Soutien - Variables aléatoires discrètes - Éléments de correction
Extrait du sujet de Modélisation 2024

B- Le modèle probabiliste de Galton-Watson

I- Le modèle de Galton-Watson, exemples.

5. Dans ce cas $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} = \sum_{i=1}^{Z_n} q = qZ_n$. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Z_n = q^n$.
6. On peut raisonner par récurrence : s'il y a 0 ou 1 individu à la génération n, soit la population s'éteint, soit l'unique individu engendre à son tour 0 ou 1 individu et il y a 0 ou 1 individu à la génération $n+1$. On conclut sachant que $Z_0 = 1$.

   On peut encore raisonner par récurrence sachant que $P(Z_0 = 1) = 1 = p^0$ et que si $P(Z_n = 1) = p^n$ alors $P(Z_{n+1} = 1) = P_{[Z_n=1]}(Z_{n+1} = 1) \times P(Z_n = 1) = p \times p^n = p^{n+1}$.

   Ainsi $P(Z_n = 0) = 1 - P(Z_n = 1) = 1 - p^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = 1$. La population va presque sûrement s'éteindre.
7. D'après la FPT avec sce $(Z_n = 0, Z_n \neq 0)$:
   $u_{n+1} - u_n = P_{[Z_n\neq0]}(Z_{n+1} = 0) \times P(Z_n \neq 0) + P_{[Z_n=0]}(Z_{n+1} = 0) \times P(Z_n = 0) - u_n = p \times (1 - u_n) + 1 \times u_n - u_n = p(1 - u_n) \geq 0$
   en notant $p = P_{[Z_n\neq0]}(Z_{n+1} = 0)$ car $u_n \in [0,1]$. Or (u_n) est bien sûr majorée par 1 donc cette suite converge d'après le théorème de la limite monotone.
8. (a) $Z_1 = X_{0,1}$ donc $Z_1(\Omega) = \{0, 2\}$.
   Alors $E(Z_1) = 2 \times P(Z_1 = 2) + 0 \times P(Z_1 = 0) = 2 \times P(X_{0,1} = 2) = 2p$.
   Enfin, d'après la formule de KH, $V(Z_1) = 4p - (2p)^2 = 4p(1-p)$.

   (b) Application de la FPT avec SCE $\{[Z_1 = 0], [Z_1 = 2]\}$.

   (c) Sachant que $Z_1 = 2$, les individus de la $n+1$-ème génération sont issus des n générations issues de chacun des deux individus de la génération 1. Or la probabilité pour chacune de ces deux populations d'être éteintes est u_n. Enfin, $X_{1,1}$ et $X_{1,2}$ étant indépendantes, ces deux probabilités se multiplient pour donner $P_{Z_1=2}(Z_{n+1} = 0) = u_n^2$.

   De plus, si la population est éteinte à la génération 1, il est certain qu'elle le soit à la génération $n+1$. La formule de la question Q8.2 devient donc :
   $u_{n+1} = (1-p) \times 1 + p \times u_n^2 = (1-p) + pu_n^2$.

   (d) Notons f la fonction de $[0,1]$ dans lui-même qui à t associe $(1-p) + pt^2$. Cette fonction et continue sur $[0,1]$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et (u_n) est convergente. La limite de (u_n) est donc un des points fixes de f.
   Or $f(t) = t \iff t^2 - \frac{1}{p}t + \frac{1-p}{p} = 0$ dont les solutions sont 1 et $\frac{1-p}{p}$.

   (e) Distinguons les cas :
   — Si $p = 1/2$ alors $\frac{1-p}{p} = 1$ donc (u_n) converge vers 1.
   — Si $p < 1/2$ alors $\frac{1-p}{p} > 1$ donc (u_n) ne peut converger que vers 1.
   Ainsi, dans tous les cas, la population s'éteint presque sûrement.

   (f) Si $p > 1/2$ alors d'une part $\frac{1-p}{p} < 1$.
   D'autre part, $u_{n+1} \leq 1 - p + p\frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{1 - 2p + p^2 + p - p^2}{p} = \frac{1-p}{p}$ et $u_0 = 0$ donc on obtient l'inégalité par récurrence.
   Ainsi par passage à la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < 1$. La limite ne peut donc être que l'autre point fixe :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1-p}{p}$$

