

Chapitre 3

Variables aléatoires réelles discrètes

1 Variables aléatoires réelles

1.1 Définition d'une variable aléatoire réelle

Définition 1.1.1. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace probabilisable.
Si X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{T}$$

alors on dit que X est une **variable aléatoire réelle** (abrégé var).

Proposition 1.1.1. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace probabilisable.
Si X est une variable aléatoire réelle alors pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on a

$$\{X \in I\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\} \in \mathcal{T}.$$

1.2 Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

Définition 1.2.1. Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle **univers image ou support de X** , noté $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par X , c'est-à-dire :

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$$

Définition 1.2.2. Une **variable aléatoire X** est dite **discrète** si son univers image s'écrit sous la forme

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\} \text{ où } I \text{ est une partie finie ou infinie de } \mathbb{N}.$$

Exemple 1.2.1. Déterminer le support d'une var X suivant loi binomiale de paramètres n et p .

$$X(\Omega) = [0, n]$$

Définition 1.2.3. La loi d'une var discrète X est donnée par

- $X(\Omega)$
- $\forall k \in X(\Omega), P(X = k)$.

Exemple 1.2.2. Une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p est répétée jusqu'à obtention de 2 succès. On note X le nombre d'essais. Déterminer la loi de X .

→ Si on est chanceux, on obtient directement les deux succès et $X=2$. Ensuite, toutes les suites sont possibles :

$$X(\Omega) = [2, +\infty[$$

→ Soit $k \geq 2$, on note pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: S_i : "Obtenir un succès au rang i "

T_i : "Obtenir exactement un succès entre les rangs 1 et i ".

$$\text{On a } P(X=k) = P(T_{k-1} \cap S_k) = P(T_{k-1}) P(S_k) \text{ par indépendance des épreuves}$$

$$= \binom{k-1}{1} p^{k-1} (1-p)^{k-1} \times p$$

$$\forall k \in [2, +\infty[, P(X=k) = \binom{k-1}{1} p^2 (1-p)^{k-2}$$

Définition 1.2.4. Soit X une variable aléatoire discrète.
Le système complet d'événements associé à X est la famille

$$((X = k), k \in X(\Omega)).$$

Exemple 1.2.3. Donner le système complet d'événements associé à une var X de loi binomiale de paramètres n et p .

Le sce associé à x est : $(X = k, k \in \{0, \dots, n\})$.

2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète

Dans toute cette section, X désigne une variable aléatoire réelle discrète.

Définition 2.0.1. Soit X une variable aléatoire.
La fonction de répartition de X est définie par

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto P(X \leq x).$$

Méthode 2.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_X(x) = \sum_{\substack{u \in X(\Omega) \\ u \leq x}} P(X = u)$ (on cumule les probabilités).

Si par exemple $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $F_X(x) = 0$ si $x < 0$;
- $F_X(x) = P(X = 0)$ si $x \in [0, 1[$;
- $F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1)$ si $x \in [1, 2[$;
- ...

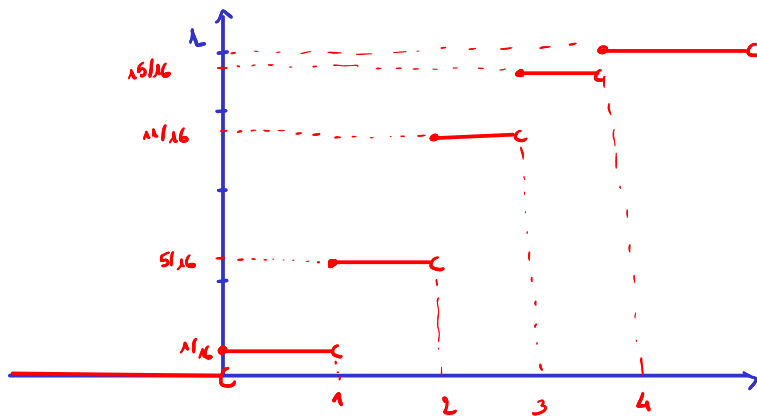
Exemple 2.0.1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(4, \frac{1}{2})$. Déterminer la fonction de répartition de X et la représenter graphiquement.

La loi de X est donnée par :

$$\forall k \in \{0, 4\}, P(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

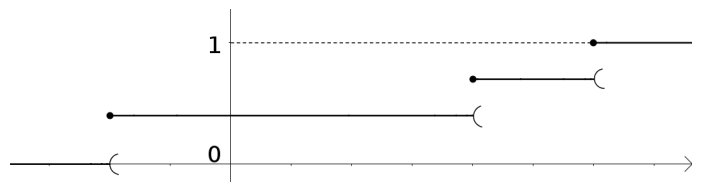
- Pour $x < 0$, $F_X(x) = P(X \leq x) = 0$
- Pour $0 \leq x < 1$, $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{1}{16}$
- Pour $1 \leq x < 2$, $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{5}{16}$
- Pour $2 \leq x < 3$, $F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{11}{16}$
- Pour $3 \leq x < 4$, $F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{15}{16}$
- Pour $x \geq 4$, $F_X(x) = 1$.



Proposition 2.0.1.

