Correction du devoir maison 4

Problème.

Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0;1[$ et on pose $q = 1 - p$.

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = k]) = q^k p = (1-p)^k p$$

Partie I -

1. Montrer que la variable aléatoire $Y = X + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

On a d'après l'énoncé $X(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^\star$ car $Y = X + 1$.
Soit $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = k) &= \mathbf{P}(X + 1 = k)\\ &= \mathbf{P}(X = k - 1)\\ &= q^{k-1}p\end{aligned}$$

donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$.

2. En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

D'après le cours, Y admet une espérance et une variance et

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbf{V}(Y) = \frac{q}{p^2}.$$

Par linéarité de l'espérance, on en déduit que X admet une espérance et

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y - 1) = \mathbf{E}(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1.$$

Par propriété de la variance, on en déduit que X admet une variance et

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y - 1) = \mathbf{V}(Y) = \frac{q}{p^2}.$$

Ainsi, on a obtenu :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p} - 1 \text{ et } \mathbf{V}(X) = \frac{q}{p^2}}.$$

3. Compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en entrée le réel p, elle renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

```python
def simule_X(p):
        Y=...
        while ...
            Y+=1
        return Y-1
```

Le programme propose de simuler une réalisation de Y et de renvoyer $Y-1=X$. On simule un échec d'une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p par `random()>p`, et on répète cette expérience en augmentant de 1 la valeur de Y jusqu'à l'obtention du premier succès.

```python
def simule_X(p):
        Y=0
        while random()>p:
            Y+=1
        return Y-1
```

Partie II - Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le fonctionnement est le suivant :

— le joueur introduit un nombre k de jetons de son choix ($k \in \mathbb{N}$), puis il appuie sur un bouton pour activer la machine ;

— si k est égal à zéro, alors la machine ne reverse aucun jeton au joueur ;

— si k est un entier supérieur ou égal à 1 , alors la machine définit k variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$, mutuellement indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X étudiée dans la partie A, et reverse au joueur ($X_1 + \cdots + X_k$) jetons ;

— les fonctionnements de la machine à chaque activation sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que du nombre de jetons introduits.

Le casino s'interroge sur la valeur à donner à p pour que la machine soit attractive pour le joueur, tout en étant rentable.

Le casino imagine alors le cas d'un joueur invétéré qui, avant chaque activation, place l'intégralité de ses jetons dans la machine, et continue de jouer encore et encore.

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après n activations de la machine.

On suppose que le joueur commence avec un seul jeton ; ainsi $Z_0 = 1$.

On remarque en particulier que Z_1 suit la même loi que X.

4. Compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$ et le réel p, elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de Z_n. Cette fonction devra utiliser la fonction `simule_X`.

```python
def simule_Z(n,p):
    Z = 1
    for i in range(1,n+1):
        s = 0
        for j in range(1,Z+1):
            ....
        Z =
    return Z
```

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a si $Z_n \neq 0$, $Z_{n+1} = X_1 + \ldots + X_{Z_n}$, donc Z_{n+1} est la somme de Z_n variables aléatoires de même loi que X. Si $Z_n = 0$, on a $Z_{n+1} = 0$. On propose donc le code suivant :

```
def simule_Z(n,p):
    Z = 1
    for i in range(1,n+1):
        s = 0
        for j in range(1,Z+1):
            s=s+simule_X(p)
        Z = s
    return Z
```

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n la probabilité que le joueur n'ait plus de jeton après n activations de la machine ; ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathbf{P}([Z_n = 0])$.

On note également R l'événement : « le joueur finit par ne plus avoir de jeton ».

5. (a) Préciser les valeurs de u_0 et de u_1.

On a d'après l'énoncé $Z_0 = 1$, donc $\boxed{u_0 = \mathbf{P}(Z_0 = 0) = 0}$.
Comme $Z_0 = 1$, on a $Z_1 = X_1$ donc $\boxed{u_1 = \mathbf{P}(Z_1 = 0) = \mathbf{P}(X_1 = 0) = qp}$ d'après la loi de X donnée dans l'énoncé.

(b) Comparer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les événements $[Z_n = 0]$ et $[Z_{n+1} = 0]$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$, si $Z_n = 0$, alors $Z_{n+1} = 0$ donc $(Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0)$. Par croissance des probabilités, on en déduit que $\mathbf{P}(Z_n = 0) \leq \mathbf{P}(Z_{n+1} = 0) \iff \boxed{u_n \leq u_{n+1}}$.
Ainsi, la suite $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une probabilité donc $0 \leq u_n \leq 1$. Ainsi, la suite $\boxed{(u_n) \text{ est majorée par } 1}$. Par théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite $\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$.

