

TD 8 - Réduction d'un endomorphisme

Compétences à acquérir :

- ▷ C1 : Déterminer les valeurs propres, les sous-espaces propres d'une matrice, d'un endomorphisme
- ▷ C2 : Étudier la diagonalisabilité d'une matrice, d'un endomorphisme
- ▷ C3 : Déterminer les puissances d'une matrice à partir de sa diagonalisation

Exercice 1 (C1-C2)  1. Étudier la diagonalisabilité dans $\mathbb{R}$ de chacune des matrices suivantes. Lorsque c'est possible, diagonaliser la matrice.

$$a) A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \quad c) C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad d) D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Étudier la diagonalisabilité dans $\mathbb{C}$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et si c'est possible, diagonaliser la matrice.

3. La fonction `numpy.linalg.eig` permet de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice, comme le montre l'exemple suivant :

```
import numpy.linalg as la
vap, vep = la.eig([[1,2],[3,4]])
```

Après cette suite d'instructions, la variable `vap` contient la liste des valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et la variable `vep` est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de cette matrice.

Utiliser l'outil informatique pour déterminer les éléments propres de la matrice $E = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifiera mathématiquement les résultats obtenus. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Si oui, diagonaliser cette matrice.

4. Étudier la diagonalisabilité des applications linéaires suivantes et diagonaliser l'application le cas échéant.

$$\begin{aligned} (a) \quad f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (y + z, x + z, x + y) \end{cases} \\ (b) \quad g : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto {}^t M \end{cases} \\ (c) \quad h : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto XP' - P'' \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 2 (C2)  On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $A^2 + A - 2I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
2. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3 .
- 3.(a) Factoriser le polynôme $P(X) = X^2 + X - 2$.
 (b) Montrer que les valeurs propres λ de A vérifient l'équation $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.
 (c) En déduire le spectre de A .
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 (C2-C3)  On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par ses trois premiers termes u_0, u_1 et u_2 et par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour tout entier naturel n .

1. Écrire une fonction informatique qui prend en argument u_0, u_1 et u_2 et qui renvoie la liste des 100 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2.(a) Montrer que $\text{Sp}(A) = \{-1, 1, 2\}$.
 (b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Préciser le cas échéant des matrices P inversible et D diagonale d'ordre 3 telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer X_n en fonction de A, n et X_0 .
4. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a + b(-1)^n + c2^n$$

On ne cherchera pas à expliciter les nombres a, b et c .

Exercice 4 (C1-C2)  Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ définie de la manière suivante. Si $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$ (où x, y et z sont trois nombres réels), alors :

$$f(u) = (x + 2y - z)e_1 + (-2x - 3y + 3z)e_2 + (x + y - 2z)e_3$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice M de f exprimée dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner les éléments propres de f et montrer que f est diagonalisable.
4. Déterminer une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice (notée D) de f est diagonale et préciser le lien entre les matrices D et M .

Exercice 5 (C1-C2)  Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$u(e_1) = u(e_n) = \sum_{k=1}^n e_k \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \quad u(e_k) = e_n$$

- 1.(a) Déterminer une base de $\text{Im}(u)$. L'application u est-elle bijective ?
 (b) Donner une base du sous-espace propre de u associé à la valeur propre 0.
2. Montrer que tout vecteur propre de u associé à une valeur propre non nulle appartient à l'image de u .
3. En déduire les sous-espaces propres de u . L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ est-il diagonalisable ?

Exercice 6 (C1-C2-C3)  On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\text{Sp}(A) = \{-1\}$ et déterminer le sous-espace propre associé.
2. Justifier que les matrices A et B sont semblables.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 (C1-C2-C3)  Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 8 (C1-C2)  Pour tout nombre réel x , on pose :

$$f_1(x) = e^{3x}, \quad f_2(x) = e^{-x}, \quad f_3(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad f_4(x) = \cos(x)$$

On pose $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E .
2. Soit $h \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On définit l'application T_h qui à $f \in E$ associe l'application g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x+h)$$

Montrer que T_h est un endomorphisme de E et donner sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

3. Donner les valeurs propres de T_h et étudier sa diagonalisabilité dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9 (C1-C2)  1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe des matrices P et D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (à expliciter) telles que $A = PDP^{-1}$.
On suppose qu'il existe deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (que l'on cherche à déterminer) telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f'(t) = f(t) - 2g(t) \\ g'(t) = f(t) + 4g(t) \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

et pour tout nombre réel t , on pose $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$.

2. Traduire matriciellement le système $(\mathcal{S})$.
3. Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$. Que vaut $Y'(t)$?
4. Donner un système différentiel vérifié par la fonction Y . En déduire les fonctions f et g .

Exercice 10 (C1-C2)  On considère les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f : t \mapsto e^t, \quad g : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \quad \text{et} \quad h : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (f, g, h)$.