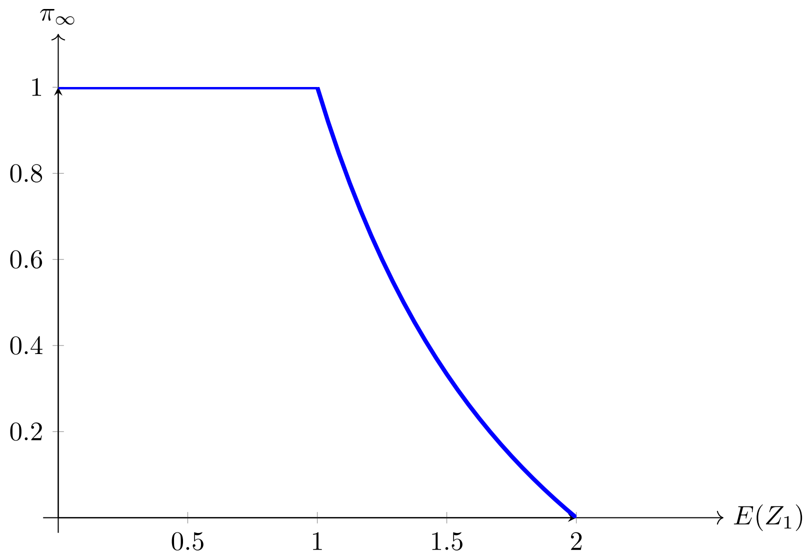
(g) Notons π_∞ la probabilité d'extinction. Sachant que $E(Z_1) = 2p$ on obtient que :

$$\pi_\infty = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq p \leq 1/2 \\ \dfrac{2-2p}{2p} \text{ si } 1/2 < p \leq 1 \end{cases}$$

soit

$$\pi_\infty = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq E(Z_1) \leq 1 \\ \dfrac{2-E(Z_1)}{E(Z_1)} \text{ si } 1 < E(Z_1) \leq 2 \end{cases}$$

On obtient le tracé suivant :



Ainsi la population s'éteint presque sûrement si, et seulement si $E(Z_1) \leq 1$.

9. (a) Z_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. La FPT avec le sce associé à Z_1 permet d'obtenir que :

$$P(Z_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{[Z_1=k]}(Z_{n+1} = 0) \times P(Z_1 = k)$$

Or Z_1 suit la loi de Y donc d'après les hypothèses de la question :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n^k \times p^k(1-p) = (1-p)\sum_{k=0}^{+\infty}(pu_n)^k = \frac{1-p}{1-pu_n}$$

(b) D'après les hypothèses de cette question, on retrouve la même équation qu'à la question Q8.5 donc ℓ vaut la plus petite valeur entre 1 et $\dfrac{1-p}{p}$ et on retrouve les mêmes résultats qu'aux questions Q8.6 et Q8.7.

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y+1 = k) = P(Y = k-1) = p^{k-1}(1-p)$. Ainsi $Y+1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-p$. On en déduit que $E(Y+1) = \dfrac{1}{1-p}$ donc par linéarité de l'espérance que $E(Y) = \dfrac{1}{1-p} - 1 = \dfrac{p}{1-p}$.

Or on vient d'obtenir que la probabilité d'extinction est de 1 si, et seulement si $p \leq 1/2$.

Or $p \leq 1/2 \iff E(Y) = \dfrac{1}{1/p - 1} \leq 1$ d'où le résultat.

La population s'éteindra si, et seulement si l'espérance de procréation du premier individu est inférieure à 1.

II- Modélisation informatique

10. (a) `lambda_` est le paramètre de la loi de Poisson et `n` est le numéro de la génération.

    (b) Si à une génération donnée il n'y a pas de descendants la population s'éteint. Les lignes 11 et 12 permettent donc d'arrêter les calculs en cas d'extinction prématurée.

    On va stocker les populations des $n+1$ générations (de 0 à n) dans un tableau `numpy`. Chaque population est initialisée à 0 à la ligne 2.

    Les lignes 6 à 8 permettent de calculer l'évolution de la population à une génération donnée en tenant compte du fait que $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$ sachant que les $X_{n,i}$ suivent une loi de Poisson de paramètre λ.

    (c) D'après les règles d'additivité des lois de Poisson indépendantes, la loi de la somme est suit une loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres d'où le résultat.

11. (a) La boucle correspond à la répétition de 10 simulations :

```python
lambda_ = 0.7
for k in range(10):
    plt.plot(galton_watson(lambda_, 20))
plt.show()
```

    (b) Toutes les populations semblent s'éteindre pour des valeurs de λ inférieures à une valeur autour de 1 puis cette probabilité diminue rapidement après ce seuil.

12. (a) On renvoie 1 à la ligne 12 et 0 à la ligne 13 au lieu de `population`.

    (b) On peut utiliser `sum` :

```python
def extinction(lambda_):
    return sum([galton_watson_2(lambda_, 60) for _ in range(5000)]) / 5000
```

ou pas :

```python
def extinction(lambda_):
    gw = 0
    for _ in range(5000):
        gw = gw + galton_watson_2(lambda_, 60)
    return gw/5000
```