Dans la suite de l'exercice, on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6. Justifier : $\mathbf{P}(R) = \ell$.

R est l'évènement : « Le joueur finit par ne plus avoir de jetons », or un joueur qui n'a plus de jetons au tour $n \geq 1$ vérfie $Z_n = 0$, donc

$$\boxed{R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} (Z_n = 0)}.$$

On a montré dans la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0)$, donc la suite $\boxed{(Z_n) \text{ est une suite croissante d'évènements}}$.
Par $\boxed{\text{théorème de la limite croissante}}$, on en déduit que

$$\mathbf{P}(R) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(Z_n = 0) = \lim_{n\to+\infty} u_n,$$

autrement dit $\boxed{\mathbf{P}(R) = \ell}$.

7. (a) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbf{P}_{[Z_1=k]}([Z_2=0]) = (u_1)^k$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{[Z_1=k]}([Z_2=0]) &= \mathbf{P}(X_1+\ldots+X_k=0) \\
&= \mathbf{P}(X_1=0\cap\ldots\cap X_k=0) \text{ car toutes ces va sont positives} \\
&= \prod_{n=1}^{k} P(X_l=0) \text{ par indépendance mutuelle des va} \\
&= \mathbf{P}(X=0)^k \text{ car ces va ont la même loi que } X \\
&= \mathbf{P}(Z_1=0)^k \text{ car } Z_1 \text{ suit la même loi que } X \\
&= (u_1)^k
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}_{[Z_1=k]}([Z_2=0]) = (u_1)^k}$.

On **admet** que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$\mathbf{P}_{[Z_1=k]}([Z_{n+1}=0]) = (u_n)^k.$$

(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([Z_1=k])(u_n)^k = \frac{p}{1-qu_n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on veut déterminer $u_{n+1} = \mathbf{P}(Z_{n+1}=0)$. On considère le système complet d'évènements associé à Z_1 : $(Z_1=k,\ k\in\mathbb{N})$ et on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \mathbf{P}(Z_{n+1}=0) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_{n+1}=0\cap Z_1=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_1=k)(Z_{n+1}=0|Z_1=k) \text{ par formule des probabilités composées} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_1=k)(u_n)^k \text{ d'après l'énoncé} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} q^k p (u_n)^k \text{ car } Z_1 \text{ suit la loi de } X \\
&= p\sum_{k=0}^{+\infty} (qu_n)^k \\
&= p\frac{1}{1-qu_n} \text{ par résultat sur les séries géométriques}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{u_{n+1} = \dfrac{p}{1-qu_n}}$.

8. (a) Montrer que ℓ vérifie : $(\ell-1)(q\ell-p)=0$.

On sait que la suite (u_n) est convergente de limite ℓ. Par passage à la limite dans l'égalité trouvée à la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\ell = \frac{p}{1-q\ell} &\iff \ell(1-q\ell) = p \\
&\iff \ell - q\ell^2 - p = 0 \\
&\iff \boxed{(\ell-1)(q\ell-p) = 0}.
\end{aligned}$$

(b) On suppose $p \geqslant \frac{1}{2}$. Montrer : $\mathbf{P}(R) = 1$.

On a $(\ell-1)(q\ell-p) = 0 \iff \ell = 1$ ou $\ell = \frac{p}{q} = \frac{p}{1-p}$.
On pose $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \frac{x}{1-x}$.
$f \in \mathcal{C}^1([0,1[)$ comme quotient de polynômes avec un dénominateur qui ne s'annule pas. Pour $x \in [0,1[$, on a $f'(x) = \frac{1\times(1-x) - x\times(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$ d'où le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Pour $p > \frac{1}{2}$, on remarque que $f(p) > 1$, or $\ell \in [0,1]$, donc $\ell = f(p)$ est impossible. C'est donc que $\ell = 1$.
Pour $p = \frac{1}{2}$, on a $1 = f(p)$ donc $\ell = 1$ est la seule possibilité.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } p \geq \frac{1}{2}, \text{ on a } \ell = 1}$.

(c) On suppose $p < \frac{1}{2}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0; \frac{p}{q}\right]$. En déduire : $\mathbf{P}(R) < 1$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$ » est vraie.

