

Fiche de révision 7 - Correction

Fonctions de deux variables

1 Compétences et notions à maîtriser

- ▷ C1 : Déterminer le domaine de définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, sa représentation graphique dans le plan
- ▷ C2 : Maîtriser la notion *intuitive* de fonction de plusieurs variables de classe $\mathcal{C}^1$, opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$
- ▷ C3 : Calculer les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables
- ▷ C4 : Manipuler une surface représentative, un plan tangent, des lignes de niveau
- ▷ C5 : Déterminer la dérivabilité et la dérivée d'une fonction composée de la forme $t \mapsto f(x(t), y(t))$
- ▷ C6 : Déterminer un gradient et connaître lien avec la notion d'extremum
- ▷ C7 : Déterminer des dérivées partielles d'ordre deux, utiliser le théorème de symétrie de Schwartz
- ▷ C8 : Résoudre une équation aux dérivées partielles à plusieurs variables

2 Correction des exercices

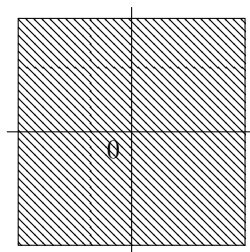
Exercice 1 (C1-C2-C3-C7)  1. Pour chacune des fonctions f d'expressions suivantes :

- préciser le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et le représenter dans le plan (sauf pour la question (d)) ;
- calculer, aux points où elles existent, les dérivées partielles.

(a) $f(x, y) = y^5 - 3xy$

La fonction f est polynomiale donc elle est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$ et :

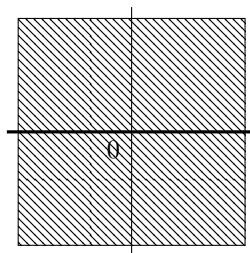
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -3y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 5y^4 - 3x$$



(b) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

Le dénominateur s'annule pour $y = 0$. La fonction f est donc définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions polynomiales et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2}$$

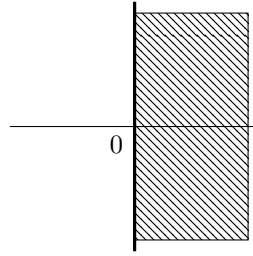


L'axe des abscisses n'appartient pas au domaine de définition de f .

(c) $f(x, y) = x^y$

L'expression de f est $f(x, y) = e^{y \ln(x)}$. Le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$ par produit et composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \ln(x)x^y$$



L'axe des ordonnées n'appartient pas au domaine de définition de f .

(d) $f(x, y, z) = x^2 e^z + xy^2 - e^{-xz}z$

Par produit et composition (de polynômes et d'exponentielles), la fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x e^z + y^2 + z^2 e^{-xz}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2xy$$

et :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x^2 e^z + xz e^{-xz} - e^{-xz}$$

(e) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{x-y}\right)$

La fonction $\arctan$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur :

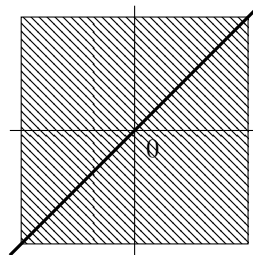
$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\frac{(x-y)-x}{(x-y)^2}}{1 + \left(\frac{x}{x-y}\right)^2} = -\frac{y}{(x-y)^2 + x^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\frac{x}{(x-y)^2}}{1 + \left(\frac{x}{x-y}\right)^2} = \frac{x}{(x-y)^2 + x^2}$$



La première bissectrice (*i.e.* la droite d'équation $y = x$) ne fait pas partie du domaine de définition de f .

(f) $f(x, y) = (x^2 + 1)e^{-x^2 y}$

Par produit et composition, la fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xy(x^2 + 1)e^{-x^2 y} + 2xe^{-x^2 y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^2(x^2 + 1)e^{-x^2 y}$$

2. Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions f des questions 1.(a) et 1.(c) aux points où elles existent. Que remarque-t-on ? Cette observation est-elle surprenante ?