Toute fonction de répartition F_X a les propriétés suivantes :

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
4. La fonction F_X est une fonction en escalier (continue par morceaux)



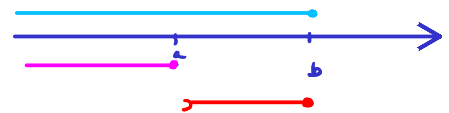
Démonstration. On démontre uniquement le point 1

Soient a et $b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

$$\text{Dm a } F_X(b) - F_X(a) = \underbrace{P(X \leq b)}_{\text{cyan}} - \underbrace{P(X \leq a)}_{\text{magenta}}$$

$$= \underbrace{P(a < X \leq b)}_{\text{red}}$$

≥ 0 par positivité des probabilités.



Ainsi F_X est une fonction croissante.

□

Proposition 2.0.2. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X . Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, on a

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Proposition 2.0.3. La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X **détermine complètement la loi** de X .

Soit X une variable aléatoire d'univers image $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ où $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$.

Alors :

- $P(X = x_1) = F_X(x_1)$;
- pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $P(X = x_n) = F_X(x_n) - F_X(x_{n-1})$.

Exemple 2.0.2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On tire simultanément deux boules de l'urne.

1. On note Y la variable aléatoire réelle correspondant au plus grand des deux numéros obtenus. Déterminer l'univers image de Y .

On a $Y(\Omega) = [2, n]$. En effet, dans le cas le plus défavorable, on pioche les boules 1 et 2 et donc $Y = 2$. Toutes les autres situations sont possibles en piochant par exemple les boules 1 et k pour $k \in [2, n]$.

2. Pour tout entier $k \in Y(\Omega)$, calculer $P(Y \leq k)$.

On note B_1 et B_2 les résultats des deux tirages. Soit $k \in [2, n]$,

$$\begin{aligned} P(Y \leq k) &= P(B_1 \leq k \text{ et } B_2 \leq k) \\ &= \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall k \in [2, n], P(Y \leq k) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$.

3. Déterminer la loi de probabilité de Y .

$$\begin{aligned} \text{Soit } k \in [3, n], \text{ on a } P(Y = k) &= P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1) \\ &= \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} \\ &= \frac{(k-1)(k-k+2)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

et $P(Y = 2) = P(Y \leq 2) = \frac{2}{n(n-1)}$ donc $\forall k \in [2, n], P(Y = k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$.

3 Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète

3.1 Espérance d'une variable aléatoire discrète

Définition 3.1.1. La var discrète X admet une **espérance** si et seulement si la série

$$\sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$$

est absolument convergente.

Dans ce cas,

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k).$$

Remarque 3.1.1. Il n'y a aucun problème de convergence si $X(\Omega)$ est fini. On dira simplement que l'espérance existe car l'univers image de la variable aléatoire est fini.

Exemple 3.1.1. Calculer l'espérance de la var X de l'exemple 1.2.2.

X admet une espérance

ni la $\sum$ de $k \cdot k \cdot P(X=k)$ est absolument convergente
ni la $\sum$ de $k \cdot k \cdot (k-1) \cdot p^2(1-p)^{k-2}$ est convergente par positivité
des termes.

On pose pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $S_n = \sum_{k=2}^n k \cdot P(X=k)$.

$$S_n = p^2 \sum_{k=2}^n k(k-1)(1-p)^{k-2}$$

On reconnaît une somme partielle de $\sum$ géom dérivée seconde
de raison q , $0 < q < 1$, donc convergente.

Ainsi, X admet une espérance et

$$E(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k P(X=k)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

$$= p^2 \frac{2}{(1-(1-p))^3}$$

$$E(x) = \frac{2}{p}$$

Proposition 3.1.1. 1. **Linéarité de l'espérance** : Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une espérance. Alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la variable aléatoire $aX + bY$ admet une espérance qui vaut :

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

2. **Positivité de l'espérance** : Si X admet une espérance et $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.

3. **Croissance de l'espérance** : Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une espérance, si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

4. **Théorème de transfert** : soit $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \in X(\Omega)} f(k) P(X = k)$ est absolument convergente et, dans ce cas, on a l'égalité :

$$E(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k) P(X = k)$$

Exemple 3.1.2. Soit X une variable aléatoire d'univers image $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = \frac{12}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

1. Démontrer que la variable aléatoire $X + 3$ admet une espérance que l'on déterminera.

Par thm de transfert, $X+3$ admet une espérance si la S de $(k+3)P(X=k)$ est absolument convergente
si la S de $\frac{12}{(k+1)(k+2)}$ est convergente par positivité des termes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{12}{(k+1)(k+2)}$.

$$\begin{aligned} \text{Déterminons } a \text{ et } b \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2} &= \frac{1}{(k+1)(k+2)} \Leftrightarrow \frac{a(k+2) + b(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &\Leftrightarrow \frac{k(a+b) + (2a+b)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+0+1}{(k+1)(k+2)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } S_n &= 12 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \right) \\ &= 12 \left(\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} - \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} \right) \\ &= 12 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \text{ par somme télescopique} \end{aligned}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 6$. Ainsi, $X+3$ admet une espérance et

$$E(X+3) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 6.$$

2. En déduire l'espérance de X .

Par linéarité de l'espérance, on en déduit :

$$\begin{aligned} E(X) &= E((X+3)-3) \\ &= E(X+3) - 3 \\ &= 6 - 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = 3}$$

