$ et $w = (0, 0, 1)$. On vérifie aussi que la famille (u, v, w) est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

3. En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$ obtenue à la question 2 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après les formules de changement de base, on a l'égalité $A = PBP^{-1}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n) : \ll A^n = PB^nP^{-1} \gg$ est vraie.

— *Initialisation* : Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_3$ et $PB^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times PB^nP^{-1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= PBP^{-1} \times PB^nP^{-1} \\ &= PBI_3B^nP^{-1} \\ &= PB^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

— *Conclusion* : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PB^nP^{-1}}$

Il reste à calculer les puissances de B . On utilise la formule du binôme de Newton avec

les matrices $-I_3$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, en remarquant que $N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ pour tout entier

$k \geq 3$. On peut appliquer la formule du binôme de Newton puisque les matrices $-I_3$ et N commutent. Soit $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} B^n &= (N - I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (-I_3)^{n-k} \\ &= N^0 + \binom{n}{1} N^1 (-I_3)^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 (-I_3)^{n-2} + 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \text{ car } \forall k \geq 3, N^k = 0 \\ &= I_3 + (-1)^{n-1} n N + (-1)^n \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{n-1} n & (-1)^n \frac{n(n-1)}{2} 0 & 1 & (-1)^{n-1} n 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \geq 2, B^n = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{n-1} n & (-1)^n \frac{n(n-1)}{2} 0 & 1 & (-1)^{n-1} n 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$

Pour finir, il faut encore calculer P^{-1} . On obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule maintenant $A^n = PB^nP^{-1}$.

Exercice 7 (C1-C2-C3)  Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminons le spectre de A . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 - \lambda \\ -1 & 1 - \lambda & -1 \\ 1 - \lambda & m & m \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda \\ 0 & m & m - (1 - \lambda)(2 - \lambda) \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1 - \lambda)L_1 \end{array} \end{aligned} \quad (1)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\iff (1 - \lambda)(-\lambda^2 + 3\lambda + m - 2) - (1 - \lambda)m = 0 \\ &\iff (1 - \lambda)(-\lambda^2 + 3\lambda - 2) = 0 \\ &\iff (1 - \lambda)^2(\lambda - 2) = 0 \\ &\iff \lambda \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

- On a donc d'après (1) :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - 2I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & m & m \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + mL_2 \end{array} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Le théorème du rang pour les matrices nous donne alors (en notant $E_1(A)$ et $E_2(A)$ les sous-espaces propres de A :

$$3 = \text{rg}(A - 2I_3) + \dim(E_2(A)) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \dim(E_2(A)) = 1$$

- En utilisant à nouveau (1), on a :

$$\text{rg}(A - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & m \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 2 & \text{si } m \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Le théorème du rang pour les matrices nous donne donc :

$$\dim(E_1(A)) = \begin{cases} 2 & \text{si } m = 0 \\ 1 & \text{si } m \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A vaut donc :

$$\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = \begin{cases} 3 & \text{si } m = 0 \\ 2 & \text{si } m \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Or A est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à 3 (la taille de A). Finalement :

la matrice A est diagonalisable si et seulement si $m = 0$.

Exercice 8 (C1-C2)  Pour tout nombre réel x , on pose :

$$f_1(x) = e^{3x}, \quad f_2(x) = e^{-x}, \quad f_3(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad f_4(x) = \cos(x)$$

On pose $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E .

Par définition, la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de E . Montrons que c'est une famille libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0_E. \quad (2)$$

On évalue en $x = 0$ l'équation (2) et ses dérivées première, deuxième et troisième (toutes ces fonctions sont $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ comme fonctions usuelles). On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 9\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ 27\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_4 = 4\lambda_1 \\ \lambda_3 = 8\lambda_1 \\ \lambda_2 = -5\lambda_1 \\ 27\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

donc la famille $\mathcal{B}$ est libre, c'est donc une base de E .

2. Soit $h \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On définit l'application T_h qui à $f \in E$ associe l'application g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x+h)$$

Montrer que T_h est un endomorphisme de E et donner sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

Soit $h \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ fixé. On pose $f \in E$ et on explicite $T_h(f)$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} T_h(f) &= T_h(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4) \\ &= (x \mapsto \lambda_1 f_1(x+h) + \lambda_2 f_2(x+h) + \lambda_3 f_3(x+h) + \lambda_4 f_4(x+h)) \\ &= (x \mapsto \lambda_1 e^{3h} f_1(x) + \lambda_2 e^{-h} f_2(x) + \lambda_3 (\cos(h)f_3(x) + \sin(h)f_4(x)) \\ &\quad + \lambda_4 (\cos(h)f_4(x) - \sin(h)f_3(x))) \\ &= (x \mapsto \lambda_1 e^{3h} f_1(x) + \lambda_2 e^{-h} f_2(x) + (\lambda_3 \cos(h) - \lambda_4 \sin(h))f_3(x) \\ &\quad + (\lambda_3 \sin(h) + \lambda_4 \cos(h))f_4(x)) \end{aligned}$$

donc $T_h(f) \in E$. On montre simplement que T_h est un endomorphisme de E . Sa matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} e^{3h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(h) & -\sin(h) \\ 0 & 0 & \sin(h) & \cos(h) \end{pmatrix}.$$

3. Donner les valeurs propres de T_h et étudier sa diagonalisabilité dans $\mathbb{R}$.
On détermine les valeurs propres de T_h .