• **Pour la fonction f de la question 1.(a).**

Les dérivées partielles obtenues sont polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 20y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -3$$

• **Pour la fonction f de la question 1.(c).**

Les dérivées partielles obtenues sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$ par somme, produit et composition et, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \ln(x)^2 x^y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = x^{y-1} + y \ln(x) x^{y-1}$$

et :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{x} \times x^{y-1} y \ln(x) x^{y-1} = x^{y-1} + y \ln(x) x^{y-1}$$

Dans les deux cas, on obtient donc :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

Ce résultat n'est pas surprenant car ces fonctions f sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur leurs domaines de définition respectifs. Le théorème de symétrie de Schwartz assure sous cette condition l'égalité des dérivées croisées.

Exercice 2 (C1-C2-C3-C4-C8)  On note $n(x, t)$ la densité linéaire de particules (en mole par mètre) à l'instant t au point d'abscisse x . Ces particules diffusent en obéissant à la loi de Fick, avec un coefficient de diffusion D . On montre que la fonction n est solution de l'équation suivante sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (E)$$

1. Soit $A \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $A \in \mathbb{R}$, la fonction $n : (x, t) \mapsto \frac{A}{\sqrt{t}} e^{\frac{x^2}{4Dt}}$ est bien solution de (E).

Soit $A \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{A}{\sqrt{t}}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction $(x, t) \mapsto -\frac{x^2}{4Dt}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ (donc sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$) comme quotient de fonction polynomiales (le dénominateur ne s'annulant pas. Par composition et produit, la fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x, t) = -\frac{A}{2t^{3/2}} e^{\frac{x^2}{4Dt}} - \frac{Ax^2}{4Dt^2 \sqrt{t}} e^{\frac{x^2}{4Dt}}$$

et :

$$\frac{\partial n}{\partial x}(x, t) = \frac{Ax}{2Dt\sqrt{t}} e^{\frac{x^2}{4Dt}} \quad \text{puis} \quad \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x, t) = \frac{A}{2Dt\sqrt{t}} e^{\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{Ax^2}{4Dt^2 \sqrt{t}} e^{\frac{x^2}{4Dt}}$$

et donc :

$$-D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x, t) = -\frac{A}{2t\sqrt{t}} e^{\frac{x^2}{4Dt}} - \frac{Ax^2}{4Dt^2 \sqrt{t}} e^{\frac{x^2}{4Dt}} = \frac{\partial n}{\partial t}(x, t)$$

puisque $t^{3/2} = t\sqrt{t}$. Donc :

on a l'égalité $\frac{\partial n}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ donc n est solution de (E)

2. On considère ici la fonction n de la question 1 pour $A = D = 1$.

- (a) Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, calculer $\frac{\partial n}{\partial x}(x, t)$ et $\frac{\partial n}{\partial t}(x, t)$ en précisant leurs signes.

Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x, t) = -\frac{1}{2t^{3/2}} e^{\frac{x^2}{4t}} - \frac{x^2}{4t^2\sqrt{t}} e^{\frac{x^2}{4t}} \leq 0$$

et :

$$\frac{\partial n}{\partial x}(x, t) = \frac{x}{2t\sqrt{t}} e^{\frac{x^2}{4t}}$$

qui est du signe de x .

- (b) Sur un même dessin, proposer sur $\mathbb{R}_+$ des représentations graphique de :

$$n_1 : x \mapsto n(x, t_1) \quad \text{et} \quad n_2 : x \mapsto n(x, t_2)$$

pour $0 < t_1 < t_2$.