1. Montrer que la dimension de F est égale à 3.
2. On considère l'opérateur D de dérivation sur F défini par $D(u) = u'$ pour tout $u \in F$. Justifier que D est un endomorphisme de F et déterminer la matrice A de D dans la base $\mathcal{B}$. L'application D est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?
3. Déterminer une base de $\text{Ker}(D^2 + D + \text{Id}_F)$. En déduire que $D^2 + D$ est diagonalisable.

Exercice 11 (C1-C2)  On considère la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est J dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres correspondants. Montrer que f est diagonalisable. On déterminera une base de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice de f est diagonale.
On considère dans la suite une base $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ formée de vecteurs propres de f .
2. On suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2 = f$ (on dit que g est une racine carrée de f).
(a) Montrer que $g \circ f = f \circ g$.
(b) Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. Montrer que si $c_i \in E_{\lambda_i}(f)$ alors $g(c_i) \in E_{\lambda_i}(f)$. En déduire que $g(c_i)$ et c_i sont colinéaires.
(c) En déduire que g est diagonalisable dans la base $\mathcal{C}$.
(d) Existe-t-il une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = J$? Expliquer comment trouver une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 = J$.

Exercice 12 (C1-C2)  Soit $A = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -15 & -13 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable et diagonaliser A . On notera dans la suite $A = PDP^{-1}$ la diagonalisation obtenue.
2. On cherche maintenant le *commutant* de A (noté $\mathcal{C}(A)$), c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A :

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$$

- (a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que M appartient à $\mathcal{C}(A)$ si et seulement si les matrices $N = P^{-1}MP$ et D commutent.
- (b) Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ commute avec D si et seulement si elle est diagonale.
- (c) En déduire $\mathcal{C}(A)$.

Exercice 13 (C1-C2)  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application Φ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = (X - X^2)P'' + (1 - 2X)P'$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer sa matrice M exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres de Φ .
3. L'application Φ est-elle diagonalisable ? bijective ? Justifier.

Exercice 14 (C1-C2)  Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $P \in E$, on pose :

$$f(P) = (X^2 + 1)P'' - 2XP'$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et déterminer sa matrice dans la base canonique de E .
2. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de f .
3. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 + 1)y' - 2xy = 0$ dans $\mathbb{R}$ et en déduire une base de $\text{Ker}(f)$.
4. Montrer que $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_E) \subset \mathbb{R}_2[X]$ et en déduire $\text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$.
5. Conclure quant à la diagonalisabilité de f .

Exercice 15 (C2)  Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E tel que :

$$f^2 + f - 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}, \quad f \neq -2\text{Id}_E, \quad f \neq \text{Id}_E$$

1. Déterminer les valeurs propres possibles de f .
- 2.(a) Montrer que $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.
 (b) Montrer que $\text{Im}(f + 2\text{Id}_E) \neq \{0_E\}$.
 (c) En déduire que 1 est valeur propre de f .
3. Montrer de même que -2 est bien valeur propre de f .
4. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 16 (C2)  Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si λ^2 est valeur propre de f^2 , alors λ ou $-\lambda$ est valeur propre de f .
2. Si f est bijectif et si λ est valeur propre de f , montrer que $\lambda \neq 0$ et que $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de f^{-1} .

Exercice 17 (C1-C2, oral Agro-V  to 2017)  Pour les programmes `python`, on pourra utiliser la fonction `linalg.matrix_rank()` du module `numpy`, qui permet de déterminer le rang d'une famille de vecteurs.

Exemple d'utilisation de cette fonction :

```
1 import numpy as np
2 V = np.array([[1,2,1] , [2,3,2]])
3 print(np.linalg.matrix_rank(V))
```

La valeur renvoyée par `python` est alors : 2.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice A .

- 1.(a)   crire une fonction `python` prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen (`True` ou `False`) indiquant s'ils sont colinéaires.
On pourra représenter les vecteurs par des listes.
- (b)   crire une fonction `python` prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen indiquant s'il est vecteur propre de A ou non.
- 2.(a) Vérifier que les vecteurs $(1, -2, 0)$, $(0, 1, -1)$ et $(1, 0, -1)$ sont des vecteurs propres de f et préciser pour chacun la valeur propre associée.
- (b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
- 3.(a)   crire un programme `python` permettant de déterminer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre -10 et 10 (bornes incluses).
- (b) Pour un entier naturel N non nul, calculer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre $-N$ et N (bornes incluses).
4. Soit N un entier naturel non nul. Une expérience consiste à choisir au hasard de manière indépendante N vecteurs à coefficients entiers dans $\llbracket -N, N \rrbracket^3$.
- (a) Quelle est la probabilité p_N d'obtenir au moins un vecteur propre parmi ces N vecteurs ?
- (b) Quelle est la limite de $N \ln \left(1 - \frac{2N(N+2)}{(2N+1)^3} \right)$ quand N tend vers $+\infty$?
En déduire la limite de p_N quand N tend vers $+\infty$.