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{Sp}(T_h) &\iff \text{rg}(M - \lambda I_4) < 4 \\ &\iff \text{rg} \begin{pmatrix} e^{3h} - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-h} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(h) - \lambda & -\sin(h) \\ 0 & 0 & \sin(h) & \cos(h) - \lambda \end{pmatrix} < 4 \\ &\iff \lambda = e^{3h} \text{ ou } \lambda = e^{-h} \text{ ou } \det \begin{pmatrix} \cos(h) - \lambda & -\sin(h) \\ \sin(h) & \cos(h) - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \lambda = e^{3h} \text{ ou } \lambda = e^{-h} \text{ ou } (\cos(h) - \lambda)^2 + \sin(h)^2 = 0 \\ &\iff \lambda = e^{3h} \text{ ou } \lambda = e^{-h} \text{ ou } \lambda^2 - 2\lambda \cos(h) + 1 = 0\end{aligned}$$

or le discriminant du polynôme $X^2 - 2\cos(h)X + 1$ vaut $\Delta = 4(\cos(h)^2 - 1) = 4(\cos(h) - 1)(\cos(h) + 1) < 0$ (car $h \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$) donc la dernière équation n'a pas de solution réelle. Ainsi, $\boxed{\text{Sp}(T_h) = \{e^{3h}, e^{-h}\}}$.

On détermine ensuite les espaces propres associés. On trouve

$$E_{e^{3h}} = \text{Vect}(f_1) \text{ et } E_{e^{-h}} = \text{Vect}(f_2)$$

donc la somme des dimensions des espaces propres vaut 2 alors que la taille de la matrice M est 4, c'est que l'endomorphisme $\boxed{T_h \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Exercice 9 (C1-C2)  1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe des matrices P et D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (à expliciter) telles que $A = PDP^{-1}$.
On cherche à diagonaliser A . On commence par déterminer ses valeurs propres.

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{Sp}(A) &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2 = 0 \\ &\iff \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 3\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{Sp}(A) = \{2, 3\}}$. A est donc une matrice de taille 2 qui admet deux valeurs propres distinctes, c'est donc que A est diagonalisable.

On détermine les espaces propres associés :

$$E_2 = \text{Vect} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et on pose donc

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ on a } A = PDP^{-1}.$$

On suppose qu'il existe deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (que l'on cherche à déterminer) telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f'(t) &= f(t) - 2g(t) \\ g'(t) &= f(t) + 4g(t) \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

et pour tout nombre réel t , on pose $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$.

2. Traduire matriciellement le système $(\mathcal{S})$.

On remarque que $X \in \mathcal{S} \iff \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Que vaut $Y'(t)$?

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$Y'(t) = P^{-1} \underbrace{X'(t)}_{AX(t)} = \underbrace{P^{-1}A}_{DP^{-1}} X(t) = D \underbrace{P^{-1}X(t)}_{Y(t)} = DY(t).$$

donc $Y'(t) = DY(t)$.

4. Donner un système différentiel vérifié par la fonction Y . En déduire les fonctions f et g .

On note $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$. Comme $Y'(t) = DY(t)$, on obtient le système différentiel :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_1'(t) &= 2y_1(t) \\ y_2'(t) &= 3y_2(t) \end{cases}$$

Ainsi, il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_1(t) = C_1 e^{2t}$ et $y_2(t) = C_2 e^{3t}$.
Or $Y(t) = P^{-1}X(t)$, donc $X(t) = PY(t)$, d'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} -2C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

Exercice 10 (C1-C2)  On considère les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f : t \mapsto e^t, \quad g : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \quad \text{et} \quad h : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (f, g, h)$.

1. Montrer que la dimension de F est égale à 3.

Par définition de F , la famille $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F . Montrons que cette famille est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0_F$. On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha f(t) + \beta g(t) + \gamma h(t) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha e^t + \beta e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \gamma e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = 0$$

ce que l'on peut réécrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha + \beta e^{-\frac{3t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \gamma e^{-\frac{3t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = 0 \quad (3)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \leq 1$ donc $e^{-\frac{3t}{2}} \leq e^{-\frac{3t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \leq e^{-\frac{3t}{2}}$. Or

$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{3t}{2}} = 0$, on a également $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{3t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = 0$. Le même raisonnement avec

le sinus permet d'obtenir que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{3t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = 0$. En faisant tendre t vers $+\infty$

dans (3), on obtient $\alpha = 0$. En reprenant (3) et en divisant par $e^{-\frac{3t}{2}} \neq 0$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \beta \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \gamma \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = 0$$

Les choix $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ fournissent respectivement $\beta = 0$ et $\gamma = 0$. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre. Finalement :

la famille $\mathcal{B}$ est une base de F et donc $\dim(F) = \text{card}(\mathcal{B}) = 3$

2. On considère l'opérateur D de dérivation sur F défini par $D(u) = u'$ pour tout $u \in F$. Justifier que D est un endomorphisme de F et déterminer la matrice A de D dans la base $\mathcal{B}$. L'application D est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

On sait que l'opérateur de dérivation est linéaire. Montrons que $D(F) \subset F$. Soit $y \in F$. Il existe alors $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = \alpha f + \beta g + \gamma h$. Par linéarité de D , on a donc :

$$D(y) = \alpha D(f) + \beta D(g) + \gamma D(h) = \alpha f' + \beta g' + \gamma h'$$

c'est-à-dire, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} D(y)(t) &= \alpha e^t - \frac{\beta}{2} e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \beta \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\gamma}{2} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ &\quad + \gamma \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ &= \alpha f(t) + \left(\gamma \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\beta}{2}\right) g(t) + \left(-\frac{\gamma}{2} - \beta \frac{\sqrt{3}}{2}\right) h(t) \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$D(y) = \alpha f + \left(\gamma \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\beta}{2}\right) g + \left(-\frac{\gamma}{2} - \beta \frac{\sqrt{3}}{2}\right) h$$

Comme $D(y)$ s'exprime comme combinaison linéaire de f , g et h , on a $D(y) \in F$. On a donc bien l'inclusion $D(F) \subset F$. Finalement :