Exemple 3.1.3. Soient $p \in]0, 1[$ et Y la variable aléatoire d'univers image $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y = n) = pq^n \quad (\text{où } q = 1 - p)$$

La variable aléatoire Y^2 admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Par le théorème de transposition, Y^2 admet une espérance si la $\sum$ de $k^2 p q^k$ est absolument convergente
si la $\sum$ de $k^2 p q^k$ est convergente par positivité des termes.

$$\begin{aligned} \text{Pour } n \geq 0, \text{ posons } S_n &= \sum_{k=0}^n k^2 p q^k = \sum_{k=0}^n (k^2 \cdot k + k) p q^k \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2 \cdot k) p q^k + \sum_{k=0}^n k p q^k \\ &= p q^2 \sum_{k=1}^n k(k-1) q^{k-2} + p q \sum_{k=0}^n k q^{k-1} \end{aligned}$$

On reconnaît des sommes partielles de $\sum$ géom. dérivée première et dérivée seconde de raison q , $-1 < q < 1$, donc convergentes. Ainsi, Y^2 admet une espérance et :

$$E(Y^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = p q^2 \frac{2}{(1-q)^3} + p q \frac{1}{(1-q)^2} = p q^2 \frac{2}{p^3} + p q \frac{1}{p^2} = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$$

$$\text{donc } \boxed{E(Y^2) = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p}}.$$

Théorème 3.1.2 (Inégalité de Markov).

Soit $X \geq 0$ une var admettant une espérance. On a, pour $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a} E(X).$$

Exemple 3.1.4. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, écrire l'inégalité de Markov pour X .

Soit $a > 0$. Soit $X(\Omega) : [0, n]$ donc $X \geq 0$. Et plus X admet une espérance et $E(X) = np$. Ainsi, par inégalité de Markov :

$$P(X \geq a) \leq \frac{np}{a}.$$

3.2 Variance et moments d'une variable aléatoire discrète

Définition 3.2.1. Une variable aléatoire discrète X admet une variance si $(X - E(X))^2$ admet une espérance. Alors la **variance** de X est $V(X) = E[(X - E(X))^2]$.

Théorème 3.2.1. Formule de König-Huygens

Si X et X^2 admettent une espérance, alors X admet une variance et

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Démonstration.

Soit X admettant une variance.

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \quad \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

□

Exemple 3.2.1. Calculer, si elle existe, la variance de la variable aléatoire Y de l'exemple 3.1.3.

→ Par formule de König-Huygens, Y admet une variance si Y admet une espérance et un moment d'ordre 2.

→ On a montré que Y admet un moment d'ordre 2 et que $E(Y^2) = 2 \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$.

→ Y admet une espérance si la $\sum$ de $kq \cdot h p q^k$ est absolument convergente
si la $\sum$ de $kq \cdot h p q^k$ est convergente par positivité des termes.

$$\text{Soit } m \in \mathbb{N}^*, \text{ on pose } S_m = \sum_{k=0}^m k p q^k = p q \sum_{k=1}^m k q^{k-1}.$$

On reconnaît une somme partielle de série géométrique dérivée première de raison q , $-1 < q < 1$, donc convergente. Ainsi Y admet une espérance et :

$$E(Y) = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = p q \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$$

→ Par formule de König-Huygens, on en déduit que Y admet une variance et :

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= 2 \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} \end{aligned}$$

$$V(X) = \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}.$$

Proposition 3.2.2. Soit X une variable aléatoire admettant une variance. Alors :

1. $V(X) \geq 0$;
2. $V(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante ;
3. pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la variable aléatoire $aX + b$ admet une variance qui vaut

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Exemple 3.2.2. Soit X une var qui compte le nombre de 1 obtenus en lançant 10 fois de manière indépendante un dé à 6 faces équilibré. On pose $Y = 2X + 1$. Déterminer l'espérance et la variance de Y .

→ On considère l'expérience de Bernoulli "Lancer un dé à 6 faces équilibré" et on appelle succès l'événement "Obtenir un 1", la proba $p = \frac{1}{6}$. On répète $n = 10$ fois cette expérience de manière indépendante et X compte le nombre de succès donc :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(10, \frac{1}{6}).$$

$$\text{On a donc } E(X) = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \text{ et } V(X) = \frac{5}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{18}.$$

→ Par linéarité de l'espérance, on en déduit que Y admet une espérance et

$$E(Y) = E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 2 \times \frac{5}{3} + 1 = \frac{13}{3}$$

$$\text{donc } E(Y) = \frac{13}{3}.$$

Par propriété de la variance, Y admet une variance et :

$$V(Y) = V(2X+1) = 2^2 V(X) = \frac{100}{18}$$

$$\text{donc } V(Y) = \frac{100}{18}.$$

Définition 3.2.2. Le moment d'ordre r d'une var X est défini par

$$m_r(X) = E(X^r).$$

Remarque 3.2.1.