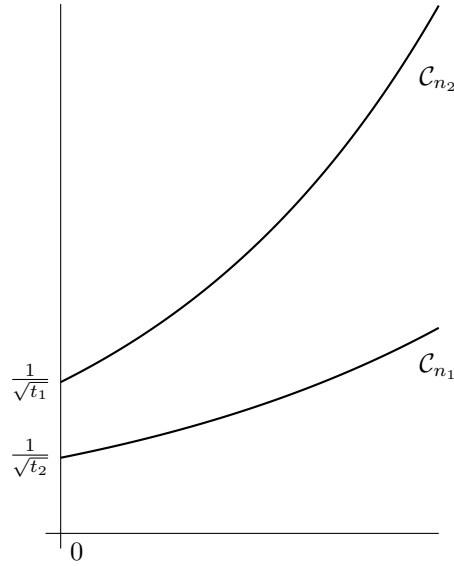
Soit $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $t_1 < t_2$. On a vu à la question 2a que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial n}{\partial t}(x, t) \leq 0$$

Cela signifie que, pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, la fonction $t \mapsto n(x, t)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, le graphe de la fonction $n_1 : x \mapsto n(x, t_1)$ est au-dessus de celui de la fonction $n_2 : x \mapsto n(x, t_2)$ (puisque $t_1 < t_2$). Par ailleurs, on sait aussi (*cf.* question 2a) que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial n}{\partial x}(x, t) \geq 0$$

donc les fonctions n_1 et n_2 sont croissante sur $\mathbb{R}_+$.



Exercice 3 (C4)  Soit la fonction f d'expression $f(x, y) = x e^{xy}$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(1, 0)$.

Les fonctions $(x, y) \mapsto xy$ et $(x, y) \mapsto x$ sont polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et comme la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on obtient par composition et produit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ au point $(1, 0)$. La surface représentative $\mathcal{S}$ de f présente donc au point de coordonnées $(1, 0)$ un plan tangent P . Celui-ci a pour équation :

$$P : z = f(1, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)y$$

Or :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{xy} + xy e^{xy} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 e^{xy}$$

et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1$$

Donc $P : z = x + y$.

2. En déduire une valeur approchée de $f(1, 1; -0, 1)$.

Le point $(1, 1; -0, 1)$ est proche du point $(1, 0)$. Une approximation de $f(1, 1; -0, 1)$ est donc donnée par la côte du point de coordonnées $(1, 1; -0, 1)$ sur le plan tangent P . Donc :

$$\text{une approximation de } f(1, 1; -0, 1) \text{ est } f(1, 1; -0, 1) \approx 1, 1 + (-0, 1) = 1$$

Exercice 4 (C5)  Dans chacun des cas, calculer la dérivée de la fonction g en précisant l'intervalle de dérivabilité.

1. $f(x, y) = e^{x+2y}$ et $g(t) = f(\cos(t), t^3)$

La fonction $(x, y) \mapsto x + 2y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiale) tandis que la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, les fonctions $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto t^3$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (et on a $(\cos(t), t^3) \in \mathbb{R}^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) donc, par composition, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ (et donc dérivable) sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = -\frac{\partial f}{\partial x}(\cos(t), t^3) \sin(t) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(\cos(t), t^3)t^2 = -\sin(t) e^{\cos(t)+2t^3} + 6t^2 e^{\cos(t)+2t^3}$$

COMMENTAIRE

On rappelle le théorème de dérivabilité d'une composée à partir d'une fonction de deux variables. Soient :

1. f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$;
2. x et y deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$;
3. on suppose de plus que pour tout $t \in I$, on a $(x(t), y(t)) \in \mathcal{D}$ (hypothèse de composition).

Alors la fonction (d'une seule variable) $g : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (donc dérivable sur I) et :

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

Ce théorème a surtout un intérêt si la fonction de deux variables f n'est pas explicite. Dans le cas contraire, on peut effectivement considérer directement la fonction d'une seule variable. En effet, on a dans cette question :

$$g : t \mapsto e^{\cos(t)+2t^3}$$

Cette fonction est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et on peut calculer facilement sa dérivée. Pour la question 4., il faut appliquer le théorème ci-dessus.

Dans le corrigé de cet exercice, on applique à chaque fois le théorème (essentiellement pour le mettre en œuvre) mais on peut faire l'autre méthode évoquée ci-dessus.