D est un endomorphisme de F

On a $D(f) = f$ (en choisissant $\alpha = 1$ et $\beta = \gamma = 0$) dans le calcul précédent et, en procédant de la même manière, on trouve que :

$$D(g) = -\frac{1}{2}g - \frac{\sqrt{3}}{2}h \quad \text{et} \quad D(h) = \frac{\sqrt{3}}{2}g - \frac{1}{2}h$$

Ainsi :

la matrice A de D exprimée dans la base $\mathcal{B}$ de F est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Déterminons le spectre *réel* de D . Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{Sp}(D) &\iff \text{rg}(D - \lambda I_3) < 3 \iff \lambda = 1 \text{ ou } \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \\ &\iff \lambda = 1\end{aligned}$$

car le trinôme $X^2 + X + 1$ n'admet pas de racine réelle. Le spectre réel de D est donc $\text{Sp}(D) = \{1\}$. Un calcul immédiat fournit $\text{rg}(D - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{rg}(A - I_3) = 2$. On peut appliquer le théorème du rang puisque F est de dimension finie (égale à 3) et on a (en notant $E_1(D)$ le sous-espace propre de D associé à la valeur propre 1) :

$$\dim(F) = \dim(E_1(D)) + \text{rg}(D - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \dim(E_1(D)) = 1$$

En particulier, $\dim(E_1(D)) \neq \dim(F)$ donc D n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Les racines du trinôme $X^2 + X + 1$ sont $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ donc le spectre *complexe* de D est, d'après ce qui précède :

$$\text{Sp}(D) = \left\{ 1, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

En particulier, D admet trois valeurs propres différentes et est un endomorphisme de l'espace vectoriel F qui est de dimension 3 donc D est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

3. Déterminer une base de $\text{Ker}(D^2 + D + \text{Id}_F)$. En déduire que $D^2 + D$ est diagonalisable. On a :

$$\text{Ker}(D^2 + D + \text{Id}_F) = \{u \in F \mid u'' + u' + u = 0_F\}$$

Le noyau de $D^2 + D + \text{Id}_F$ est donc l'ensemble des éléments de F qui sont solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre homogène $u'' + u' + u = 0$. L'équation caractéristique associée $x^2 + x + 1 = 0$ admet pour racines (réelles distinctes) $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\text{Ker}(D^2 + D + \text{Id}_F) &= \left\{ t \mapsto A e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} \cap F \\ &= \{Ag + Bh \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} \cap F \\ &= \{Ag + Bh \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}\end{aligned}$$

car g et h sont des éléments de F et F est un espace vectoriel donc $\{Ag + Bh \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} \subset F$. La famille (g, h) est génératrice de $\text{Ker}(D^2 + D + \text{Id}_F)$ et elle est libre car elle est une sous-famille de la famille libre $\mathcal{B}$.

Déterminons la matrice de l'endomorphisme $\text{Ker}(D^2 + D + \text{Id}_F)$ (noté Δ) dans la base $\mathcal{B}$ de F . On sait que $\Delta(g) = \Delta(h) = 0_F$. De plus, $D(f) = f$ donc $\Delta(f) = 3f$. La matrice cherchée est donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\Delta) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue est diagonale donc :

l'endomorphisme Δ de F est diagonalisable (dans la base $\mathcal{B}$)

Exercice 11 (C1-C2)  On considère la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est J dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres correspondants. Montrer que f est diagonalisable. On déterminera une base de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Après calcul, on trouve $\text{Sp}(J) = \{-2, 0, 1\}$. J est une matrice de taille 3 et possède 3 valeurs propres distinctes donc J est diagonalisable. Les espaces propres correspondants sont

$$E_{-2} = \text{Vect} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad E_0 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces espaces propres nous donne la base de diagonalisation de f , on note $c_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$$c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On considère dans la suite une base $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ formée de vecteurs propres de f .

2. On suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2 = f$ (on dit que g est une racine carrée de f).

- (a) Montrer que $g \circ f = f \circ g$.

On a $g \circ f = g \circ g^2 = g^3 = g^2 \circ g = f \circ g$.

- (b) Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. Montrer que si $c_i \in E_{\lambda_i}(f)$ alors $g(c_i) \in E_{\lambda_i}(f)$. En déduire que $g(c_i)$ et c_i sont colinéaires.

Soit $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on a :

$$f(g(c_i)) = f \circ g(c_i) = g \circ f(c_i) = g(\lambda_i c_i) = \lambda_i g(c_i)$$

donc $g(c_i) \in E_{\lambda_i}(f)$.

Comme $E_{\lambda_i}(f) = \text{Vect}(c_i)$, on a donc $g(c_i)$ colinéaire à c_i : $\exists \mu_i \in \mathbb{R}, g(c_i) = \mu_i c_i$.

- (c) En déduire que g est diagonalisable dans la base $\mathcal{C}$.

La matrice de g dans la base $\mathcal{C}$ est donc la suivante : $\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$, donc

g est diagonalisable dans la base $\mathcal{C}$.

- (d) Existe-t-il une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = J$? Expliquer comment trouver une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 = J$.

Dans la base $\mathcal{C}$, puisque $g^2 = f$ on aurait

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (\mu_1)^2 = -2 \\ (\mu_2)^2 = 0 \\ (\mu_3)^2 = 1 \end{cases}$$

mais la première équation n'a pas de solution réelle. C'est donc qu'il n'existe pas d'endomorphisme g tel que $g^2 = f$, et donc pas de matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = J$.

Exercice 12 (C1-C2)  Soit $A = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -15 & -13 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable et diagonaliser A . On notera dans la suite $A = PDP^{-1}$ la diagonalisation obtenue.

Après calcul, on trouve $\text{Sp}(J) = \{-3, 2\}$. A est une matrice de taille 2 et possède 2 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable. Les espaces propres correspondants sont

$$E_{-3} = \text{Vect} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On note donc $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et on obtient $A = PDP^{-1}$.