- Une variable aléatoire discrète finie admet des moments à tout ordre.
- Pour une variable aléatoire discrète infinie, il faut prouver la convergence absolue de la série.
- L'espérance correspond au moment d'ordre 1.

Exemple 3.2.3. Calculer le moment d'ordre 3 associé à la variable aléatoire Y de l'exemple 3.1.3.

Par thm de triangle, Y admet un moment d'ordre 3

or la $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 p q^k$ est absolument convergente

ni la $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 p q^k$ est convergente par positivité des termes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n k^3 p q^k$.

$$\begin{aligned} \text{On a } S_n &= \sum_{k=0}^n ((k^3 - 3k^2 + 2k) + 3k^2 - 2k) p q^k \\ &= \sum_{k=0}^n k(k-1)(k-2) p q^k + 3 \sum_{k=0}^n k^2 p q^k - 2 \sum_{k=0}^n k p q^k \end{aligned}$$

$$= p q^3 \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2) q^{k-3} + 3 \sum_{k=2}^n k(k-1) p q^k + \sum_{k=1}^n k p q^k$$

$$= p q^3 \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2) q^{k-3} + 3 p q^2 \sum_{k=2}^n k(k-1) q^{k-2} + p q \sum_{k=1}^n k q^{k-1}$$

Série géométrique dérivée troisième :

$$\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) q^{k-3} = \frac{6}{(1-q)^4}$$

$$\text{et } k(k-1)(k-2) = k^3 - 3k^2 + 2k$$

On reconnaît des sommes partielles de séries géométrique dérivée troisième, géométrique dérivée seconde et géométrique dérivée première de raison q , $-1 < q < 1$, donc convergentes.

Ainsi $(S_n)_{n \geq 0}$ est convergente, donc Y admet un moment d'ordre 3 et :

$$E(Y^3) = p q^3 \frac{6}{(1-q)^4} + 3 p q^2 \frac{2}{(1-q)^3} + p q \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{6q^3}{p^3} + \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$$

$$\text{donc } E(Y^3) = \frac{6q^3}{p^3} + \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p}.$$

3.3 Inégalité de Bienaymé-Tchebichev

Théorème 3.3.1 (Inégalité de Bienaymé-Tchebichev).

Soit X une var admettant des moments d'ordre 1 et 2.

On a, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Exemple 3.3.1. Soit X une va suivant une loi binomiale de paramètres (n, p) , avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$.

Montrer que $P(|X - np| \geq np) \leq \frac{(1-p)}{np}$.

X admet une espérance et une variance donc on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev. Soit $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - np| \geq \varepsilon) \leq \frac{np(1-p)}{\varepsilon^2}.$$

$$\text{On pose } \varepsilon = np, \text{ on obtient : } P(|X - np| \geq np) \leq \frac{1-p}{np}.$$

3.4 Variable aléatoire centrée-réduite

Définition 3.4.1.

- Une variable aléatoire discrète de **variance égale à 1** est dite **réduite**.
- Une variable aléatoire discrète de **variance égale à 1** et d'**espérance égale à 0** est dite **centrée réduite**.
- L'**écart-type** d'une variable aléatoire possédant une variance vaut :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Proposition 3.4.1. Soit X une variable aléatoire possédant une espérance et une variance, de variance non nulle. Alors la var discrète

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

est centrée réduite.

C'est la **variable aléatoire centrée réduite associée à X** .

Exemple 3.4.1. Donner la var centrée réduite associée à une var X qui suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

La var centrée réduite associée à X est :

$$X^* = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

4 Indépendance de variables aléatoires

4.1 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 4.1.1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Ces variables sont **indépendantes** si pour tous intervalles I et J on a :

$$P(\{X \in I\} \cap \{Y \in J\}) = P(\{X \in I\})P(\{Y \in J\}).$$

Remarque 4.1.1. S'il existe $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tel que $P(X = x, Y = y) = 0$, alors X et Y ne sont pas indépendantes (puisque, par contre, $P(X = x) \neq 0$ et $P(Y = y) \neq 0$).

Exemple 4.1.1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On prélève simultanément deux jetons et on note X le plus petit des numéros obtenus et Y le plus grand. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

On a $P(X=2) \neq 0$ et $P(Y=2) \neq 0$ mais $P(X=2 \cap Y=2) = 0$,
donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes

Proposition 4.1.1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes** et f et g deux fonctions, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires **indépendantes**.

Exemple 4.1.2. Supposons que X et Y soient des variables aléatoires indépendantes. Alors les variables aléatoires e^X et $\sin(Y)$ sont indépendantes.