2. $f(x, y) = \ln(1 + xy)$ et $g(t) = f(\sqrt{t}, t^2)$

Le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > -1\}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$ par composition. De plus, les fonctions $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto t^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $(\sqrt{t}, t^2) \in \mathcal{D}_f$ puisque $\sqrt{t}t^2 > 0 > -1$. Par composition, la fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ (donc dérivable) sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{t}, t^2) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{t}, t^2) = \frac{t^2}{2\sqrt{t}(1 + t^{3/2})} + \frac{2t^{3/2}}{1 + t^{3/2}}$$

3. $f(x, y) = x^2 + e^y + xy$ et $g(t) = f(e^t, \sin(t))$

En procédant comme dans la question 1., on obtient que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = (2e^t + \sin(t))e^t + (e^{\sin(t)} + e^t) \cos(t)$$

4. f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $g(t) = f(e^t, -t^2)$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par hypothèse et les fonction $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto -t^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(e^t, -t^2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Par composition, la fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = e^t \frac{\partial f}{\partial x}(e^t, -t^2) - 2t \frac{\partial f}{\partial y}(e^t, -t^2)$$

Exercice 5 (C1-C4)  On considère les fonctions :

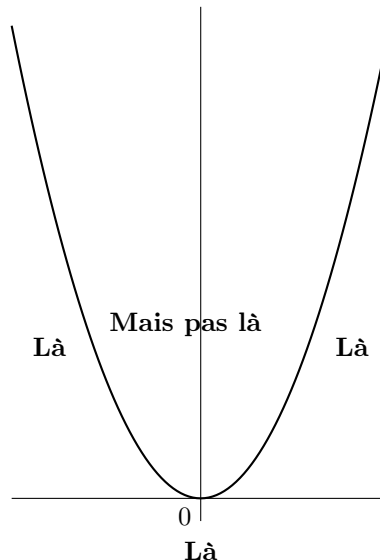
$$f : (x, y) \mapsto \ln(x^2 - y) \quad \text{et} \quad g : (x, y) \mapsto \frac{y}{x^2 + y^2 - 1}$$

1. Déterminer et représenter dans le plan les domaines de définition de f et de g .

La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc le domaine de définition de f est :

$$\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^2\}$$

Graphiquement, $\mathcal{D}_f$ est la région du plan située strictement en dessous de la parabole d'équation $y = x^2$.



Notons $\mathcal{D}_g$ le domaine de définition de g . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$(x, y) \in \mathcal{D}_g \iff x^2 + y^2 \neq 1 \iff M(x, y) \text{ n'appartient pas au cercle trigonométrique}$$

Donc $\mathcal{D}_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$ ce qui correspond géométriquement à l'intérieur et à l'extérieur du cercle trigonométrique. Autrement dit, $\mathcal{D}_g$ est $\mathbb{R}^2$ privé de ce cercle.

2. Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer la courbe (ou « ligne ») de niveau k de f et en proposer une représentation graphique. Même question pour la fonction g .

Soit $k \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{L}_k$ la ligne de niveau k de f . Il s'agit de l'intersection de la surface représentative de f (ou de g) avec le plan horizontal d'équation $z = k$.

- **Lignes de niveaux de la fonction f .**

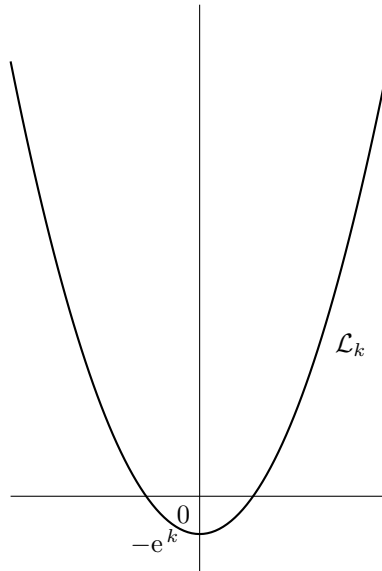
Soit $(x, y) \in \mathcal{D}_f$. En utilisant la stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a :

$$f(x, y) = k \iff x^2 - y = e^k \iff y = x^2 - e^k$$

Donc :

$$\mathcal{L}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - e^k\}$$

On obtient la représentation graphique suivante :



- **Lignes de niveaux de la fonction g .**

Soit $(x, y) \in \mathcal{D}_g$. Alors :

$$(x, y) \in \mathcal{L}_k \iff k(x^2 + y^2 - 1) = y \iff kx^2 + ky^2 - y - k = 0$$

On distingue deux cas. Si $k = 0$, alors :

$$(x, y) \in \mathcal{L}_0 \iff y = 0$$

et donc $\mathcal{L}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$. Autrement dit, $\mathcal{L}_0$ est l'axe des abscisses (faire le dessin).