2. On cherche maintenant le *commutant* de A (noté $\mathcal{C}(A)$), c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A :

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$$

- (a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que M appartient à $\mathcal{C}(A)$ si et seulement si les matrices $N = P^{-1}MP$ et D commutent.

On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}(A) &\iff AM = MA \\ &\iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \\ &\iff P^{-1}PDP^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1} \\ &\iff DP^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1} \\ &\iff DP^{-1}MP = P^{-1}MPDP^{-1}P \\ &\iff DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \\ &\iff DN = ND. \end{aligned}$$

- (b) Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ commute avec D si et seulement si elle est diagonale.

Soit $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} MD = DM &\iff \begin{pmatrix} -3m_{1,1} & 2m_{1,2} \\ -3m_{2,1} & 2m_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3m_{1,1} & -3m_{1,2} \\ 2m_{2,1} & 2m_{2,2} \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} m_{1,2} = 0 \\ m_{2,1} = 0 \end{cases} \\ &\iff M \text{ est diagonale.} \end{aligned}$$

(c) En déduire $\mathcal{C}(A)$.

N est une matrice qui commute avec D , donc N est une matrice diagonale :

$$\exists(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, N = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

On a alors $N = P^{-1}MP \iff M = PNP^{-1}$, donc :

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} P^{-1}, (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 13 (C1-C2)  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application Φ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = (X - X^2)P'' + (1 - 2X)P'$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer sa matrice M exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg(P'') \leq \deg(P) - 2$, donc $\deg((X - X^2)P'') \leq \deg(P)$, de plus $\deg(P') \leq \deg(P) - 1$, donc $\deg((1 - 2X)P') \leq \deg(P)$, et donc par somme $\deg(\Phi(P)) \leq \deg(P)$, donc $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
- Montrons que Φ est une application linéaire. Soient $(p, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, calculons

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (X - X^2)(\lambda P + \mu Q)'' + (1 - 2X)(\lambda P + \mu Q)' \\ &= (X - X^2)(\lambda P'' + \mu Q'') + (1 - 2X)(\lambda P' + \mu Q') \text{ par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda((X - X^2)P'' + (1 - 2X)P') + \mu((X - X^2)Q'' + (1 - 2X)Q') \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Déterminons sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On calcule les images des vecteurs de base :

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ f(X) &= 1 - 2X \\ f(X^2) &= 4X - 6X^2 \\ \forall k \geq 3, f(X^k) &= k^2 X^{k-1} - k(k+1)X^k \end{aligned}$$

On en déduit l'allure de la matrice A associée :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & -2 & 4 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & 0 & -6 & 9 & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & 0 & -12 & 16 & \cdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & -20 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer les valeurs propres de Φ .

On remarque que la matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. On a $\boxed{\text{Sp}(\Phi) = \{-k(k+1), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}}$.

3. L'application Φ est-elle diagonalisable ? bijective ? Justifier.

L'application Φ possède $n+1$ valeurs propres distinctes dans un espace de dimension $n+1$, donc Φ est diagonalisable.

Comme $0 \in \text{Sp}(\Phi)$, l'application Φ n'est pas bijective.

Exercice 14 (C1-C2)  Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $P \in E$, on pose :

$$f(P) = (X^2 + 1)P'' - 2XP'$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base canonique de E .

La même méthode que celle utilisée dans l'exercice 13 permet d'obtenir que f est un endomorphisme de E .

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$f(X^k) = (X^2 + 1)k(k-1)X^{k-2} - 2XkX^{k-1} = k(k-3)X^k + k(k-1)X^{k-2}$$

La matrice M de f dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de E est donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \end{pmatrix}$$

2. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de f .

La matrice M est triangulaire (supérieure) donc les valeurs propres de f sont les coefficients diagonaux de M . Le spectre de f est donc :

$$\boxed{\text{Sp}(f) = \{k^2 - 3k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}}$$

3. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 + 1)y' - 2xy = 0$ dans $\mathbb{R}$ et en déduire une base de $\text{Ker}(f)$.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1)y' - 2xy = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0 \quad (\text{car } 1+x^2 \neq 0)$$

Cette équation différentielle, notée $(\mathcal{E})$ est linéaire, du premier ordre et homogène. Une primitive de la fonction continue $x \mapsto -\frac{2x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -\ln(1+x^2)$. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$\left\{ x \mapsto C e^{\ln(1+x^2)} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \mapsto C(1+x^2) \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

Soit $P \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(f) &\iff f(P) = 0_E \iff P' \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R} \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}, P' = C(1+X^2) \\ &\iff \exists (C, D) \in \mathbb{R}^2, P = C \left(X + \frac{X^3}{3} \right) + D \\ &\iff P \in \text{Vect} \left(X + \frac{X^3}{3}, 1 \right) \end{aligned}$$

Le noyau de f est donc :

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(3X + X^3, 1)$$

La famille $(3X + X^3, 1)$ est donc génératrice de $\text{Ker}(f)$ et elle est libre car constituée de deux polynômes de degrés différents. Ainsi :

$$(3X + X^3, 1) \text{ est une base de } \text{Ker}(f)$$

4. Montrer que $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_E) \subset \mathbb{R}_2[X]$ et en déduire $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$.

— Montrons que $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_E) \subset \mathbb{R}_2[X]$ en raisonnant par l'absurde.

On suppose qu'il existe un polynôme P de E de degré d supérieur ou égal à 3 appartenant à $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$. Il existe alors $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que $P = a_d X^d + \dots + a_1 X + a_0$ avec $a_d \neq 0$ (et $d \geq 3$). L'égalité $f(P) = -2P$ nous mène alors en identifiant les termes en X^d à

$$-2a_d = d(d-3)a_d,$$

or $d(d-3) \geq 0$ car $d \geq 3$, et $a_d \neq 0$, donc on obtient une contradiction.