- *Initialisation :* On a $u_0 = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité :* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$\begin{aligned}
  0 \leq u_n \leq \frac{p}{q} &\iff 1 \geq 1 - qu_n \geq 1 - p \\
  &\iff 1 \leq \frac{1}{1-qu_n} \leq \frac{1}{q} \text{ par décroissance de la fonction inverse}
  \end{aligned}$$
  sur $R_+^\star$ et $1 - p = q$
  $$\iff p \leq u_{n+1} \leq \frac{p}{q} \text{ par question } 7b$$
  donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion :* $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right]}$.

On a donc par passage à la limite : $\boxed{0 \leq \ell \leq \frac{p}{q} = f(p)}$. Pour $p < \frac{1}{2}$, on a montré que $f(p) < 1$, donc $\ell < 1$. Les seules valeurs possibles pour ℓ sont 1 et $\frac{p}{q}$, donc $\boxed{\mathbf{P}(R) = \ell = \frac{p}{q} < 1}$.

(d) Expliquer pourquoi le casino préférera choisir p dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Le casino préfère être presque sûr que le joueur finira ruiné, puisque c'est dans sa poche que finit l'argent du joueur.

Partie III -

On suppose à présent que $p \geqslant \frac{1}{2}$.

Le casino cherche la valeur à donner à p pour que le joueur joue le plus longtemps possible dans le casino et ainsi, dépense plus d'argent dans ses consommations au bar.

On note T la variable aléatoire égale au nombre d'activations de la machine effectuées par le joueur lorsque, pour la première fois, celui-ci n'a plus de jeton.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = 1 - u_n$.

9. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbf{P}([T \leqslant n])$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([T = n]) = v_{n-1} - v_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \mathbf{P}(Z_n = 0)$. $Z_n = 0$ si et seulement si le joueur n'a plus de jetons à l'activation n de la machine à sous, si et seulement si le numéro T de la première activation où le joueur est ruiné est inférieur ou égal à n. Ainsi,

$$\boxed{u_n = \mathbf{P}(T \leq n)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T = n) &= \mathbf{P}(T \leq n) - \mathbf{P}(T \leq n - 1) \\
&= u_n - u_{n-1} \\
&= 1 - v_n - (1 - v_{n-1}) \\
&= v_{n-1} - v_n
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathbf{P}(T = n) = v_{n-1} - v_n}$.

10. Montrer, pour tout N de $\mathbb{N}^*$: $\sum_{n=1}^{N} n\mathbf{P}([T = n]) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - Nv_N$.

Soit $N \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} n\mathbf{P}([T=n]) &= \sum_{n=1}^{N} n(v_{n-1}-v_n) \text{ par la question précédente}\\
&= \sum_{n=1}^{N} nv_{n-1} - \sum_{n=1}^{N} nv_n\\
&= \sum_{m=0}^{N-1} (m+1)v_m - \sum_{n=1}^{N} nv_n \text{ en posant } m=n-1\\
&= \sum_{m=0}^{N-1} mv_m - \sum_{n=1}^{N} nv_n + \sum_{m=0}^{N-1} v_m\\
&= 0\times v_0 - Nv_N + \sum_{m=0}^{N-1} v_m \text{ par télescopage}\\
&= \sum_{m=0}^{N-1} v_m - Nv_N
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\sum_{n=1}^{N} n\mathbf{P}([T=n]) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - Nv_N}$.

11. On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$.

   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Si on reprend l'expression obtenue en question 7b en remplaçant $p = \dfrac{1}{2}$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ » est vraie.

— *Initialisation :* On a $u_0 = 0$ et $\dfrac{0}{0+1} = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— *Hérédité :* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on a $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, et donc :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{2-u_n}\\
&= \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}}\\
&= \frac{n+1}{2(n+1)-n}\\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— *Conclusion :* $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n}{n+1}}$.

(b) En déduire que la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.

T admet une espérance si et seulement si $\sum_{n\geq 0} n\mathbf{P}(T=n)$ est absolument convergente. Par positivité des termes, on en déduit que T admet une espérance ssi $\sum_{n\geq 0} n\mathbf{P}(T=n)$ est convergente.
En question 10, on a montré :

$$\forall N \in \mathbb{N}^\star,\ S_N = \sum_{n=1}^{N} n\mathbf{P}([T=n]) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - N v_N.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = 1 - u_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, on obtient pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned} S_N = \sum_{n=1}^{N} n\mathbf{P}([T=n]) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{N}{N+1} \\ &= \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} - \frac{N}{N+1} \text{ en posant } m = n+1 \end{aligned}$$

On a $\lim_{N\to+\infty} \frac{N}{N+1} = 1$.
On reconnaît une somme partielle de série harmonique, qui est divergente, donc (S_N) est divergente (comme différence d'une suite divergente et d'une suite convergente).
Ainsi, $\boxed{T \text{ n'admet pas d'espérance}}$.