On suppose que $k \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{L}_k &\iff k(x^2 + y^2 - 1) = y \iff kx^2 + ky^2 - y - k = 0 \\ &\iff x^2 + y^2 - \frac{y}{k} - 1 = 0 \\ &\iff x^2 + \left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 - \frac{1}{4k^2} - 1 = 0 \\ &\iff x^2 + \left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{4k^2 + 1}{4k^2} \end{aligned}$$

Comme $\frac{4k^2 + 1}{4k^2} > 0$, la ligne de niveau $\mathcal{L}_k$ est donc le cercle de centre $\Omega_k \left(0, \frac{1}{2k}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{4k^2 + 1}}{2|k|}$.

Graphiquement, le centre du cercle peut-être en dessous ou au dessus de l'axe des abscisses (suivant le signe de k). Dans les deux cas, le cercle peut bien sûr couper l'axe des abscisses et/ou l'axe des ordonnées.

Exercice 6 (C2-C6) Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. On considère la fonction :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y$$

(a) Déterminer le gradient de f .

La fonction f est polynomiale donc elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 4$$

Donc le gradient de f est défini par :

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = (2x - 2, 2y - 4)}$$

(b) En quel point la fonction f peut-elle admettre un extremum ?

On sait que si la fonction f présente un extremum en un point, alors le gradient de f est nul en ce point. Déterminons donc le ou les éventuels points d'annulation du gradient de f . Clairement :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = (0, 0) \iff x = 1 \text{ et } y = 2$$

Donc :

$$\boxed{\text{si } f \text{ présente un extremum, alors celui-ci est atteint au point de coordonnées } (1, 2)}$$

(c) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) \geq -5$ et conclure.

On a $f(1, 2) = -5$. De plus :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 5 \geq -5 \quad \text{car } (x-1)^2 + (y-2)^2 \geq 0$$

On a donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geq f(1, 2)$$

Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ présente un minimum au point de coordonnées } (1, 2) \text{ qui vaut } -5}$$

2. La fonction $f : x \mapsto x^3 + x^2y$ admet-elle un extremum ? Justifier.

La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car elle est polynomiale. De plus :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$$

et donc le gradient de f s'annule si et seulement si $x = 0$. Si f présente un extremum, alors il est atteint en un point dont les coordonnées sont de la forme $(0, y_0)$ où $y_0 \in \mathbb{R}$.

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors $f(0, y_0) = 0$. On distingue trois cas :

★ **Premier cas :** $y_0 = 0$.

On a $f(1, 0) = 1 > f(0, 0)$ donc f ne présente pas de maximum en $(0, 0)$ et $f(-1, 0) = -1 < f(0, 0)$ donc f ne présente pas de minimum en $(0, 0)$.

★ **Deuxième cas :** $y_0 > 0$.

On a $f(y_0, 0) = y_0^3$ et $f(-y_0, 0) = -y_0^3$ donc $f(-y_0, 0) < f(0, y_0) < f(y_0, 0)$. La fonction f ne présente ni minimum, ni maximum en $(0, y_0)$.

★ **Troisième cas :** $y_0 < 0$.

On a cette fois $f(y_0, 0) = y_0^3 < 0$ et $f(-y_0, 0) = -y_0^3 > 0$ donc la fonction f ne présente ni minimum, ni maximum en $(0, y_0)$.

Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ ne présente pas d'extremum sur } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 7 (C2-C6)  On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{y}{1+x^2+y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer le gradient de f et préciser les points critiques de cette fonction.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(1+x^2+y^2) - y \times 2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

donc :

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = \left(\frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \right)}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On résout :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} -2xy = 0 \\ 1+x^2-y^2 = 0 \end{cases} \iff (x=0 \text{ et } y=\pm 1) \text{ ou } \underbrace{(y=0 \text{ et } x^2=-1)}_{\text{impossible}}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{les points critiques de } f \text{ sont } (0, -1) \text{ et } (0, 1)}$$

2. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad -\frac{1}{2} \leq f(x, y) \leq \frac{1}{2}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$f(x, y) + \frac{1}{2} = \frac{y}{1+x^2+y^2} + \frac{1}{2} = \frac{2y+1+x^2+y^2}{2(1+x^2+y^2)} = \frac{(y+1)^2+x^2}{2(1+x^2+y^2)} \geq 0$$

La deuxième inégalité se démontre de la même manière. Ainsi :

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad -\frac{1}{2} \leq f(x, y) \leq \frac{1}{2}}$$

3. Conclure quant à l'existence d'extremums pour la fonction f .

On remarque que $f(0, 1) = \frac{1}{2}$ et $f(0, -1) = -\frac{1}{2}$. L'inégalité obtenue à la question 2. se réécrit donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(0, -1) \leq f(x, y) \leq f(0, 1)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ présente un minimum au point } (0, -1) \text{ et un maximum au point } (0, 1)}$$

Exercice 8 (C1-C2-C6) ☞ Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$g(x, y) = (x + y) e^{-(x^2+y^2)}$$

1. Calculer le gradient de g . Quelles sont les valeurs de (x, y) susceptibles d'être des extremums pour g ?
Les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto x + y$ sont polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition et produit, la fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = (1 - 2x^2 - 2xy) e^{-(x^2+y^2)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = (1 - 2xy - 2y^2) e^{-(x^2+y^2)}$$

Donc le gradient de f est défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{\text{grad}} g(x, y) = \left((1 - 2x^2 - 2xy) e^{-(x^2+y^2)}, (1 - 2xy - 2y^2) e^{-(x^2+y^2)} \right)$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On sait que si la fonction g présente un extremum en (x, y) , alors $\overrightarrow{\text{grad}} g(x, y) = (0, 0)$.
On résout donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} g(x, y) = (0, 0) &\iff \begin{cases} 2x^2 + 2xy = 1 & \text{L}_1 \\ 2xy + 2y^2 = 1 & \text{L}_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 + 2xy = 1 & \text{L}_1 \\ 2(x - y)(x + y) = 0 & \text{L}_2 \leftarrow \text{L}_1 - \text{L}_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x^2 + 2xy = 1 \\ y = x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x^2 + 2xy = 1 \\ y = -x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ y = x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0 = 1 \\ y = -x \end{cases} \\ &\iff (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

car le second système n'admet pas de solution. On en déduit que :

$$\text{les points en lesquels la fonction } g \text{ peut admettre un extremum sont } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

2. Soit $r \in \mathbb{R}_+$. Quels sont les maximum $M(r)$ et minimum $m(r)$ de g sur le cercle $\mathcal{C}_r$ de centre $O(0, 0)$ et de rayon r ?

On rappelle qu'un point M du plan (rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$) est caractérisé de manière unique par ses coordonnées polaires (r, θ) où $r = OM$ et $\theta = \widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} \bmod 2\pi$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+$. Si $M(x, y)$ appartient au cercle de centre O et de rayon r , alors son affixe est de la forme

$$r e^{i\theta} = r \cos(\theta) + i r \sin(\theta)$$

pour un certain nombre réel θ . Autrement dit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad M(x, y) \in \mathcal{C}_r \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, (x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

Ainsi, recherche les minimum et maximum de g sur le cercle $\mathcal{C}_r$ revient à chercher les minimum et maximum de la fonction $\theta \mapsto g(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ sur $\mathbb{R}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$g(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)) e^{-r^2(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)} = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)) e^{-r^2}$$

Or :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) + \sin(\theta) &= \sqrt{2} \left(\cos(\theta) \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(\theta) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos(\theta) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(\theta) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad g(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) r e^{-r^2}$$

Comme $\sqrt{2}r e^{-r^2} \geq 0$, pour minimiser et maximiser l'expression précédente, il suffit de minimiser maximiser $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$. Or ce cosinus vaut au minimum -1 par exemple si $\theta = \frac{5\pi}{4}$ et au maximum 1 par exemple si $\theta = \frac{\pi}{4}$. On en conclut donc que (avec les notations de l'énoncé) :

$$m(r) = -\sqrt{2}r e^{-r^2} \quad \text{et} \quad M(r) = \sqrt{2}r e^{-r^2}$$

3. Étudier les variations de M et de m sur $\mathbb{R}_+$.