Ainsi, on a montré que $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_E) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

— Soit $P \in \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$, on sait que $P \in \mathbb{R}_2[X]$, donc on pose $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P = aX^2 + bX + c$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} f(P) = -2P &\iff (X^2 + 1)P'' - 2XP' = -2P \\ &\iff (X^2 + 1)2a - 2X(2aX + b) = -2(aX^2 + bX + c) \\ &\iff -2aX^2 - 2bX + 2a = -2aX^2 - 2bX - 2c \\ &\iff a = -c \\ &\iff P = -cX^2 + bX + c \\ &\iff P = c(-X^2 + 1) + bX \\ &\iff P \in \text{Vect}(-X^2 + 1, X) \end{aligned}$$

donc $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_E) = \text{Vect}(-X^2 + 1, X)$. Ces polynômes sont de degré distincts donc forment une famille libre, donc une base de $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$.

5. Conclure quant à la diagonalisabilité de f .

On a montré que $\text{Sp}(f) = \{k^2 - 3k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$. On se demande si ces valeurs propres sont distinctes. Soit $(k, l) \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $k \neq l$ tel que

$$\begin{aligned} k^2 - 3k = l^2 - 3l &\iff k^2 - l^2 = 3k - 3l \\ &\iff (k - l)(k + l) = 3(k - l) \\ &\iff (k + l) = 3 \text{ car } k \neq l \end{aligned}$$

donc les seuls cas d'égalité entre deux valeurs propres sont

- $k = 0$ et $l = 3$, qui correspondent à $k^2 - 3k = 0$. L'espace propre associé est de dimension 2, comme nous l'avons montré en question 3.
- $k = 1$ et $l = 2$, qui correspondent à $k^2 - 3k = -2$. L'espace propre associé est de dimension 2, comme nous l'avons montré en question 4.

Pour tous les autres cas, les valeurs propres sont distinctes, ce qui nous fait $n - 3$ valeurs propres en plus de 0 et -2 . Les espaces propres associés sont de dimension au moins 1, et $n - 3 + 2 + 2 = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, donc f est diagonalisable.

Exercice 15 (C2)  Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E tel que :

$$f^2 + f - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}, \quad f \neq -2\text{Id}_E, \quad f \neq \text{Id}_E$$

1. Déterminer les valeurs propres possibles de f .

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f . Notons $x \neq 0_E$ un vecteur propre associé. On a $f(x) = \lambda x$ et $f^2(x) = \lambda^2 x$, donc

$$f^2(x) + f(x) - 2x = 0_E \iff \lambda^2 x + \lambda x - 2x = 0_E \iff \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

car $x \neq 0_E$. Les racines du polynôme $Y^2 + Y - 2$ sont 1 et -2 , donc

si λ est valeur propre de f alors $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$.

2.(a) Montrer que $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.

Soit $x \in \text{Im}(f + 2\text{Id}_E)$, il existe $u \in E$ tel que

$$(f + 2\text{Id}_E)(u) = x \iff f(u) + 2u = x.$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(f(u) + 2u) \\ &= f^2(u) + 2f(u) \text{ par linéarité de } f \\ &= -f(u) + 2u + 2f(u) \text{ car } f^2 = -f + 2\text{Id}_E \\ &= f(u) + 2u \\ &= x \end{aligned}$$

et ainsi $x \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$. On a prouvé que $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.

(b) Montrer que $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

Comme $f \neq -2\text{Id}_E$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) \neq -2x$, et donc tel que $f(x) + 2x \neq 0_E$. Cela signifie que $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

(c) En déduire que 1 est valeur propre de f .

On a montré que $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \neq \{0_E\}$ et que $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$, on en déduit que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$, et donc que 1 est valeur propre de f .

3. Montrer de même que -2 est bien valeur propre de f .

— Soit $x \in \text{Im}(f - \text{Id}_E)$, il existe $u \in E$ tel que

$$(f - \text{Id}_E)(u) = x \iff f(u) - u = x.$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= f(f(u) - u) \\ &= f^2(u) - f(u) \text{ par linéarité de } f \\ &= -f(u) + 2u - f(u) \text{ car } f^2 = -f + 2\text{Id}_E \\ &= -2f(u) + 2u \\ &= -2x \end{aligned}$$

et ainsi $x \in \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$. On a prouvé que $\boxed{\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)}$.

— Comme $f \neq \text{Id}_E$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) \neq x$, et donc tel que $f(x) - x \neq 0_E$. Cela signifie que $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

— On a montré que $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$ et que $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$, on en déduit que $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_E) \neq \{0_E\}$, et donc que $\boxed{-2 \text{ est valeur propre de } f}$.

4. Montrer que f est diagonalisable.

On a montré :

- $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ donc on a $\text{rg}(f + 2\text{Id}_E) \leq \dim(E_1)$
- $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$ donc on a $\text{rg}(f - \text{Id}_E) \leq \dim(E_{-2})$

On obtient donc

$$\dim(E_1) + \dim(E_{-2}) \geq \text{rg}(f - \text{Id}_E) + \text{rg}(f + 2\text{Id}_E).$$

De plus, par théorème du rang, on a :

- $\dim(E) = \dim(E_1) + \text{rg}(f - \text{Id}_E)$ donc on a $\text{rg}(f - \text{Id}_E) = \dim(E) - \dim(E_1)$
- $\dim(E) = \dim(E_{-2}) + \text{rg}(f + 2\text{Id}_E)$ donc on a $\text{rg}(f + 2\text{Id}_E) = \dim(E) - \dim(E_{-2})$

