
Programme de colle S9

1 Chapitre 5 : Espaces vectoriels

- opérations dans un espace vectoriel E , règles de calculs (associativité, distributivités, vecteur nul 0_E , etc), exemples fondamentaux : $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- notion de combinaison linéaire
- sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel (contient 0_E et est stable par combinaisons linéaires), intersection finie de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel
- sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs
- différentes écritures d'un espace vectoriel (cartésienne, paramétrée et vectorielle), passage d'une écriture à une autre
- famille génératrice finie, famille finie libre ou liée, propriétés sur ces familles
- base finie d'un espace vectoriel, unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base choisie, matrice des coordonnées d'un vecteur exprimées dans une base
- dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie, propriété sur la dimension : si F est un sous-espace vectoriel de E , avec E de dimension finie, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$
- propriétés sur les familles libres et génératrices par rapport à la dimension de l'espace vectoriel
- rang d'une famille de vecteurs, calcul pratique du rang et lien avec la liberté, les familles génératrices et les bases
- propriétés classiques des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à connaître (dimension, base canonique, et propriété sur les familles de polynômes de degrés 2 à 2 distincts)

2 Fiche de révision 7 : Fonctions de deux variables

- domaine de définition d'une fonction de deux variables (domaine à savoir représenter dans le plan)
- notion *intuitive* de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, calcul pratique des dérivées partielles d'une fonction de deux variables (et par extension, de plusieurs variables)
- gradient d'une fonction de deux variables, lien avec la recherche d'extrema : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et si f admet un extremum en un point $(x, y) \in \mathcal{D}$, alors $\vec{\text{grad}} f(x, y) = (0, 0)$ (*la réciproque est fausse*)
- théorème de dérivabilité et dérivée d'une fonction de la forme $t \mapsto f(x(t), y(t))$ où f est une fonction de deux variables (de classe $\mathcal{C}^1$)
- fonction de classe $\mathcal{C}^2$, théorème de symétrie de Schwartz
- ligne (ou courbe) de niveau k d'une fonction de deux variables
- plan tangent à une surface en un point (x_0, y_0) où la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$

3 Fiche de révision 8 : Calcul matriciel

- opérations sur les matrices
- algorithme du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire
- inversion d'une matrice :
 - le cas général en résolvant un système par pivot de Gauss
 - le cas général à partir d'une équation vérifiée par la matrice
- calcul d'une puissance $n^{\text{ième}}$ de matrice :
 - trouver la formule grâce aux premiers termes puis la prouver par récurrence
 - formule du binôme de Newton

4 Python

- Travail sur les listes et les tableaux (TP1)
- Simulation d'une expérience aléatoire grâce aux fonctions `random` et `randint`
- Travail sur les chaînes de caractères et les dictionnaires (TP4)
- Simulation des va qui suivent des lois discrètes usuelles et de leurs fonctions de répartition (TP5)

5 La question de cours

Voici quelques exemples (liste non exhaustive) :

1. Définition d'une famille libre $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E .
2. Définition d'une famille génératrice d'un espace vectoriel.
3. Définition d'une base d'un espace vectoriel.
4. Définition de la dimension d'un espace vectoriel.
5. Définition de la matrice des coordonnées d'une famille de vecteurs dans une base.
6. Définition du rang d'une famille de vecteurs.
7. Définition des coordonnées d'un vecteur dans une base.
8. Propriétés reliant le rang d'une famille de vecteurs à son statut de famille libre ou génératrice dans un espace de dimension finie.
9. Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.
10. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$. On note $C = A \times B$. Quelle est la taille de C ? Donner l'expression de ses coefficients.
11. Définir l'inversibilité d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
12. Déterminer la ligne de niveau truc de $f : (x, y) \mapsto \text{machin}$ et en proposer une représentation.
13. Donner l'équation du plan tangent à une surface d'équation $z = f(x, y)$ au point de coordonnées (x_0, y_0) .
14. Définir les points critiques d'une fonction de deux variables f .
15. ...