Étudions les variations de M sur $\mathbb{R}_+$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (sur $\mathbb{R}$ même) par produit et composition de fonction dérivables et :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \quad M'(r) = \sqrt{2}(1 - 2r^2) e^{-r^2} = \sqrt{2} \left(1 - r\sqrt{2}\right) \left(1 + r\sqrt{2}\right) e^{-r^2}$$

On en déduit le tableau de signes de M et de variations de m et M suivants :

r	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$M'(r)$	+	0	-
M	0	$e^{-1/2}$	0
m	0	$-e^{-1/2}$	0

4. En déduire que g admet un maximum et un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Posons $M = e^{-1/2}$. Alors $M = M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. D'après la question 2., M est le maximum de la fonction g sur le cercle $\mathcal{C}_{\sqrt{2}/2}$. Remarquons qu'il est atteint au point $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. D'après la question 3., on sait aussi que :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \quad M \geq M(r) \quad \text{c'est-à-dire} \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \geq M(r)$$

Comme la réunion des cercles de centre O et de rayon r (où $r \in \mathbb{R}_+$) forme une partition de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{r \geq 0} \mathcal{C}_r$, l'inégalité précédente se réécrit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \geq f(x, y)$$

De la même manière :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \leq f(x, y)$$

Finalement :

f présente un maximum (respectivement minimum) sur $\mathbb{R}^2$ en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (respectivement $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$) qui vaut $e^{-1/2}$ (respectivement $-e^{-1/2}$)

Exercice 9 (C1-C2-C8)  Notons (E) chacune des équations aux dérivées partielles proposées et $\mathcal{S}_E$ son ensemble de solution. Si $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on notera $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathcal{D}$.

1. Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(y)^2 + x$$

D'après la formule de duplication du cosinus, on sait que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \sin(y)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2y)}{2}$$

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{S}_E &\iff \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2y)}{2} + x \\ &\iff \exists g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{y}{2} - \frac{\sin(2y)}{4} + xy + g(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{y}{2} - \frac{\sin(2y)}{4} + xy + g(x) \mid g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}$$

2. Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x) + 2y$$

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$f \in \mathcal{S}_E \iff \exists g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \sin(x) + 2xy + g(y)$$

et donc :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sin(x) + 2xy + g(y) \mid g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}$$

3. Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ telles que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \iff \exists g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}), \quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + g(y)$$

et, pour une fonction de cette forme :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &\iff \forall y \in (\mathbb{R}_+^*), \quad g'(y) = 0 \\ &\iff g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ est une fonction constante} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = x^2 + y^2$$

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{S}_E &\iff \exists g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{3} + y^2 x + g(y) \\ &\iff \exists (g, h) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{x^3 y}{3} + \frac{y^3 x}{3} + g(y) + h(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x^3 y}{3} + \frac{y^3 x}{3} + g(y) + h(x) \mid (g, h) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}$$

5. Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{S}_E &\iff \exists g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g(x) \\ &\iff \exists (g, h) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = g(x)y + h(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto g(x)y + h(x) \mid (g, h) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2 \right\}$$

6. Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - f(x, y) = x \quad \text{et} \quad f(x, 0) = 1 - x$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :

$$f \in \mathcal{S}_E \iff \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f \text{ est solution du problème de Cauchy } \mathcal{C}_x : \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - f(x, y) = x \\ f(x, 0) = 1 - x \end{cases}$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et résolvons le problème de Cauchy $\mathcal{C}_x$. L'équation différentielle (en y) est linéaire du premier ordre à coefficients constants. Son ensemble de solutions est :

$$\left\{ y \mapsto C(x)e^y - x \mid C \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}$$