Ainsi, on obtient :

$$\dim(E_1) + \dim(E_{-2}) \geq 2\dim(E) - \dim(E_1) - \dim(E_{-2}) \iff \dim(E_1) + \dim(E_{-2}) \geq \dim(E).$$

On a toujours $\dim(E_1) + \dim(E_{-2}) \leq \dim(E)$, donc on vient de prouver que

$$\dim(E_1) + \dim(E_{-2}) = \dim(E),$$

autrement dit que $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

Exercice 16 (C2)  Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si λ^2 est valeur propre de f^2 , alors λ ou $-\lambda$ est valeur propre de f .
Supposons que λ^2 soit une valeur propre de f^2 . Il existe alors $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f^2(x) = \lambda^2 x$. On a alors :

$$(f^2 - \lambda^2 \text{Id}_E)(x) = 0_E \quad \text{ce qui se réécrit} \quad (f - \lambda \text{Id}_E)((f + \lambda \text{Id}_E)(x)) = 0_E$$

Ainsi, $(f + \lambda \text{Id}_E)(x) \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$. On distingue alors deux cas.

- **Premier cas :** on suppose que $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) = \{0_E\}$.

Dans ce cas, λ est valeur propre de f .

- **Deuxième cas :** on suppose que $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

Alors $(f + \lambda \text{Id}_E)(x) = 0_E$, c'est-à-dire $f(x) = -\lambda x$. Comme $x \neq 0_E$, on en déduit que $-\lambda$ est une valeur propre de f (et x en est un vecteur propre associé).

Finalement :

si λ^2 est valeur propre de f^2 , alors $-\lambda$ ou λ est valeur propre de f

2. Si f est bijectif et si λ est valeur propre de f , montrer que $\lambda \neq 0$ et que $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de f^{-1} .

Supposons que f soit bijectif et que λ soit une valeur propre de f . Comme f est bijectif, f est en particulier injectif et donc 0 n'est pas valeur propre de f . Ainsi, $\lambda \neq 0$. On sait qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Comme f est bijective, on peut appliquer la fonction f^{-1} dans cette égalité et on obtient, puisque f^{-1} est linéaire :

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\lambda x) \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = \text{Id}_E(x) = \lambda f^{-1}(x)$$

soit encore $f^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$ car $\lambda \neq 0$. Comme $x \neq 0$, on peut conclure que :

$\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de f^{-1}

Exercice 17 (C1-C2, oral Agro-V  to 2017)  Pour les programmes python, on pourra utiliser la fonction `linalg.matrix_rank()` du module `numpy`, qui permet de déterminer le rang d'une famille de vecteurs.

Exemple d'utilisation de cette fonction :

```
1 import numpy as np
2 V = np.array([[1,2,1] , [2,3,2]])
3 print(np.linalg.matrix_rank(V))
```

La valeur renvoy  e par python est alors : 2.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice A .

- 1.(a)   crire une fonction python prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'ils sont colinéaires.

On pourra représenter les vecteurs par des listes.

On utilise la fonction `linalg.matrix_rank()` du module `numpy` sugg  r  e dans l'énoncé et on obtient la fonction suivante :

```
1 import numpy as np
2 def colineaires(u,v) :
3     M = np.array([u,v])
4     r = np.linalg.matrix_rank(M)
5     if (r == 2) : #la famille (u,v) est libre
6         return False
7     else :
8         return True
```

COMMENTAIRE

Une famille de vecteurs est libre si et seulement si le rang de la famille coïncide avec le nombre de vecteurs qui la compose.

- 1.(b) Écrire une fonction **python** prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen indiquant s'il est vecteur propre de A ou non.

Soit $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ tel que $U \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})}$. On sait que U est un vecteur propre de la matrice A si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $AU = \lambda U$, ce qui équivaut à la colinéarité des matrices colonnes AU et U . On écrit une fonction **vecteurpropre** qui calcule dans un premier temps le vecteur correspondant au produit produit matriciel AU .

```
1 def valeurpropre(u) :  
2     if (u == [0,0,0]) :  
3         return False  
4     else :  
5         v = [-4*u[0]-3*u[1]-3*u[2], 2*u[1], 6*u[0]+3*u[1]+5*u[2]]  
6         if (colineaires(u,v) == True) :  
7             return True  
8         else :  
9             return False
```

COMMENTAIRE

Il ne faut pas oublier de traiter le cas où le vecteur entré dans la fonction est nul.

- 2.(a) Vérifier que les vecteurs $(1, -2, 0)$, $(0, 1, -1)$ et $(1, 0, -1)$ sont des vecteurs propres de f et préciser pour chacun la valeur propre associée.

On a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$f(1, -2, 0) = 2(1, -2, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 1, -1) = 2(0, 1, -1) \quad \text{et} \quad f(1, 0, -1) = -(1, 0, -1)$$

On en déduit donc que :

les vecteurs $(1, -2, 0)$ et $(0, 1, -1)$ sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre 2 tandis que $(1, 0, -1)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1

COMMENTAIRE

Cette question, qui ne pose aucun problème, est surtout l'occasion de contrôler que la fonction établie à la question 1.(b) est juste. Il est d'ailleurs opportun de mettre en œuvre cette fonction ici.