4.2 Indépendance de n variables aléatoires discrètes

Définition 4.2.1. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. On dit que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont **deux à deux indépendantes** si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, \forall (x_i, x_j) \in X_i(\Omega) \times X_j(\Omega),$$

$$P((X_i = x_i) \cap (X_j = x_j)) = P(X_i = x_i)P(X_j = x_j).$$

Définition 4.2.2. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. On dit que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si :

$$\forall J \subset \llbracket 1, n \rrbracket, J = j_1, \dots, j_p, \forall (x_1, \dots, x_p) \in X_{j_1}(\Omega) \times \dots \times X_{j_p}(\Omega),$$

$$P((X_{j_1} = x_1) \cap \dots \cap (X_{j_p} = x_p)) = \prod_{i=1}^p P(X_{j_i} = x_i)$$

Exemple 4.2.1. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $m_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

On a $m_n(\Omega) = \{0, 1\}$ car $\forall k \in [1, n], X_k(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$\begin{aligned} P(m_n = 0) &= P(\max(X_1, \dots, X_n) = 0) \\ &= P(X_1 = 0 \cap \dots \cap X_n = 0) \\ &= \prod_{k=1}^n P(X_k = 0) \text{ par indépendance mutuelle de } (X_1, \dots, X_n) \\ &= (1-p)^n \text{ car } \forall k \in [1, n], X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p) \text{ donc } P(X_k = 0) = 1-p. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } P(m_n = 1) = 1 - (1-p)^n$$

$$\text{donc } \boxed{m_n \hookrightarrow \mathcal{B}(1, 1 - (1-p)^n)}.$$

2. Que valent l'espérance et la variance de m_n ?

$$\text{Par propriété des variables, on a } E(m_n) = 1 - (1-p)^n$$

$$\text{et } V(m_n) = (1-p)^n (1 - (1-p)^n).$$

Proposition 4.2.1. On suppose que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

1. Toute sous-famille de $(X_1, \dots, X_n)$ est constituée de variables aléatoires mutuellement indépendantes.
2. Si $(i, j) \in [1, n]^2$ est tel que $i \neq j$, les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes. *L'indépendance mutuelle d'une famille de variables aléatoires implique donc l'indépendance deux à deux de cette famille.*
3. Si $u_1, \dots, u_n$ sont des fonctions, alors $u_1(X_1), \dots, u_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.
4. **Lemme des coalitions :** Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $u : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R}^{n-p} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Les variables aléatoires $u(X_1, \dots, X_p)$ et $v(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

4.3 Indépendance d'une suite de variables aléatoires discrètes

Définition 4.3.1. On dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

4.4 Espérance, variance et indépendance de variables aléatoires

Proposition 4.4.1. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors XY admet une espérance et

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

Proposition 4.4.2. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une variance, alors $X + Y$ admet une variance et :

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y).$$

Proposition 4.4.3. Si $(X_1, \dots, X_n)$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une variance, alors $\sum_{k=1}^n X_k$ admet une variance et :

$$\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k).$$

5 Variables aléatoires discrètes finies usuelles (rappel)

Loi de X	Notation	Situation concrète	Loi	Esp et var
certaine égale à x		On considère une expérience aléatoire qui n'a qu'une seule issue possible : x .	$X(\Omega) = x$ $P(X = x) = 1$	$\mathbf{E}(X) = x$ $\mathbf{V}(X) = 0$
uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$	$\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	On considère une expérience aléatoire équiprobable à n issues : $\llbracket 1, n \rrbracket$	$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}$
Bernoulli de paramètre p	$\mathcal{B}(1, p)$	On considère une expérience aléatoire à deux issues (succès et échec) et de probabilité de succès p . X vaut 0 en cas d'échec et 1 en cas de succès	$X(\Omega) = \{0, 1\}$ $P(X = 0) = q$ $P(X = 1) = p$ avec $q = 1 - p$	$\mathbf{E}(X) = p$ $\mathbf{V}(X) = pq$
binomiale de paramètres (n, p)	$\mathcal{B}(n, p)$	On considère une expérience de Bernoulli de paramètre p répétée n fois de manière indépendante. X compte le nombre de succès.	$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ avec $q = 1 - p$	$\mathbf{E}(X) = np$ $\mathbf{V}(X) = npq$

6 Variables aléatoires discrètes infinies usuelles

6.1 Loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$

Définition 6.1.1. On répète une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p de manière indépendante et on appelle X le nombre d'étapes nécessaires à l'obtention du premier succès.

On a alors, si p est la probabilité de succès et $q = 1 - p$:

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = q^{k-1}p$.

On dit que X suit une **loi géométrique de paramètre p** et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et on note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

Exemple 6.1.1. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire qui donne le numéro du lancer correspondant au premier face.

1. Donner la loi de X .

On considère l'expérience de Bernoulli "Lancer une pièce équilibrée" de succès "Obtenir Face", de proba $p = \frac{1}{2}$. On répète cette expérience de manière indépendante jusqu'à l'obtention du premier succès et on note X le rang du premier succès, donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2})$.

2. Que vaut $P(X = 5)$.

$$P(X=5) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^5}.$$

Théorème 6.1.1. Soit X une variable suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$. Cette variable possède une espérance et une variance :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Démonstration.