Déterminons la fonction C répondant au problème de Cauchy. Soient $C \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f : (x, y) \mapsto C(x)e^y - x$. Alors :

$$f(x, 0) = 1 - x \iff C(x) - x = 1 - x \iff C(x) = 1$$

Donc $\mathcal{S}_E = \left\{ (x, y) \mapsto e^y - x \right\}$

Exercice 10 (C1-C2-C6)  Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f_k définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, 1[^2, \quad f_k(x, y) = x^k y - xy^k$$

De plus, g_k et φ_k désignent les fonctions définies par :

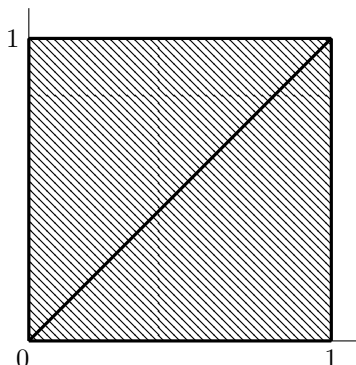
$$g_k(x, y) = \frac{f_k(x, y)}{x - y} \quad \text{et} \quad \varphi_k(x) = g_k(x, 1 - x)$$

1. Représenter à l'aide d'un schéma l'ensemble de définition de g_k noté $\mathcal{D}_1$ puis déterminer l'ensemble de définition de φ_k noté $\mathcal{D}_2$.

La fonction f_k est polynomiale donc elle est définie sur $\mathbb{R}^2$ et donc sur $]0, 1[^2$. Par quotient, le domaine de définition de g_k est donc :

$$\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$$

Les bords du carrés, ainsi que la diagonale principale, ne font pas partie de $\mathcal{D}_1$.



Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{D}_2 &\iff (x, 1 - x) \in \mathcal{D}_1 \iff x \in]0, 1[, \quad 1 - x \in]0, 1[\text{ et } x \neq 1 - x \\ &\iff x \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, 1 \right[\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}_2 = \left] 0, \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, 1 \right[.$

2. On cherche la limite de la fonction φ_k en $\frac{1}{2}$.
 - (a) Calculer les dérivées partielles de f_k en tout $(x, y) \in]0, 1[^2$ (on admet que f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[^2$) et en déduire le nombre dérivé de $x \mapsto f_k(x, 1 - x)$ au point $\frac{1}{2}$.

Soit $(x, y) \in]0, 1[^2$. Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = kx^{k-1}y - y^k \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^k - kxy^{k-1}$$

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1 - x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et la fonction f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ (cela est indiqué dans l'énoncé même si on le sait que f_k est polynomiale). De plus, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $(x, 1 - x) \in]0, 1[^2$. D'après la théorème de composition, la fonction $x \mapsto f_k(x, 1 - x)$, notée h , est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et on a :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad h'(x) = \frac{\partial f_k}{\partial x}(x, 1 - x) \times 1 + \frac{\partial f_k}{\partial y}(x, 1 - x) \times (-1)$$

En particulier, h est donc dérivable en $\frac{1}{2}$ et (en remplaçant) :

$$h' \left(\frac{1}{2} \right) = 2(k - 1) \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{k - 1}{2^{k-1}}$$

(b) En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \varphi_k(x) = \frac{k-1}{2^k}$$

Soit $x \in \mathcal{D}_2$. Alors :

$$\varphi_k(x) = g_k(x, 1-x) = \frac{f_k(x, 1-x)}{x - (1-x)} = \frac{h(x)}{2x-1} = \frac{1}{2} \times \frac{h(x) - h(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}}$$

puisque $h\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0$. Or la fonction h est dérivable en $\frac{1}{2}$ dont le taux d'accroissement précédent admet pour limite $h'\left(\frac{1}{2}\right)$ et donc :

la fonction φ_k admet une limite en $\frac{1}{2}$ qui vaut $\frac{1}{2}h'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k-1}{2^k}$
--