2.(b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Posons $u = (1, -2, 0)$, $v = (0, 1, -1)$ et $w = (1, 0, -1)$. En notant respectivement $E_2(f)$ et $E_{-1}(f)$ les sous-espaces propres de f associés aux valeurs propres 2 et -1 respectivement, on a les inclusions suivantes (d'après la question 2.(a)) :

$$\text{Vect}(u, v) \subset E_2(f) \quad \text{et} \quad \text{Vect}(w) \subset E_{-1}(f)$$

Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires donc $\text{rg}(u, v) = 2$ et le vecteur w est non nul donc $\text{rg}(w) = 1$. On déduit donc des inclusions précédentes que :

$$2 \leq \dim(E_2(f)) \quad \text{et} \quad 1 \leq \dim(E_{-1}(f))$$

Ainsi :

$$3 \leq \dim(E_2(f)) + \dim(E_{-1}(f)) \leq 3$$

car la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est inférieure ou égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$. Finalement :

$$\dim(E_2(f)) + \dim(E_{-1}(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

et donc :

l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est diagonalisable

COMMENTAIRE

- Il n'est pas nécessaire utile de rechercher les sous-espaces propres de f . On rappelle qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à n .
- Nous pouvons également déduire du raisonnement précédent que :

$$\dim(E_2(f)) = 2 \quad \text{et} \quad \dim(E_{-1}(f)) = 1$$

3.(a) Écrire un programme `python` permettant de déterminer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre -10 et 10 (bornes incluses).

Avec le script suivant, on dénombre 240 vecteurs propres de f dans l'ensemble $[-10, 10]^3$:

```
1 nb = 0
2 for i in range(-10,11) :
3     for j in range(-10,11) :
4         for k in range(-10,11) :
5             if (valeurpropre([i,j,k]) == True) :
6                 nb = nb+1
7 print(nb)
```

COMMENTAIRE

Il est inutile de rajouter une condition du type `[i,j,k] != [0,0,0]` car le vecteur nul a déjà été pris en considération dans la fonction `valeurpropre` de la question 1.(b).

3.(b) Pour un entier naturel N non nul, calculer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre $-N$ et N (bornes incluses).

On a vu à la question 2.(b) que les sous-espaces propres de f sont :

$$E_2(f) = \text{Vect}((1, -2, 0), (0, 1, -1)) \quad \text{et} \quad E_{-1}(f) = \text{Vect}((1, 0, -1))$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Notons V_N l'ensemble des vecteurs propres de f appartenant à $\llbracket -N, N \rrbracket^3$. Notons encore $V_{2,N}$ l'ensemble des vecteurs propres (non nuls donc) de f associés à la valeur propre 2 dont les coordonnées appartiennent à $\llbracket -N, N \rrbracket$, c'est-à-dire :

$$V_{2,N} = E_2(f) \cap (\llbracket -N, N \rrbracket^3 \setminus \{(0, 0, 0)\})$$

et, de la même manière, posons :

$$V_{-1,N} = E_{-1}(f) \cap (\llbracket -N, N \rrbracket^3 \setminus \{(0, 0, 0)\})$$

On a alors l'égalité $V_N = V_{2,N} \cup V_{-1,N}$. On sait de plus que $E_2(f) \cap E_{-1}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $V_{2,N} \subset E_2(f)$ et $V_{-1,N} \subset E_{-1}(f)$ donc :

$$V_{2,N} \cap V_{-1,N} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

Par conséquent :

$$\text{card}(V_N) = \text{card}(V_{2,N}) + \text{card}(V_{-1,N})$$

Il reste donc à dénombrer les ensembles $V_{2,N}$ et $V_{-1,N}$. Par définition :

$$\begin{aligned} V_{-1,N} &= \{(\alpha, 0, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \cap (\llbracket -N, N \rrbracket^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}) \\ &= \{(\alpha, 0, -\alpha) \mid \alpha \in \llbracket -N, N \rrbracket \setminus \{0\}\} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\text{card}(V_{-1,N}) = \text{card}(\llbracket -N, N \rrbracket \setminus \{0\}) = (2N + 1) - 1 = 2N \quad (1)$$

Dénombrons maintenant l'ensemble $V_{2,N}$. Tout d'abord :

$$E_2(f) = \{(\alpha, -2\alpha + \beta, -\beta) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

Ainsi, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} (\alpha, -2\alpha + \beta, -\beta) \in V_{2,N} &\iff \begin{cases} -N \leq \alpha \leq N \\ -N \leq -2\alpha + \beta \leq N \\ -N \leq -\beta \leq N \\ (\alpha, \beta) \neq (0, 0) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -N \leq \alpha \leq N \\ -N \leq \beta \leq N \\ 2\alpha - N \leq \beta \leq 2\alpha + N \\ (\alpha, \beta) \neq (0, 0) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -N \leq \alpha \leq N \\ \max(-N, -N + 2\alpha) \leq \beta \leq \min(N, N + 2\alpha) \\ (\alpha, \beta) \neq (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

En posant, pour tout $\alpha \in \llbracket -N, N \rrbracket$:

$$W_\alpha = \{(\alpha, -2\alpha + \beta, -\beta) \mid \max(-N, -N + 2\alpha) \leq \beta \leq \min(N, N + 2\alpha) \text{ et } (\alpha, \beta) \neq (0, 0)\}$$

alors on a l'égalité :

$$V_{2,N} = \bigcup_{\alpha=-N}^N W_\alpha$$

Les ensembles intervenant dans cette réunion sont deux à deux disjoints donc :

$$\text{card}(V_{2,N}) = \sum_{\alpha=-N}^N \text{card}(W_\alpha) \quad (2)$$

On dénombre les ensembles W_α en distinguant trois cas (remarquons que la condition $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ n'est importante que si $\alpha = 0$). Soit $\alpha \in \llbracket -N, N \rrbracket$.