→ X admet une espérance si la $\sum$ de $k \times P(X=k)$ est absolument convergente
si la $\sum$ de $k \times q \times q^{k-1}$ est convergente par positivité des termes.

$$\text{Pour } n \geq 1, \text{ on pose } S_n = \sum_{k=1}^n k \times p \times q^{k-1} = p \sum_{k=1}^n k \times q^{k-1}.$$

On reconnaît une somme partielle de série géométrique dérivée première de raison q , $-1 < q < 1$, donc convergente. Ainsi, X admet une espérance et :

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = p \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \quad \text{donc} \quad E(X) = \frac{1}{p}.$$

→ Par thm de transfert, X admet un moment d'ordre 2 si la $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p q^{k-1}$ est absolument convergente
 si la $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p q^{k-1}$ est convergente par positivité des termes.

$$\begin{aligned} \text{Pour } n \geq 1, \text{ on pose } T_n &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - k) p q^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k p q^{k-1} \\ &= p q \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) q^{k-2} + p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} \end{aligned}$$

On reconnaît des sommes partielles de séries géométrique dérivée seconde et géométrique dérivée première de raison q , $-1 < q < 1$, donc convergentes. Ainsi X admet un moment d'ordre 2 et

$$E(X^2) = p q \frac{2}{(1-q)^3} + p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} \text{ donc } E(X^2) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

→ Par formule de König-Huygens, X admet une variance et :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2} \text{ donc } V(X) = \frac{q}{p^2}.$$

□

Proposition 6.1.2. La fonction de répartition de X est une fonction en escalier, dont les sauts sont portés par $\mathbb{N}^*$, et de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_X(n) = 1 - q^n$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{Soit } m \in \mathbb{N}^*, F_X(m) &= P(X \leq m) \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^m (X=k)\right) = \sum_{k=1}^m P(X=k) \text{ par } \sigma\text{-additivité et disjonction} \\ &= \sum_{k=1}^m p q^{k-1} = p \times \frac{1-q^m}{1-q} = 1 - q^m \end{aligned}$$

□

Proposition 6.1.3. La loi géométrique est **sans mémoire**. Soient $p \in]0, 1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors :

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, P(X > m+n | X > m) = P(X > n)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{On a } P(X > m+n | X > m) &= \frac{P(X > m+n \cap X > m)}{P(X > m)} = \frac{P(X > m+n)}{P(X > m)} \\ &= \frac{1 - F_X(m+n)}{1 - F_X(m)} = \frac{q^{m+n}}{q^m} = q^n \end{aligned}$$

$$\text{et } P(X > m) = 1 - F_X(m) = q^m$$

□

6.2 Loi de Poisson.

Définition 6.2.1. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Exemple 6.2.1. 1. Nombre de bateaux qui arrivent dans un port

2. Quatre clients arrivent en moyenne par minute dans un laps de temps de 10 minutes. Si on note X le nombre de clients qui arrivent dans le magasin dans un intervalle de 10 minutes, on peut modéliser la loi de X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4 \times 10 = 40$.

Théorème 6.2.1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors :

$$E(X) = \lambda \quad V(X) = \lambda$$

Démonstration.

→ X admet une espérance si la $\sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k)$ est absolument convergente
 si la $\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ est convergente par positivité des termes.
 Soit $n \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$$\begin{aligned} &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^n k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\lambda^{l+1}}{l!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\lambda^l}{l!} \end{aligned}$$

On reconnaît une somme partielle de série exponentielle, donc convergente. Ainsi X admet une espérance et

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

→ X admet un moment d'ordre 2 par thm de transfert
 si la $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k)$ est absolument convergente
 si la $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ est convergente par positivité des termes.

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \geq 0, \text{ on pose } T_n &= \sum_{k=0}^n k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^n k \times k \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^n k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(l+1) \lambda^{l+1}}{l!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_n &= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{l=1}^{n-1} \frac{l \lambda^l}{l!} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\lambda^l}{l!} \right) \\ &= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{l=1}^{n-1} \frac{\lambda^l}{(l-1)!} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\lambda^l}{l!} \right) \\ &= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{m=0}^{n-2} \frac{\lambda^{m+1}}{m!} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\lambda^l}{l!} \right) \\ &= \lambda e^{-\lambda} \left(\lambda \sum_{m=0}^{n-2} \frac{\lambda^m}{m!} + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\lambda^l}{l!} \right) \end{aligned}$$

On reconnaît des sommes partielles de séries exponentielles, donc convergentes.

Ainsi X admet un moment d'ordre 2 et

$$E(X^2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lambda e^{-\lambda} (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda})$$

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

→ Par formule de König-Huygens, on en déduit que X admet une variance et :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \end{aligned}$$

$$V(X) = \lambda$$

□

Proposition 6.2.2 (Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson). Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1[$, soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On suppose que :

$$n \geq 30 \quad \text{et} \quad p \leq 0,1 \quad \text{et} \quad np(1-p) \leq 10,$$

alors on peut approcher X par une Y telle que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(np)$.

Intérêt : on dispose de tables de valeurs pour la loi de Poisson.

Exemple 6.2.2. Dans une chaîne de fabrication, 5% des pièces sont défectueuses. On prélève une pièce, on examine si elle est défectueuse et on la replace parmi toutes les autres. On répète 120 fois cette expérience. On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces défectueuses.