12. On suppose maintenant que $p > \dfrac{1}{2}$.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n}$.

(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \dfrac{q}{p} w_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= \frac{1-u_{n+1}}{\frac{p}{q}-u_{n+1}} \\
&= \frac{1-\frac{p}{1-qu_n}}{\frac{p}{q}-\frac{p}{1-qu_n}} \\
&= \frac{q}{p}\frac{p-\frac{p^2}{1-qu_n}}{p-\frac{pq}{1-qu_n}} \\
&= \frac{q}{p}\frac{1-\frac{p}{1-qu_n}}{1-\frac{q}{1-qu_n}} \\
&= \frac{q}{p}\frac{1-qu_n-p}{1-qu_n-q} \\
&= \frac{q}{p}\frac{q-qu_n}{p-qu_n} \\
&= \frac{q}{p}\frac{q(1-u_n)}{p-qu_n} \\
&= \frac{q}{p}\frac{1-u_n}{\frac{p-qu_n}{q}} \\
&= \frac{q}{p}\frac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n} \\
&= \frac{q}{p} w_n.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{w_{n+1} = \dfrac{q}{p} w_n}$.

(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant \left(\dfrac{q}{p}\right)^n$.

D'après la question précédente, (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{q}{p}$ et de premier terme $w_0 = \dfrac{q}{p}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = w_0 \times \left(\frac{q}{p}\right)^n = \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
w_n = \frac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n} &\iff \left(\frac{p}{q}-u_n\right) w_n = 1-u_n \\
&\iff (1-w_n)\, u_n = 1-\frac{p}{q} w_n \\
&\iff u_n = \frac{1-\frac{p}{q}w_n}{1-w_n}.
\end{aligned}$$

Donc en remplaçant w_n on obient

$$u_n = \frac{1 - \frac{p}{q}\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} = \boxed{\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} v_n &= 1 - \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} - \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n}\right)}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} \\ &= \frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} + \left(\frac{q}{p}\right)^{n}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} \\ &= \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{n}\left(1 - \frac{q}{p}\right)}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+2}} \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{n} \frac{\left(1 - \frac{q}{p}\right)}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{n} \left(\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{q}{p}\right)}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{n} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{q}{p}\right)^{k}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Comme $u_n \in [0,1]$, $v_n \geq 0$. De plus $1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{q}{p}\right)^{k} \geq 1$. Donc

$$\boxed{0 \leq v_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{n}}.$$

(c) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance et que l'on a :

$$\mathbf{E}(T) \leqslant \frac{1}{1 - \frac{q}{p}}.$$

La variable T admet une espérance si et seulement si $\sum n\mathbf{P}(T = n)$ converge absolument. Par positivité des termes il suffit de montrer que $\sum n\mathbf{P}(T = n)$ converge. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, d'après la question 10,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} n\mathbf{P}(T = n) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - Nv_N.$$

D'après la question précédente, $0 \leq v_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{n}$. De plus comme $p > \frac{1}{2}$, $\left|\frac{q}{p}\right| < 1$.

Donc la série $\sum \left(\frac{q}{p}\right)^n$ est une série géométrique convergente. Donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum v_n$ converge.
De plus,

$$0 \leq N v_N \leq N \left(\frac{q}{p}\right)^N.$$

Donc par encadrement et par croissance comparée, $\lim\limits_{N \to +\infty} N v_N = 0$.

Donc la suite (S_N) converge. Donc $\boxed{T \text{ admet une espérance}}$. Et

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Or d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^n,$$

d'où

$$\boxed{\mathbf{E}(T) \leq \frac{1}{1 - \frac{q}{p}}}.$$

13. Quelle(s) valeur(s) de p recommanderiez-vous au casino ?

D'après la question 8d, le casino préfère une valeur de $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
De plus pour maximiser le temps passé par le joueur au bar, le casino veut maximiser l'espérance de la variable T. Donc d'après les questions 11b et 12c la meilleure valeur est $\boxed{p = \frac{1}{2}}$.