— **Premier cas : $\alpha < 0$.**

Alors :

$$\begin{aligned} \text{card}(W_\alpha) &= \text{card}(\llbracket \max(-N, -N + 2\alpha), \min(N, N + 2\alpha) \rrbracket) \\ &= \text{card}(\llbracket -N, N + 2\alpha \rrbracket) \\ &= 2N + 2\alpha + 1 \end{aligned}$$

— **Deuxième cas : $\alpha = 0$.**

On a ici :

$$\text{card}(W_0) = \text{card}(\llbracket -N, N \rrbracket \setminus \{0\}) = 2N$$

— **Troisième cas : $\alpha > 0$.**

On a enfin :

$$\begin{aligned} \text{card}(W_\alpha) &= \text{card}(\llbracket \max(-N, -N + 2\alpha), \min(N, N + 2\alpha) \rrbracket) \\ &= \text{card}(\llbracket -N + 2\alpha, N \rrbracket) \\ &= 2N - 2\alpha + 1 \end{aligned}$$

D'après (2), on a donc :

$$\begin{aligned} \text{card}(V_{2,N}) &= \sum_{\alpha=-N}^{-1} (2N + 2\alpha + 1) + \sum_{\alpha=1}^N (2N - 2\alpha + 1) + 2N \\ &= 2 \sum_{\ell=1}^N (2N - 2\ell + 1) + 2N \end{aligned}$$

en utilisant le changement d'indice $\ell = -\alpha$ dans la première somme. La linéarité de la somme et le changement d'indice $k = N - \ell$ fournit :

$$\begin{aligned} \text{card}(V_{2,N}) &= 4 \sum_{k=0}^{N-1} k + 2 \sum_{k=0}^{N-1} 1 + 2N \\ &= 2N(N - 1) + 4N \end{aligned}$$

En reprenant le dénombrement (1) de l'ensemble $V_{-1,N}$, il vient finalement :

$$\text{card}(V_N) = 2N(N - 1) + 6N = 2N(N + 2)$$

On peut donc conclure que :

pour tout entier naturel N non nul, le nombre de vecteurs propres de A appartenant à l'ensemble $\llbracket -N, N \rrbracket^3$ est $2N(N + 2)$

COMMENTAIRE

- Le plus difficile dans cette question est d'écrire *proprement* les choses afin d'utiliser la formule donnant le cardinal d'une réunion disjointe d'ensembles finis.
- Il est bon de remarquer que l'on retrouve le résultat obtenu avec l'outil informatique à la question 3.(a).
- On rappelle que si a et b sont des entiers tels que $a \leq b$, alors :

$$\text{card}(\llbracket a, b \rrbracket) = \sum_{k=a}^b 1 = b - a + 1$$

4. Soit N un entier naturel non nul. Une expérience consiste à choisir au hasard de manière indépendante N vecteurs à coefficients entiers dans $\llbracket -N, N \rrbracket^3$.

(a) Quelle est la probabilité p_N d'obtenir au moins un vecteur propre parmi ces N vecteurs ? Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a noté V_N l'ensemble des vecteurs propres de f appartenant à $\llbracket -N, N \rrbracket^3$. On considère les événements :

F : « au moins l'un des vecteurs parmi les N choisis est un vecteur propre de A »

et, pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

F_k : « le k^{e} vecteur choisi est un vecteur propre de A »

Alors on a les égalité :

$$p_N = P(F) \quad \text{et} \quad F = \bigcup_{k=1}^N F_k$$

De plus, d'après la formule de De Morgan :

$$\overline{F} = \bigcap_{k=1}^N \overline{F_k}$$

Comme les N vecteurs sont choisis de manière indépendante, les événements $\overline{F_1}, \dots, \overline{F_N}$ sont indépendants et on a :

$$1 - p_N = P(\overline{F}) = \prod_{k=1}^N P(\overline{F_k}) = \prod_{k=1}^N (1 - P(F_k))$$

Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Le k^{e} vecteur est choisi au hasard dans l'univers $\Omega = \llbracket -N, N \rrbracket^3$ donc P est la probabilité uniforme. Ainsi :

$$P(F_k) = \frac{\text{card}(F_k)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}$$

car $F_k = V_N$ et d'après le dénombrement de V_N obtenu à la question 3.(b). Finalement :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad p_N = 1 - \left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)^N$$

COMMENTAIRE

- La difficulté réside une nouvelle fois dans la mise en place du calcul de probabilité de manière à faire apparaître l'indépendance dans le calcul ainsi que l'équiprobabilité.
- On rappelle les formules de De Morgan. Si E est un ensemble (quelconque) et si A et B sont deux parties de E , alors :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Ici, si $X \in \mathcal{P}(E)$, alors $\overline{X}$ désigne le complémentaire de X dans E , c'est-à-dire :

$$\overline{X} = \{x \in E \mid x \notin X\}$$

4.(b) Quelle est la limite de $N \ln \left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)$ quand N tend vers $+\infty$?

En déduire la limite de p_N quand N tend vers $+\infty$.

D'après les propriétés sur les équivalents, on a $\frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4N}$ donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right) = 0$ et alors :

$$\ln \left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{4N}$$

Par produit, il vient :

$$N \ln \left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{4}$$

Finalement :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N \ln \left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right) = -\frac{1}{4}$$

Or on sait d'après la question 4.(a) que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad p_N = 1 - e^{N \ln \left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)}$$

et, par composition des limites :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} e^{N \ln \left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3}\right)} = \lim_{X \rightarrow -\frac{1}{4}} e^X = e^{-\frac{1}{4}}$$

On conclut donc que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} p_N = 1 - e^{-\frac{1}{4}}$$

COMMENTAIRE

- Si on a compris comment mener le calcul de probabilité à la question 4.(a), cette question permet de vérifier que l'on a trouvé le bon résultat à la question 3.(b), où le cardinal de V_N apparaît dans le logarithme.
- Il était ici suggérer de calculer la limite en écrivant $1 - p_N$ sous forme exponentielle. On est souvent amené à le faire pour des suites avec une expression de la forme $u_n^{v_n}$ conduisant (par exemple) à la forme indéterminée « 1^∞ ». Il est par exemple très classique de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Ajoutons qu'il n'est pas licite de composer les équivalents. On cherche d'abord la limite de $v_n \ln(u_n)$ (en utilisant l'équivalent usuel du logarithme) puis on compose les limites.