1. Déterminer la loi de X puis calculer la probabilité d'obtenir exactement 5 pièces défectueuses.

On considère l'expérience de Bernoulli "Prendre une pièce" et on appelle succès l'état "La pièce est défectueuse", de proba $p = 0,05$. On répète $n = 120$ fois cette expérience de manière indépendante et X compte le nombre de succès, donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(120, 0.05)$.

$$\text{Ainsi, } P(X=5) = \binom{120}{5} \times 0.05^5 \times 0.95^{115} \approx 0.1634.$$

2. Une approximation Poissonnienne est-elle adaptée? Le vérifier numériquement en utilisant les tables de valeurs fournies.

On a $n = 120 \geq 30$, $p = 0.05 \leq 0.1$ et $np(1-p) = 5.7 \leq 10$ donc une approximation poissonnienne est justifiée.

$$\text{Ici, } \lambda = np = 6 \text{ donc d'après les tables, pour } Y \hookrightarrow \mathcal{P}(6), P(Y=5) = 0.1606.$$

Théorème 6.2.3 (Somme de lois de Poisson indépendantes).

— Soient X et Y deux variables indépendantes, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors $Z_n = \sum_{k=1}^n X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n \lambda_k$.

7 Méthodes classiques de détermination de loi d'une var discrète

7.1 Loi d'une somme de variables aléatoires discrètes indépendantes

Méthode 7.1. Pour déterminer la loi de la va $X + Y$ quand on connaît les lois discrètes de X et de Y , avec X et Y indépendantes, on applique la méthode suivante :

1. On détermine le support $(X + Y)(\Omega)$ à partir de ceux de X et Y .
2. On considère le système complet d'événements associé à X : $((X = n), n \in X(\Omega))$.
3. Pour $k \in (X + Y)(\Omega)$, on détermine $P(X + Y = k)$ en appliquant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{n \in X(\Omega)} P(X + Y = k \cap X = n) \\ &= \sum_{n \in X(\Omega)} P(Y = k - n \cap X = n) \end{aligned}$$

4. On réduit alors la somme en trouvant les conditions sur n pour que $k - n \in Y(\Omega)$.
5. On utilise l'indépendance des va X et Y pour se ramener à

$$P(X + Y = k) = \sum_{n \in ??} P(Y = k - n)P(X = n).$$

6. On remplace les probabilités par leurs valeurs et on calcule la somme.

Exemple 7.1.1. Soient X et Y deux variables indépendantes suivant des lois Poisson de paramètres respectifs λ et μ , alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

On a $(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, on veut déterminer $P(X + Y = k)$.

On considère le système complet d'événements associé

à X : $(X = m, m \in \mathbb{N})$ et on applique la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(X + Y = k \cap X = m) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(Y = k - m \cap X = m) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(Y = k - m) P(X = m) \text{ par } \\ &\quad \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \sum_{m=0}^k P(Y = k - m) P(X = m) \\ &\quad + \underbrace{\sum_{m=k+1}^{+\infty} P(Y = k - m) P(X = m)}_{=0} \end{aligned}$$

$$P(X + Y = k) = \sum_{m=0}^k P(Y = k - m) P(X = m)$$

$$= \sum_{m=0}^k \mu^{k-m} \frac{e^{-\mu}}{(k-m)!} \lambda^m \frac{e^{-\lambda}}{m!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \lambda^m \mu^{k-m}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k \text{ par formule du binôme de Newton}$$

donc $\boxed{X + Y \hookrightarrow P(\lambda + \mu)}$.

Méthode 7.2. Pour déterminer la loi de la va $Z_n = \sum_{k=1}^n X_k$ quand on connaît les lois discrètes des X_k , avec $(X_1, \dots, X_n)$ mutuellement indépendantes, on procède par récurrence :

1. On initialise grâce à la loi de X_1 car $Z_1 = X_1$.
2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la loi de Z_n soit celle annoncée. On écrit alors :

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} X_k = \sum_{k=1}^n X_k + X_{n+1} = Z_n + X_{n+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, on connaît la loi de Z_n et d'après l'énoncé, on connaît la loi de X_{n+1} , donc on applique la méthode précédente pour déterminer la loi d'une somme de deux variables aléatoires discrètes.

Exemple 7.1.2. Soit $n \in \mathbb{N}$, soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $Z_n = \sum_{k=1}^n X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n \lambda_k$. $\Rightarrow Q(n)$.

• Initialisation : Pour $m=1$, $Z_1 = X_1$ donc $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Q(1)$ est vraie.

• Hérédité : Soit $m \geq 1$ tq $Q(m)$ vraie. Montrons que $Q(m+1)$ est vraie.

$$Z_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} X_k = \sum_{k=1}^m X_k + X_{m+1} = Z_m + X_{m+1}.$$

Par HR, $Z_m \hookrightarrow \mathcal{P}(\sum_{k=1}^m \lambda_k)$ et d'après l'énoncé $X_{m+1} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_{m+1})$. Par lemmes des conditions, Z_m et X_{m+1} sont indépendantes.

Ainsi, d'après la question précédente, $Z_{m+1} \hookrightarrow \mathcal{P}(\sum_{k=1}^m \lambda_k + \lambda_{m+1})$

donc $Z_{m+1} \hookrightarrow \mathcal{P}(\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k)$ et donc $Q(m+1)$ est vraie.

• Conclusion : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $Q(m)$ est vraie.

7.2 Loi d'une variable aléatoire discrète définie conditionnellement à une autre

Méthode 7.3. Pour déterminer la loi d'une va Y dont on connaît la loi conditionnellement à une va X , on applique la méthode suivante :

1. On détermine le support $Y(\Omega)$ à partir de celui de X et de la loi de Y conditionnellement à X .
2. On considère le système complet d'événements associé à X : $((X = n), n \in X(\Omega))$.
3. Pour $k \in Y(\Omega)$, on détermine $P(Y = k)$ en appliquant la formule des probabilités totales :

$$P(Y = k) = \sum_{n \in X(\Omega)} P(Y = k \cap X = n).$$

4. On réduit alors la somme en trouvant les conditions sur n pour que les événements $Y = k$ et $X = n$ ne soient pas incompatibles.
5. On applique la formule des probabilités composées :

$$P(Y = k) = \sum_{n \in ??} P(X = n)P_{(X=n)}(Y = k).$$

6. On remplace les probabilités par leurs valeurs et on calcule la somme.

Exemple 7.2.1. Supposons que X suive une loi de Poisson de paramètre λ et que la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ soit $\mathcal{B}(n, p)$, alors Y suit une loi de Poisson de paramètre λp .

→ On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et sachant $X = n$, $Y(\Omega) = [0, n]$
donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

→ Soit $k \in \mathbb{N}$, on veut déterminer $P(Y = k)$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X : $(X = n, n \in \mathbb{N})$. On obtient :

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = k \cap X = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P_{X=n}(Y = k) \text{ par formule des probabilités composées} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n) P_{X=n}(Y = k) \text{ car sachant } X = n, Y(\Omega) = [0, n] \text{ donc } 0 \leq k \leq n \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ car } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \text{ et sachant } X = n, Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{\lambda}{q}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} q^n$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{\lambda}{q}\right)^k \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{\ell+k}}{\ell!} \text{ avec } \ell = n - k$$

$$P(Y = k) = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{\lambda}{q}\right)^k (2q)^k \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!}$$

On reconnaît une série exponentielle de paramètre $x = \lambda q$ donc :

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} (2p)^k e^{\lambda q} \\ &= \frac{e^{-\lambda p}}{k!} (\lambda p)^k \end{aligned}$$

donc $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

7.3 Loi du min ou du max de variables aléatoires discrètes indépendantes

Méthode 7.4. Pour déterminer la loi du min ou du max de variables aléatoires discrètes indépendantes, on applique la méthode suivante :

1. On détermine la fonction de répartition du min ou du max.
2. On en déduit la loi du min ou du max grâce à la relation :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1).$$

Exemple 7.3.1 (Loi d'un maximum).

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p . On pose $M = \max(X, Y)$.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(M \leq n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} P(M \leq n) &= P(\max(X, Y) \leq n) \\ &= P(X \leq n \cap Y \leq n) \\ &= P(X \leq n)P(Y \leq n) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= F_X(n)F_Y(n) \\ &= (1-q^n)^2 \text{ car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \end{aligned}$$

$$\text{dnc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n(n) = (1-q^n)^2}.$$

2. En déduire la loi de probabilité de M .

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ dnc $\boxed{M(\Omega) = \mathbb{N}^*}$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N}^*, P(M=n) &= P(n-1 < M \leq n) \\ &= F_n(n) - F_n(n-1) \\ &= (1-q^n)^2 - (1-q^{n-1})^2 \\ &= (1-q^n + 1-q^{n-1})(1-q^{n-1} + q^{n-1}) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(M=n) = (2-q^n - q^{n-1})(q^{n-1} - q^n)}$$

Exemple 7.3.2 (Loi d'un minimum).

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(m_n \leq k)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } k \in \mathbb{N}^*, \quad P(m_n \leq k) &= P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq k) \\
 &= 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > k) \\
 &= 1 - P(X_1 > k \cap \dots \cap X_n > k) \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > k) \quad \text{car } (X_1, \dots, X_n) \text{ sont mutuellement indépendantes} \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(k)) \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - (1 - q^k)) \quad \text{car } X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \\
 &= 1 - (q^k)^n \\
 &= 1 - q^{nk}
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad F_{m_n}(k) = 1 - q^{nk}.$$

2. En déduire la loi de probabilité de m_n .

On a $m_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 P(m_n = k) &= F_{m_n}(k) - F_{m_n}(k-1) = 1 - q^{nk} - 1 + q^{n(k-1)} \\
 &= q^{n(k-1)} (1 - q^n)
 \end{aligned}$$

$$\text{et } P(m_n = 1) = F_{m_n}(1) = 1 - q^n$$

$$\text{donc } m_n \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q^n).$$

3. Justifier que la loi obtenue est usuelle. Que valent l'espérance et la variance de m_n ?

$$\text{On a alors } E(m_n) = \frac{1}{1 - q^n}$$

$$\text{et } V(m_n) = \frac{q^n}{(1 - q^n)^2}.$$